

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ d A a au moins un état non accessible.
☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☒ Un mot est une application.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot est une fonction.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
	☐ $X_1 = aX_1 + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

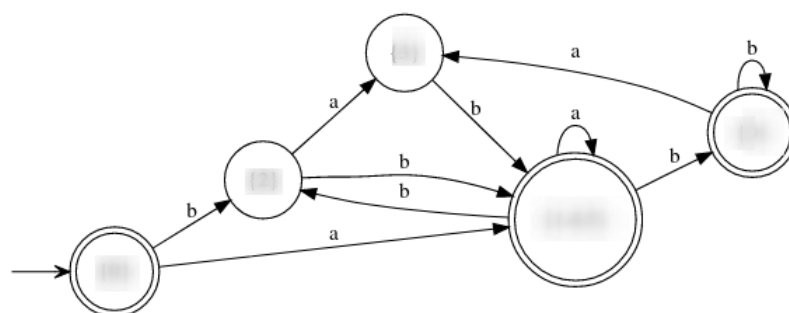
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 6 ☒ e 4 ☐ f 2 ☐ g 1

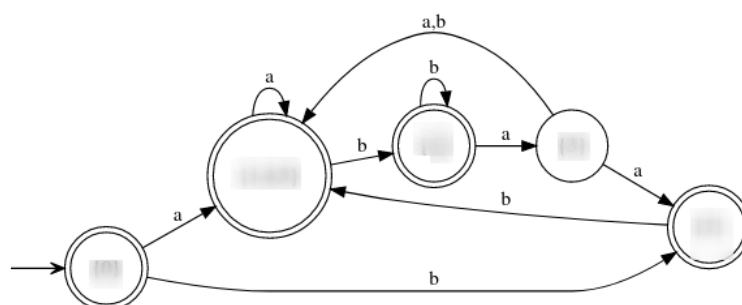
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

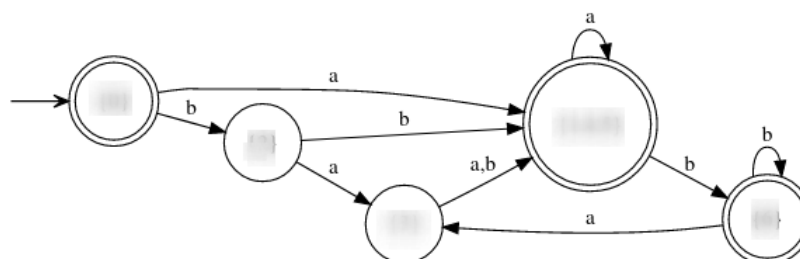
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



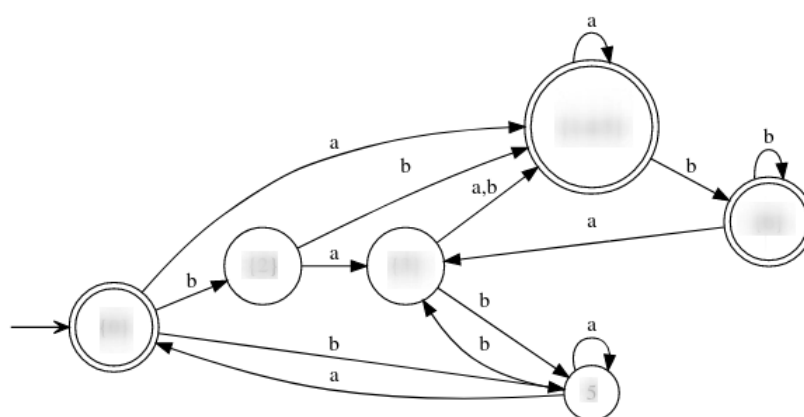
(-i-)



(-ii-)

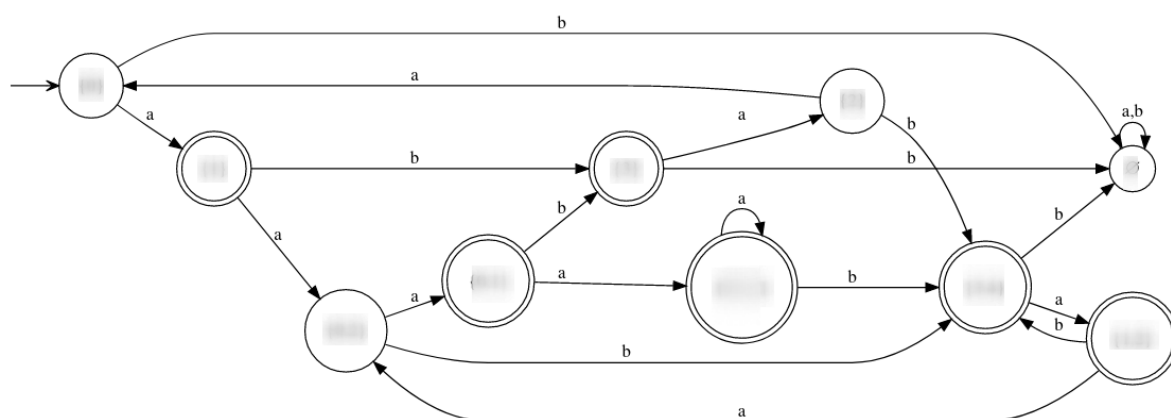


(-iii-)

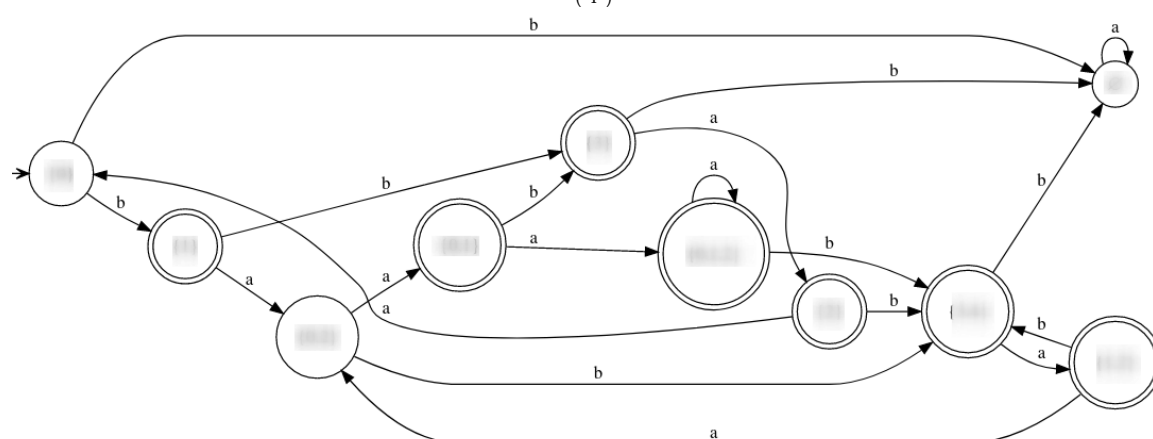


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

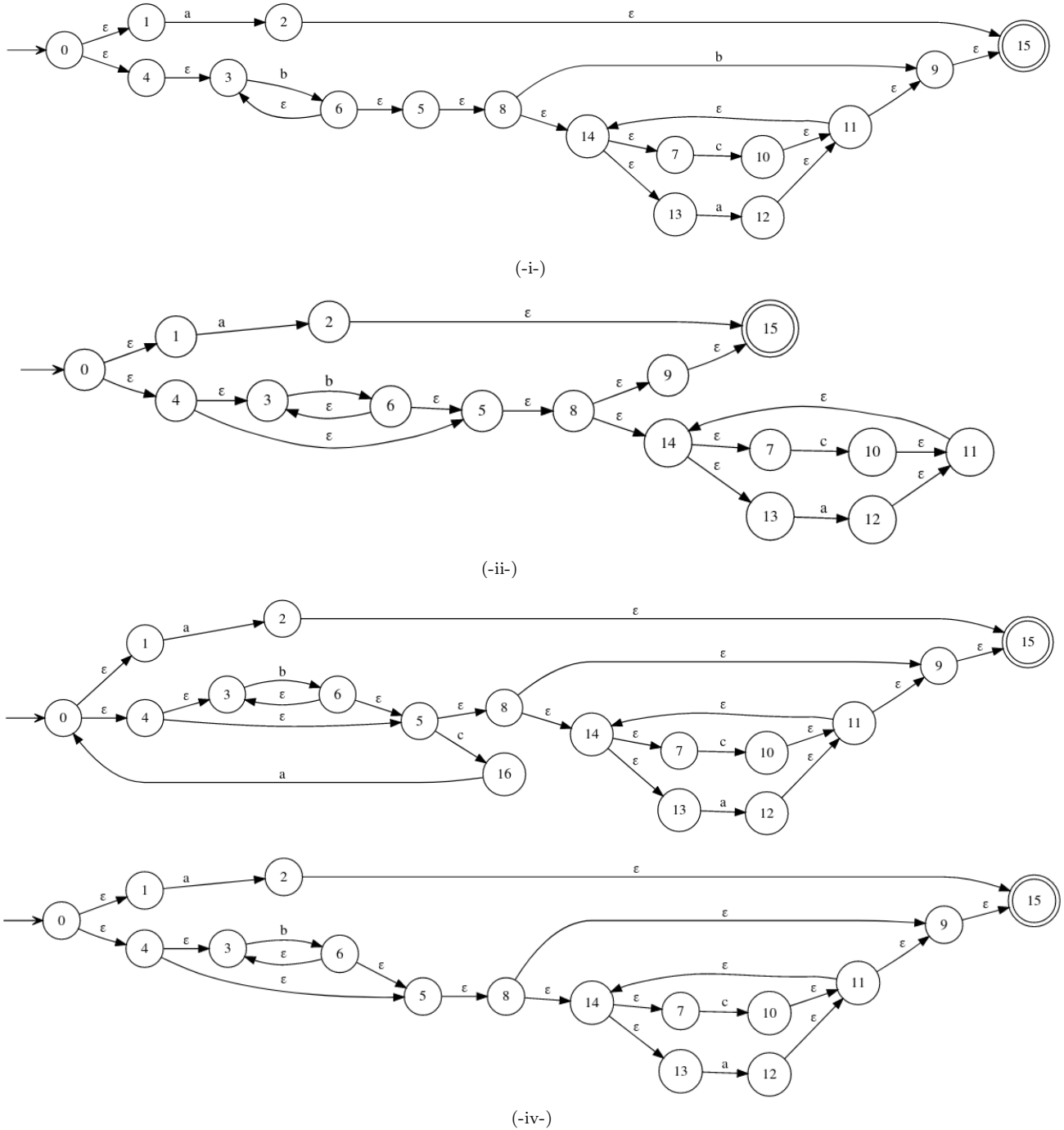


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d	e					j	k

Question 3 :

a			d	e			h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a		c					h				l	m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d	e	f			i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

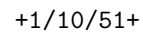
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d A a au moins un état co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ g A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.
- ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ est fermé par suffixe.
- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A est complet.
- ☐ e Les états de A sont tous accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut être vide.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A accepte le langage universel.
 ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-.
 ☐ la Figure 3-ii-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-.
 ☐ la Figure 4-ii-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

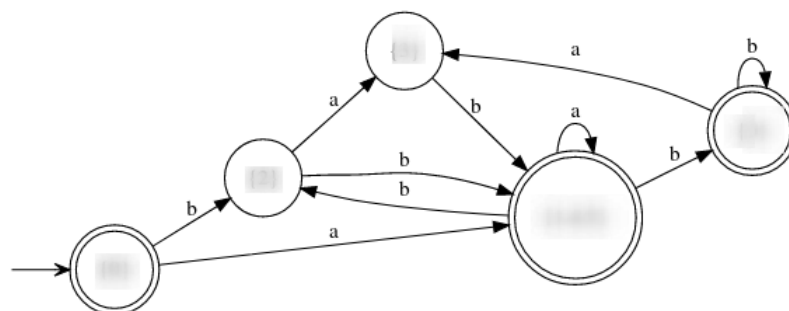
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 1

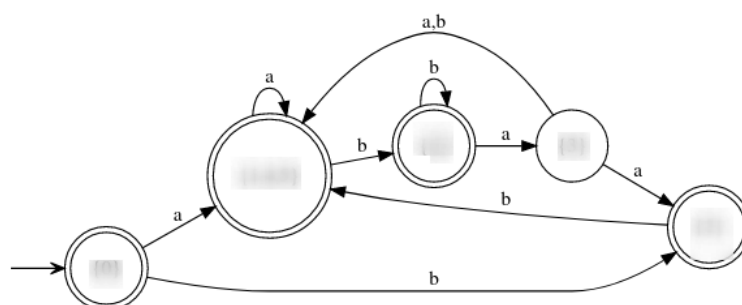
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

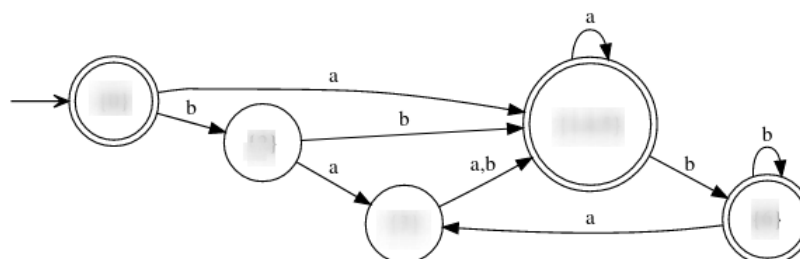
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



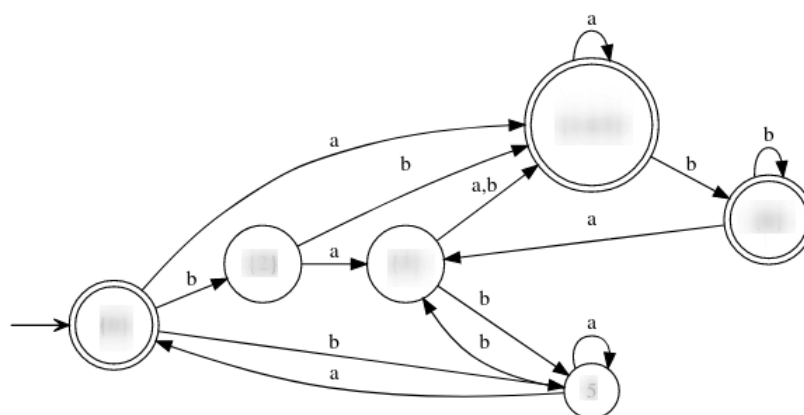
(-i-)



(-ii-)

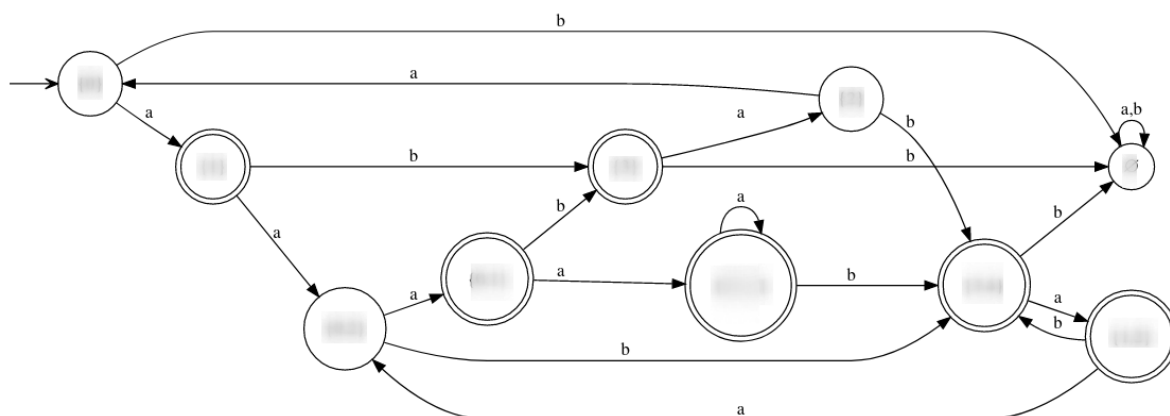


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



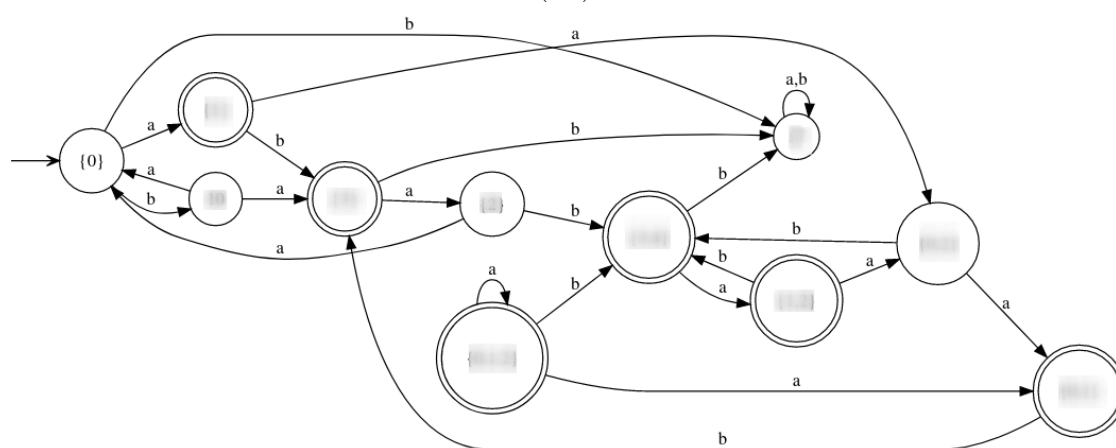
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d			g			j	k

Question 3 :

	b		d	e			h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

		c		e				i	j			m	n

Question 6 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a			d	e

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d		f		h	i	j		l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

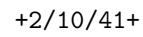
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot peut être vide.	☐	Un mot possède une infinité d'extensions.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Un mot est une application.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b u est accepté par A . ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c A accepte le langage universel. ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☒ c Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☒ e A n'est pas complet.
☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☒ g A a au moins un état accessible.
☒ h u n'est pas accepté par A . ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☒ c Σ^* est fermé par facteur.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☒ f Σ^* est fermé par préfixe. ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ h Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ b $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ c $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ e $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☒ f $X_2 = bX_2 + aX_3$
☒ g $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ h $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☒ i $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j $X_1 = aX_1 + b$ ☐ k $X_4 = a + b$ ☐ l $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☒ m $X_1 = aX_1 + bX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☒ a $X_4 = (a + b)^*$ ☐ b $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ c $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ d $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e $X_4 = a + b$ ☐ f $X_4 = a^* + b^*$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2$ ☐ d $X_1 = a^*b$
☒ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☒ c $X_2 = b^*aX_3$ ☐ d $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

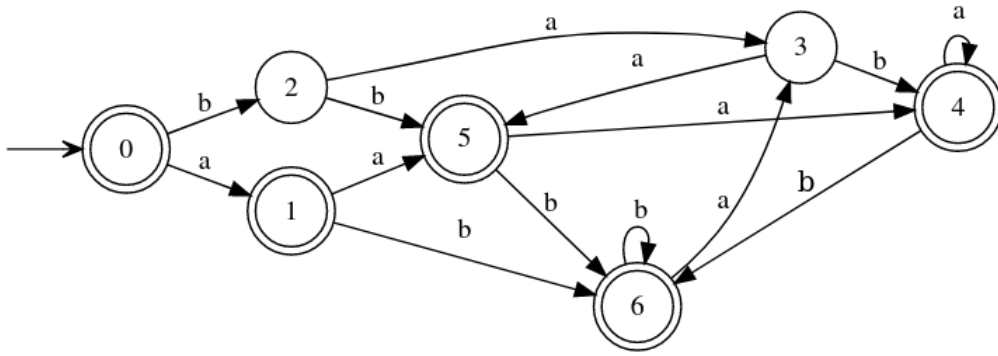
- ☒ a $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ c $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ b celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

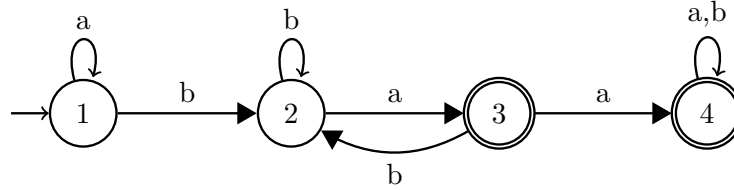
- ☒ a $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$ ☐ c $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

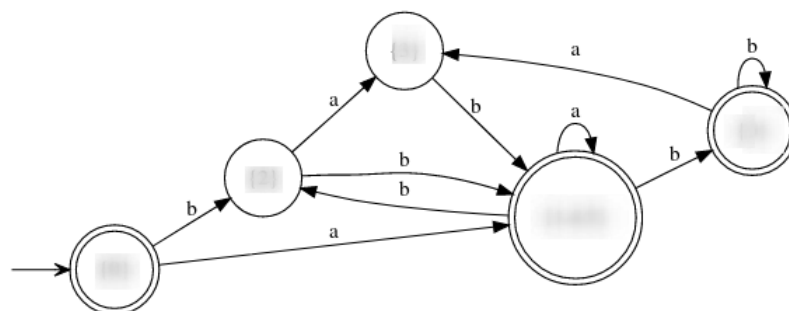
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 3 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 6

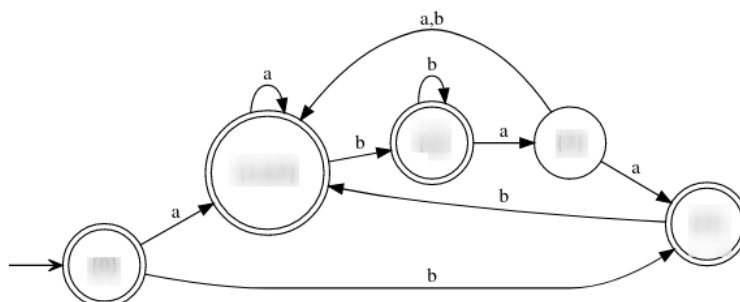
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

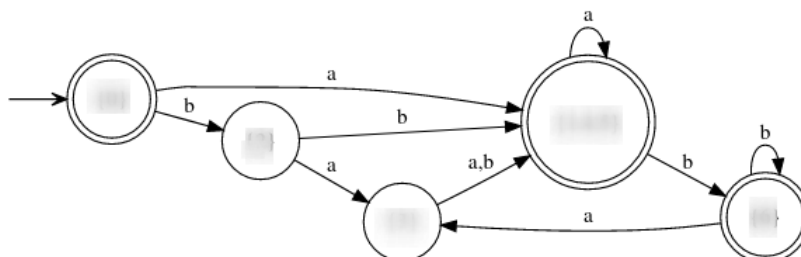
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



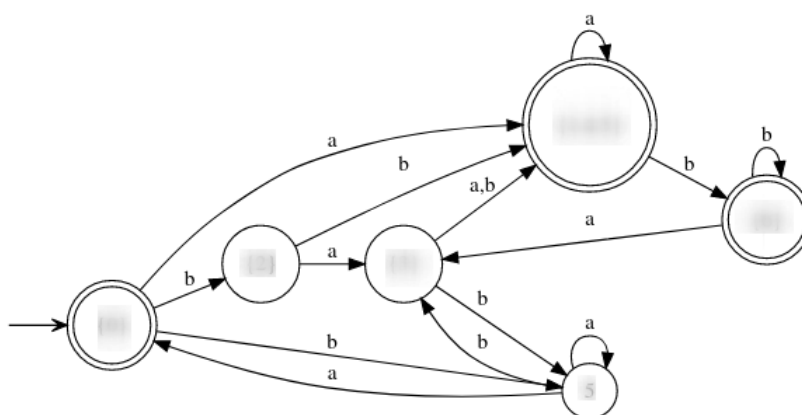
(-i-)



(-ii-)

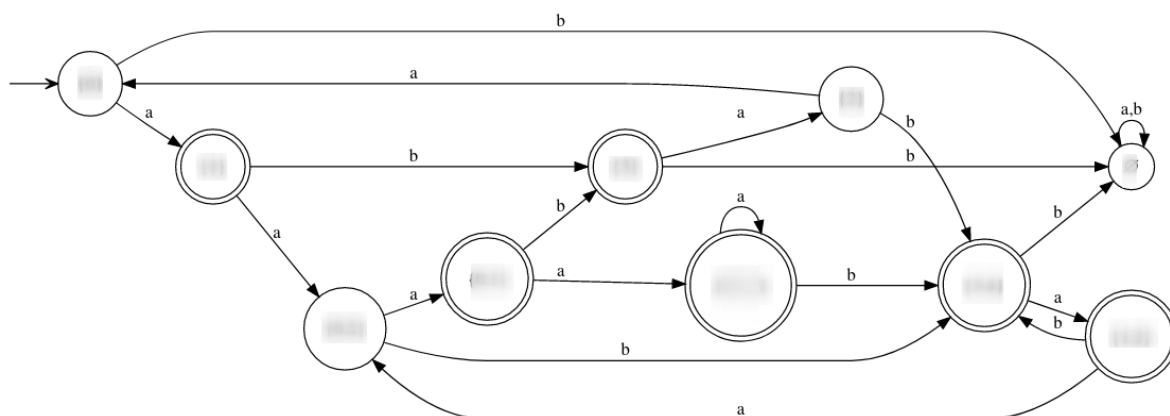


(-iii-)



(-iv-)

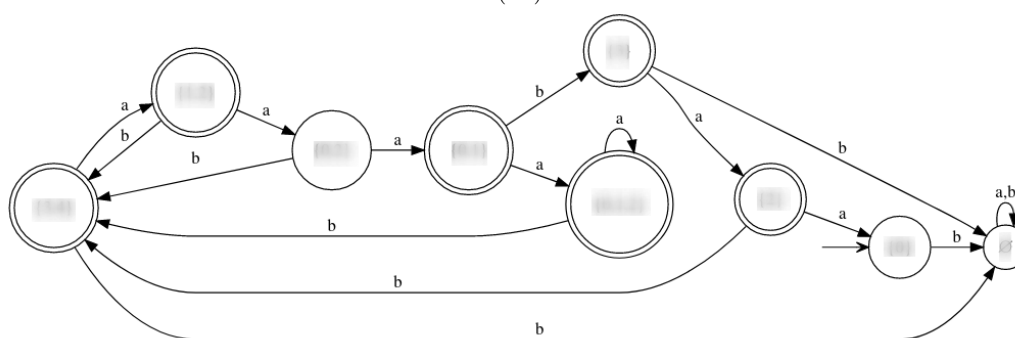
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



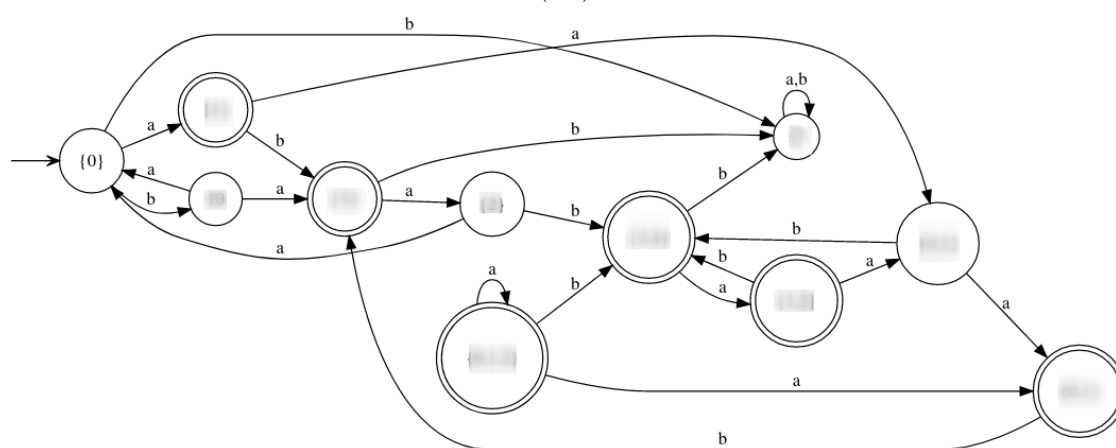
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d   g  i  k  m n

Question 3 : a b c d 

Question 4 :   c d e

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a b c d e   h i

Question 7 :  b  d  f   i j k

Question 8 : a b  d e    i j

Question 9 : a b  d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d e   h  j k l 

Question 12 :  b c d e f g h

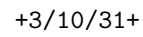
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot est une fonction.
☐ g Un mot peut être infini.	☐ Un mot peut être vide.
☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Un mot est une application.
☐ k Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$.	☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.	☐ c u est accepté par A .
☐ d Les états de A sont tous accessibles.	☐ e A est complet.	
☐ f A a des états accepteurs.		
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.		
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.		

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ A n'est pas complet. ☐ d A a au moins un état co-accessible.
- ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

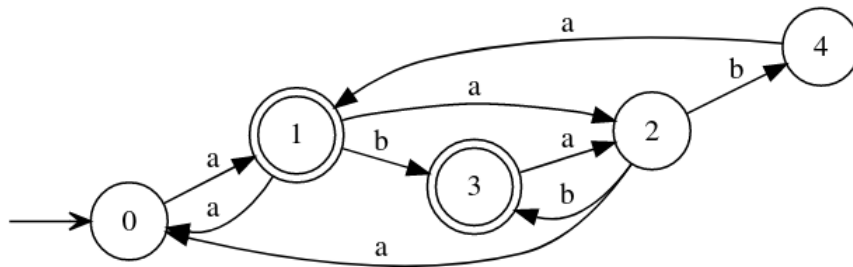
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

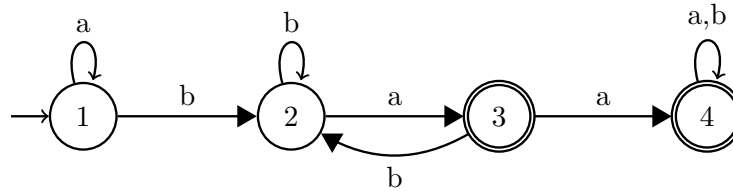
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

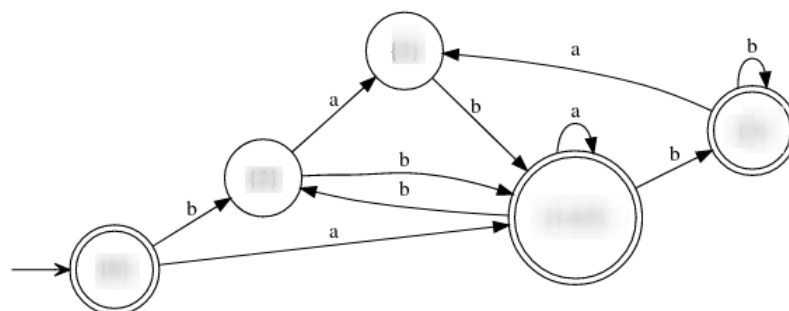
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 0 ☐ e 2 ☒ 4 ☐ g 6

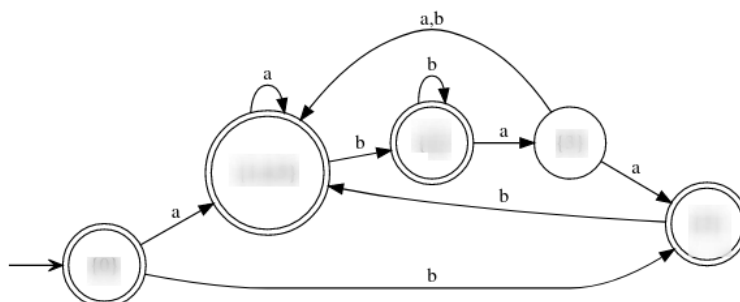
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

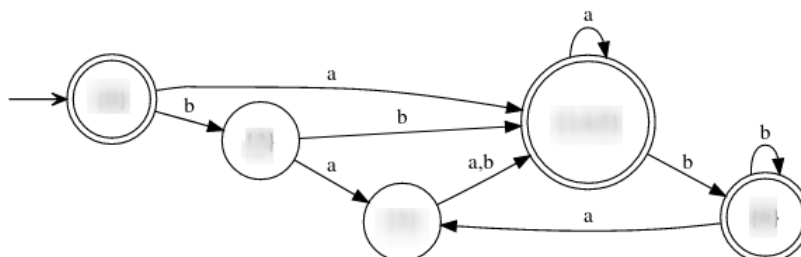
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



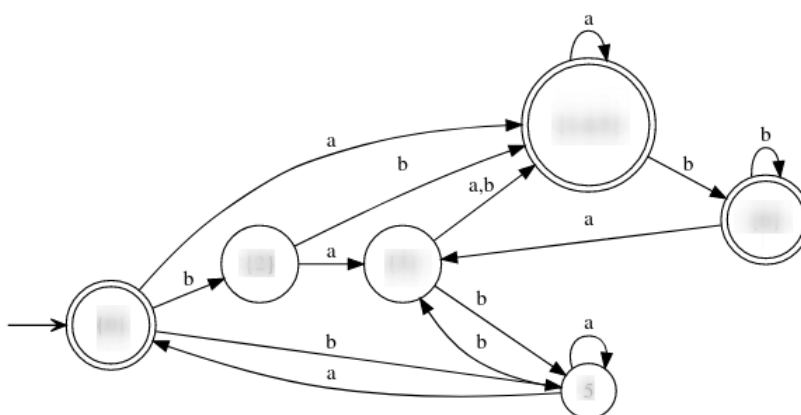
(-i-)



(-ii-)

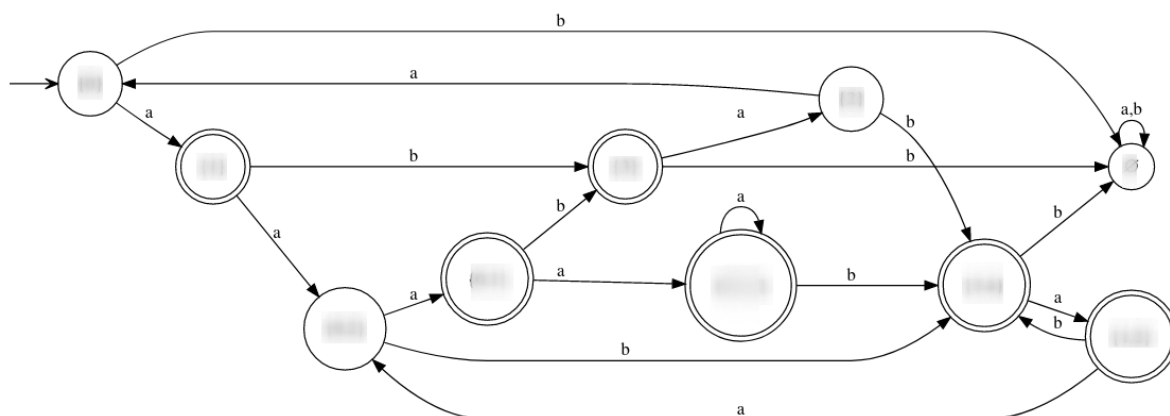


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



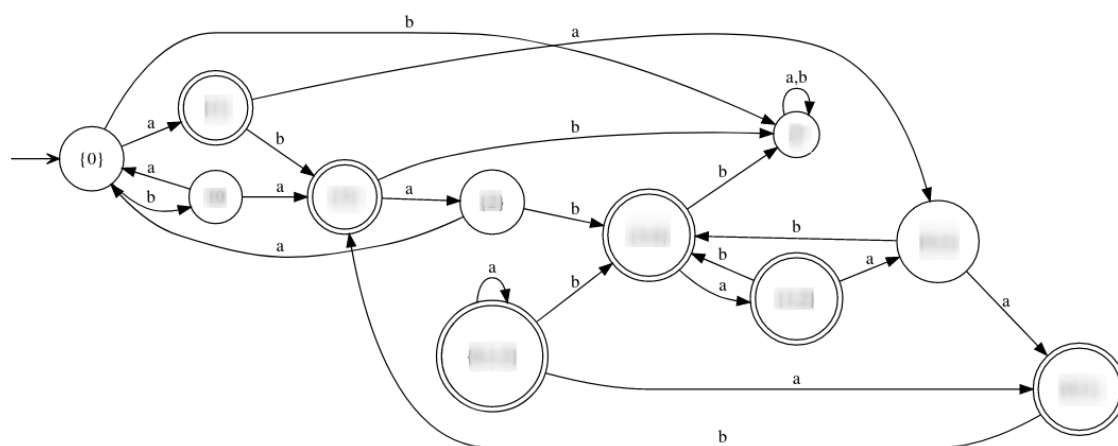
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

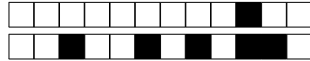


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d   g  i  k  m n

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a  c  e f g h i

Question 6 :  b  d e f   i j

Question 7 :  b  d e

Question 8 :    d e  g h  j k

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c d  f g  i   l m

Question 12 : a  c d e f g h

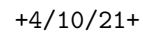
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.
☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ j	$X_4 = a + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a+b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

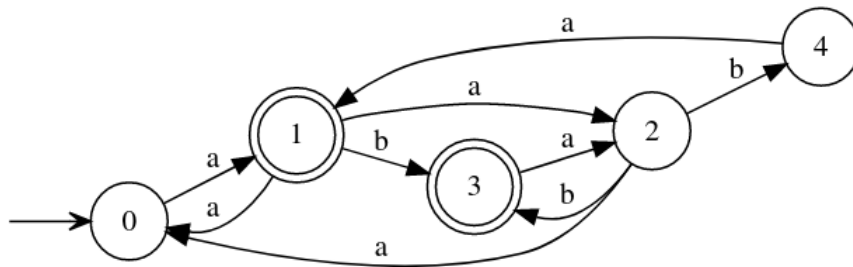
☐ a	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

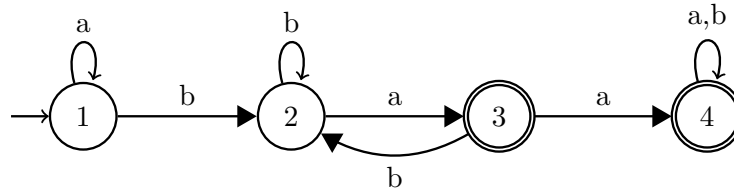
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

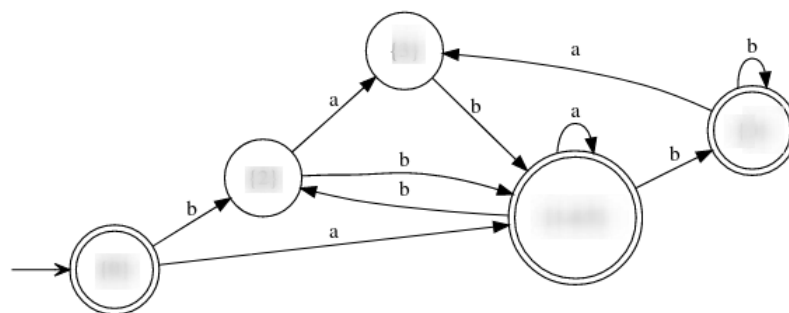
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 0 ☐ c 1 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 2 ☒ 4

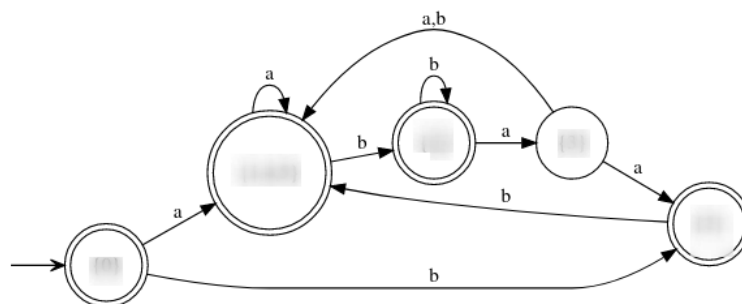
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

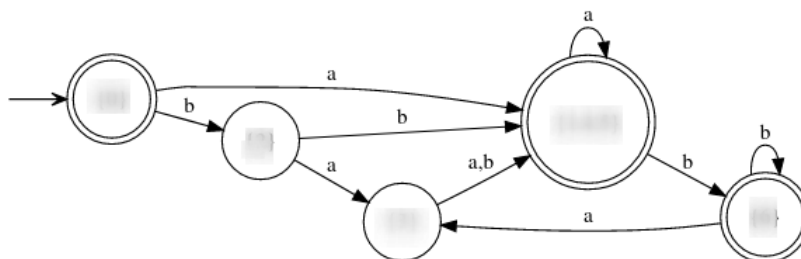
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



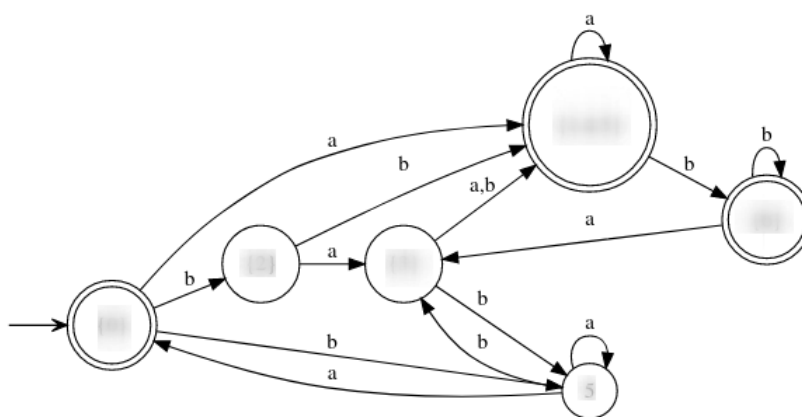
(-i-)



(-ii-)

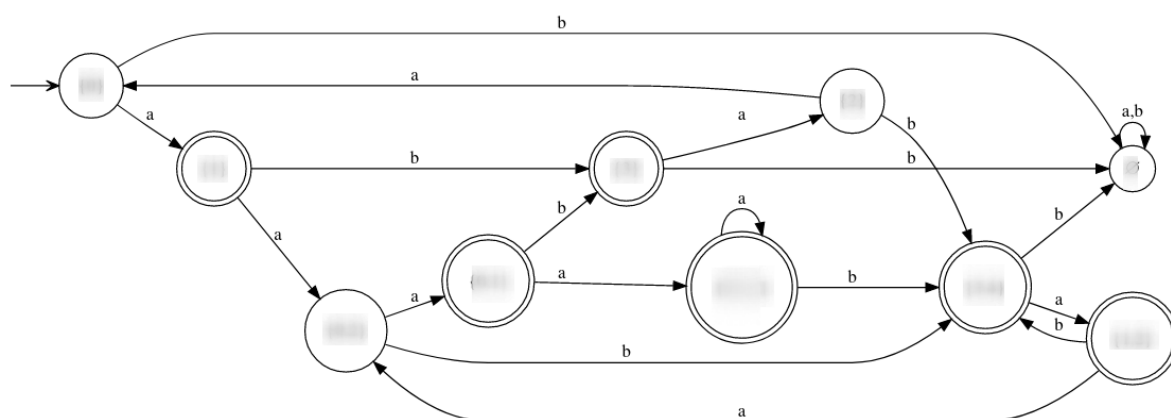


(-iii-)

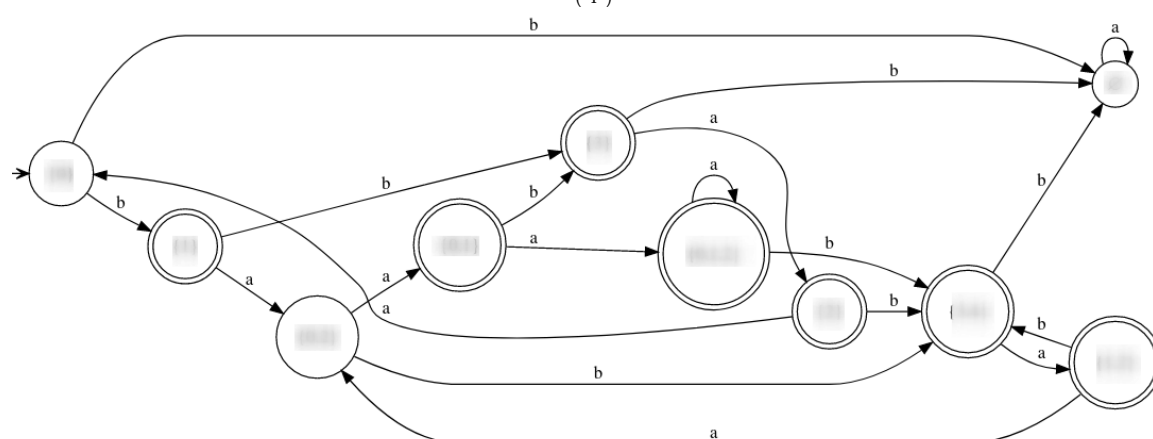


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

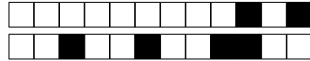


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c  e f g h i

Question 3 : a b c d 

Question 4 :   c  e     j k  m n

Question 5 :   c d   g h i j

Question 6 : a b     h i j k

Question 7 :   c d e

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c  e  g  i j k l 

Question 12 : a b c  e f g h

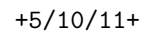
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d A accepte le langage universel.
☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une fonction.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

- ☐ i Un mot peut être infini. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ A a au moins un état accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

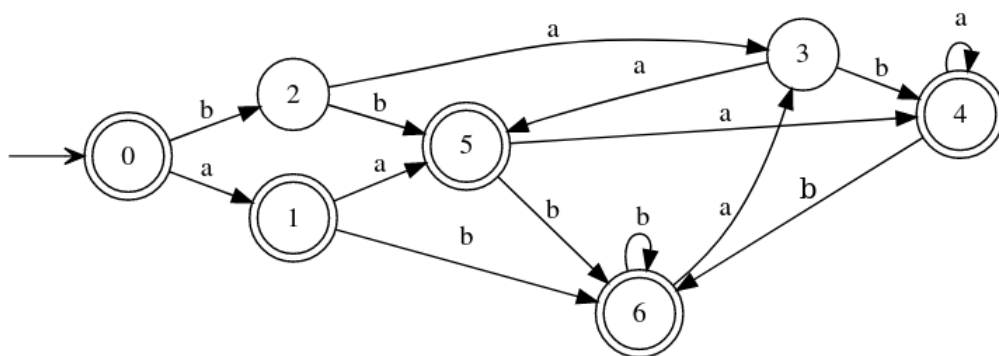
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

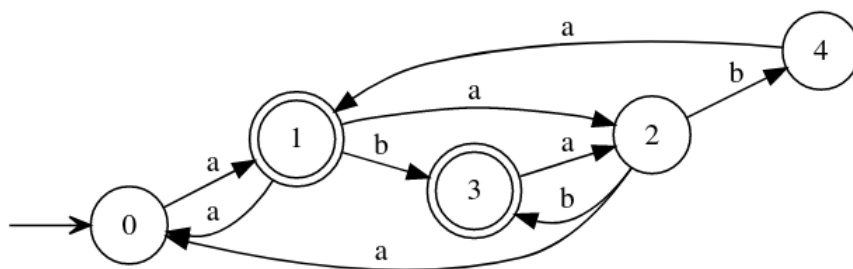
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

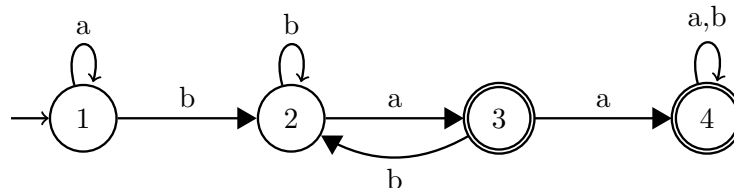
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

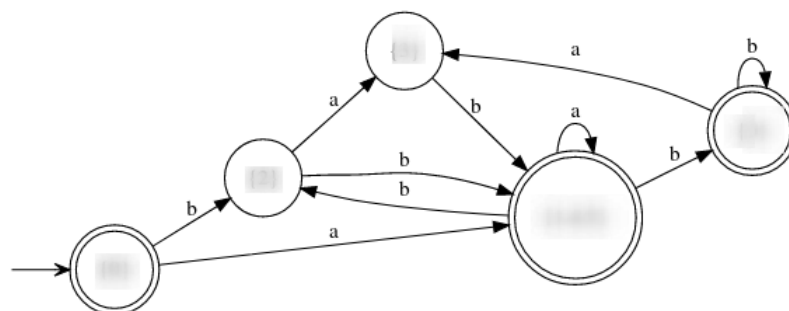
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 2 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 0 ☐ g 6

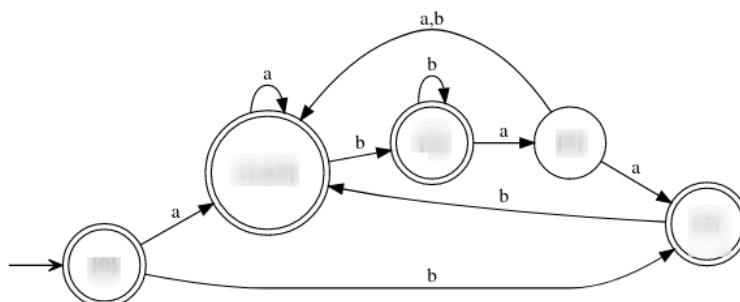
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

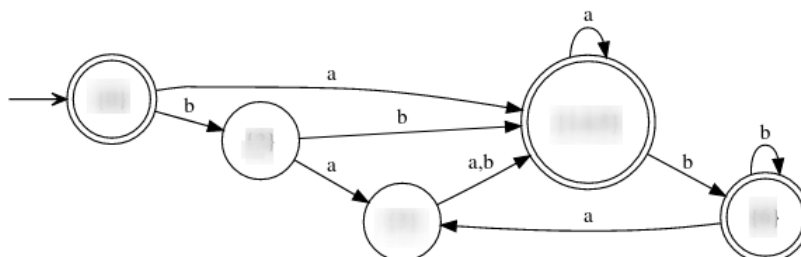
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



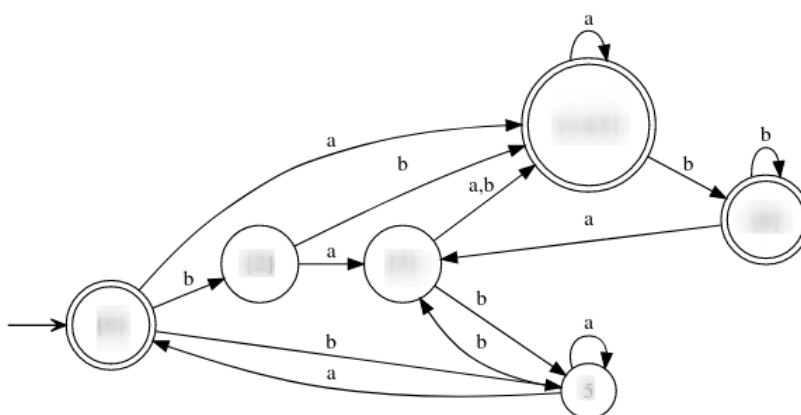
(-i-)



(-ii-)

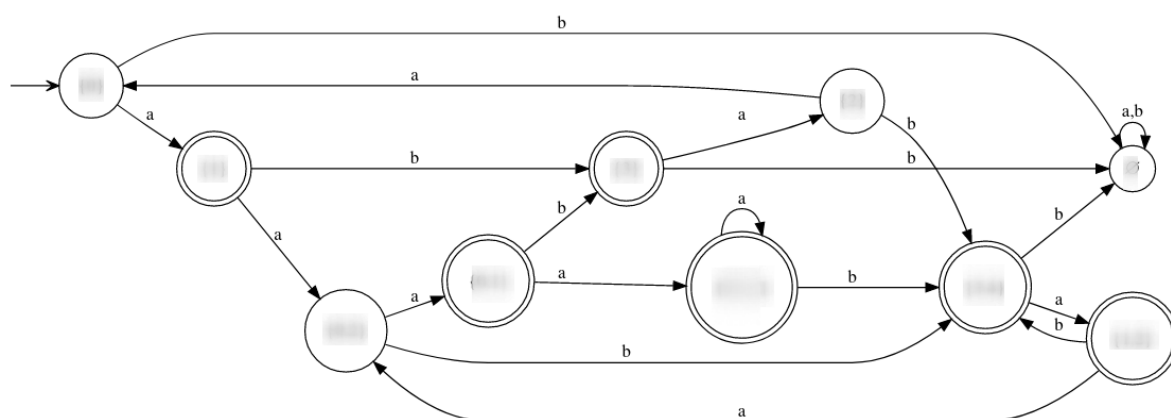


(-iii-)

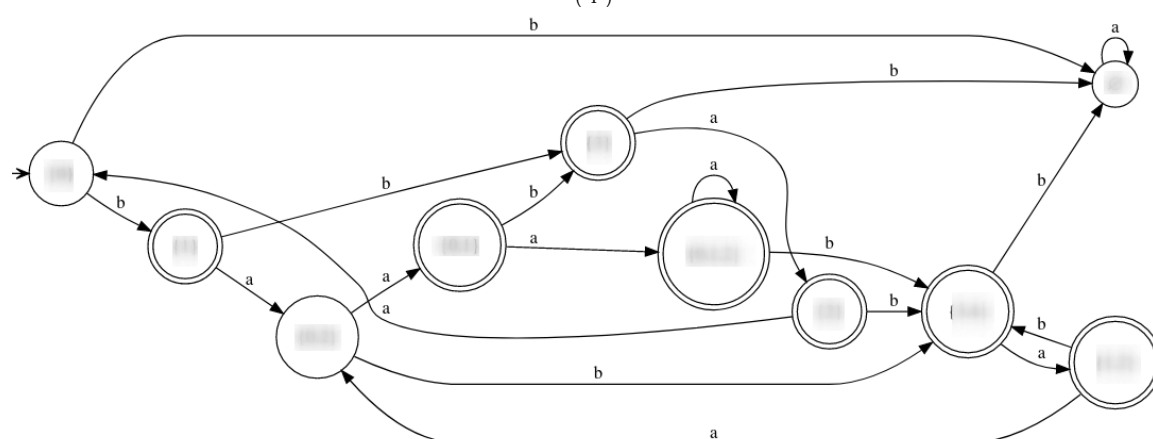


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

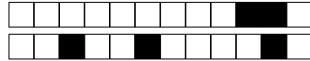


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d				h	i	j

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 5 :

a		c						i		k		m	n

Question 6 :

	b	c	d			g			j	k

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c		e		g	h	i	j		l	

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

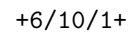
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application.
 ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet.
 ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ A a des états accepteurs.
 ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ u est accepté par A .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
 ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par préfixe.
 ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

- ☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c A possède un état puits ☐ d A accepte le langage universel.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c A a au moins un état non accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ A n'est pas complet.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii- ☐ b la Figure 3-ii- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv- ☐ d la Figure 3-i-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv- ☐ b la Figure 4-iii- ☐ c la Figure 4-ii- ☒ la Figure 4-i-

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$ ☐ $X_1 = aX_1 + b$ ☐ $X_4 = (a + b)X_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = a + b$ ☐ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ $X_1 = a^*b$ ☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ $X_1 = a^+bX_2$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*aX_3$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

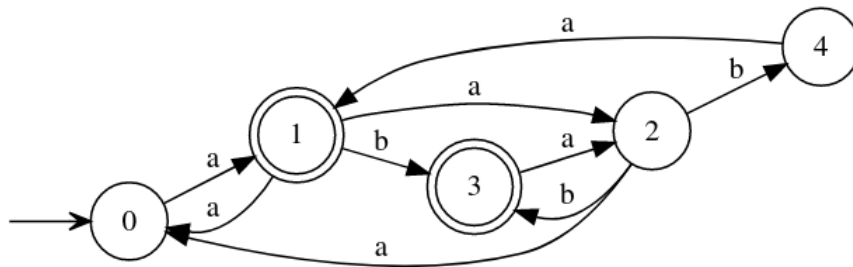
- ☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

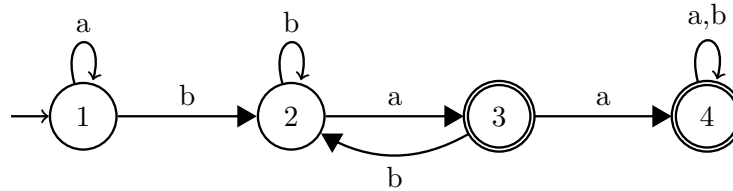
- ☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$ ☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

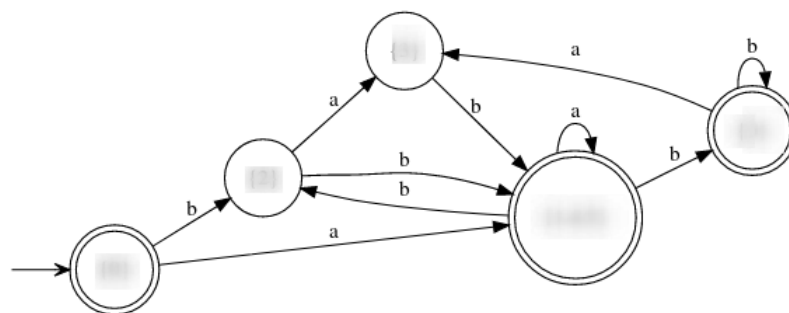
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 0 ☐ c 1 ☐ d 6 ☐ e 2 ☐ f 5 ☒ 4

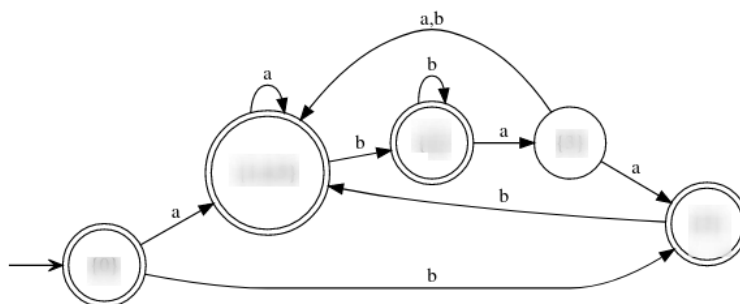
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

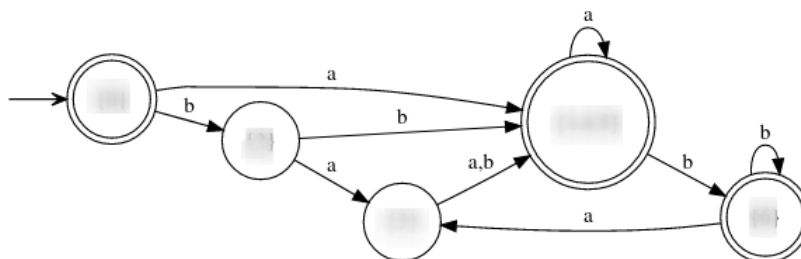
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



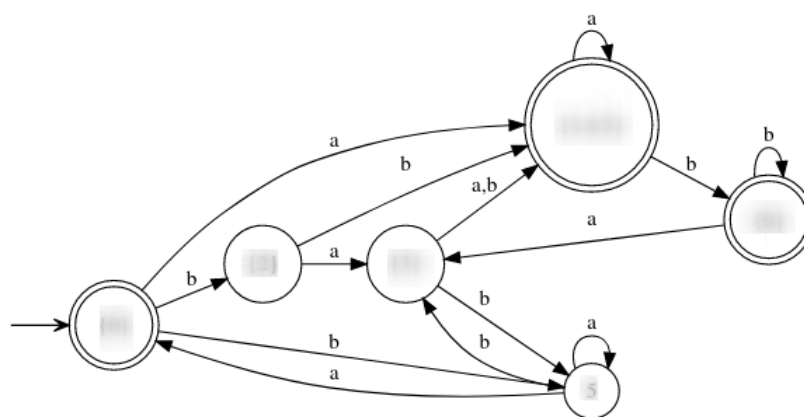
(-i-)



(-ii-)

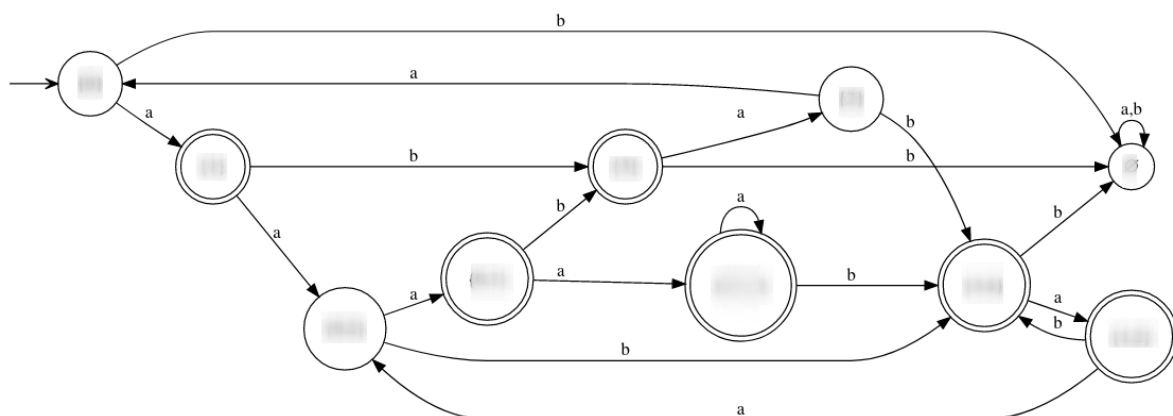


(-iii-)

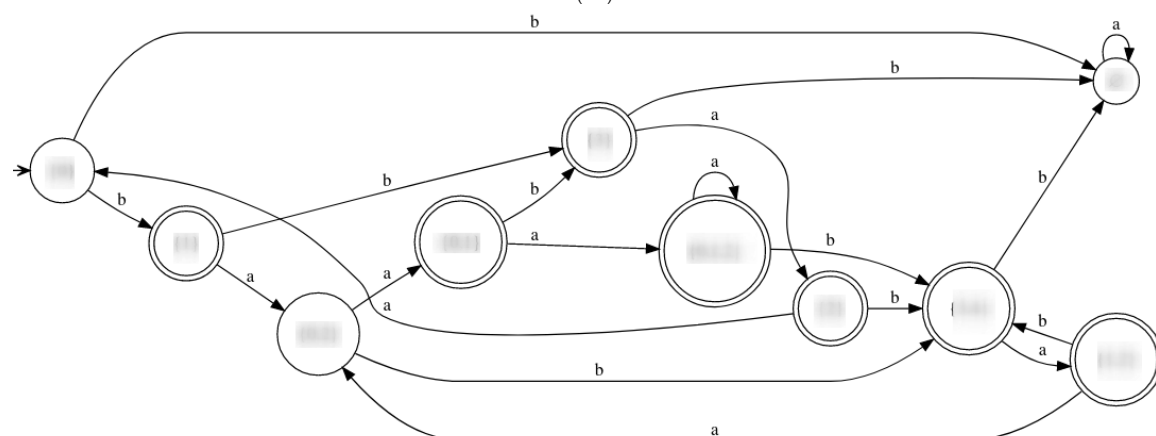


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



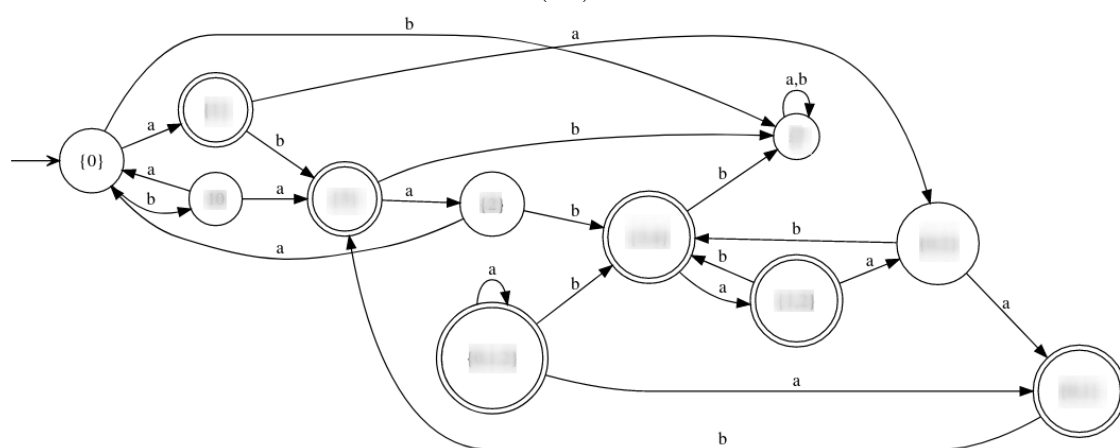
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d  f g  i   m n

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :  b  d e

Question 5 :   c d  f g  i j

Question 6 : a b c d 

Question 7 :  b c d  f g h i

Question 8 : a b c    g   j k

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 :  b c d e f   i j  l m

Question 12 : a b c d e  g h

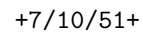
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. A single solid line runs horizontally across the top of the page, serving as a baseline or margin. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☒ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e A possède un état puits
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ b P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ b A n'est pas complet.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☒ d A a au moins un état accessible.

- ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ u n'est pas accepté par A . ☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A est complet.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une application. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ Un mot peut être vide. ☐ f Un mot peut être infini. ☒ Un mot est une fonction.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

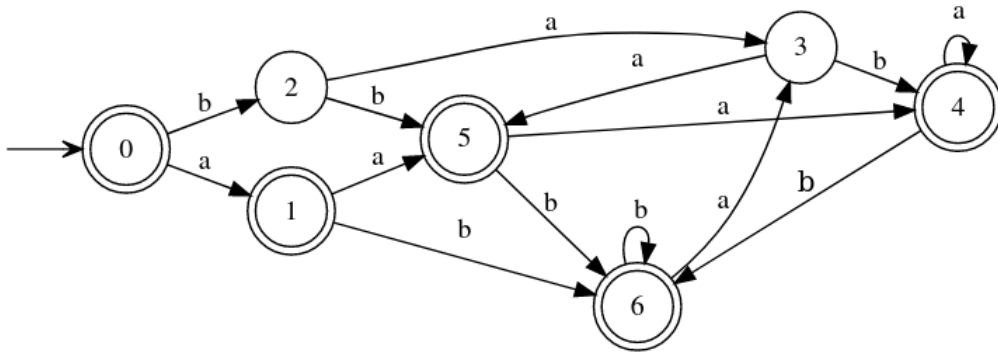
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

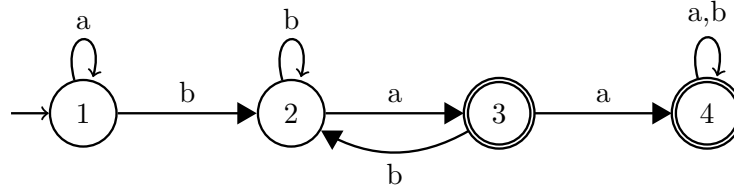
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

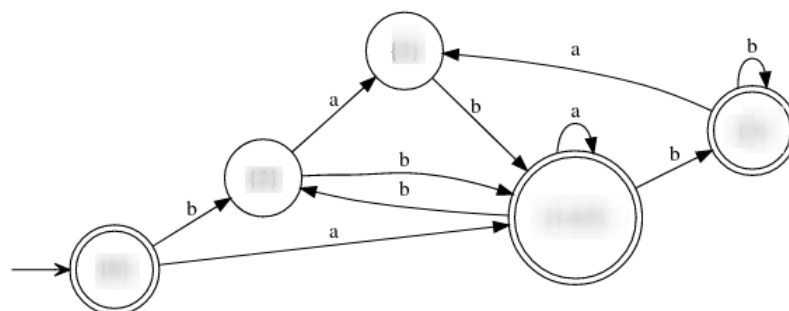
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 3 ☒ 4

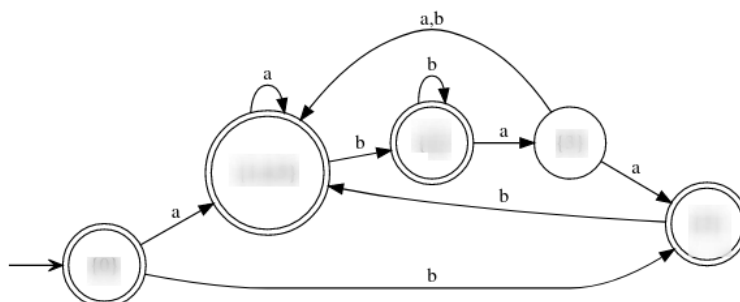
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

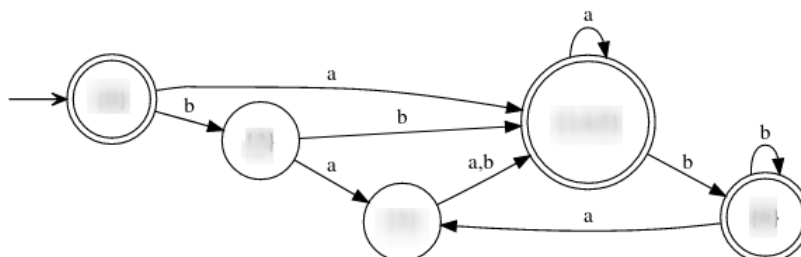
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



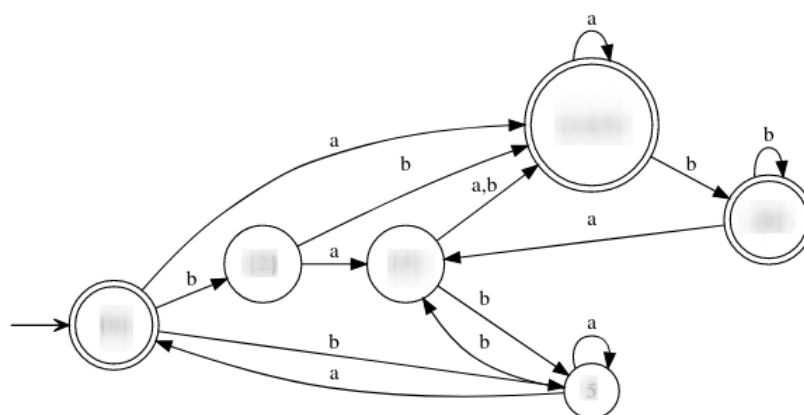
(-i-)



(-ii-)

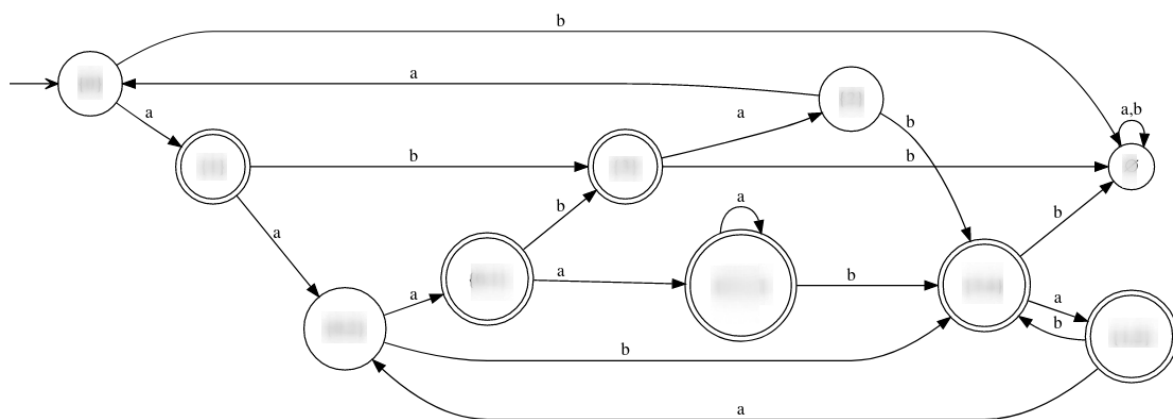


(-iii-)

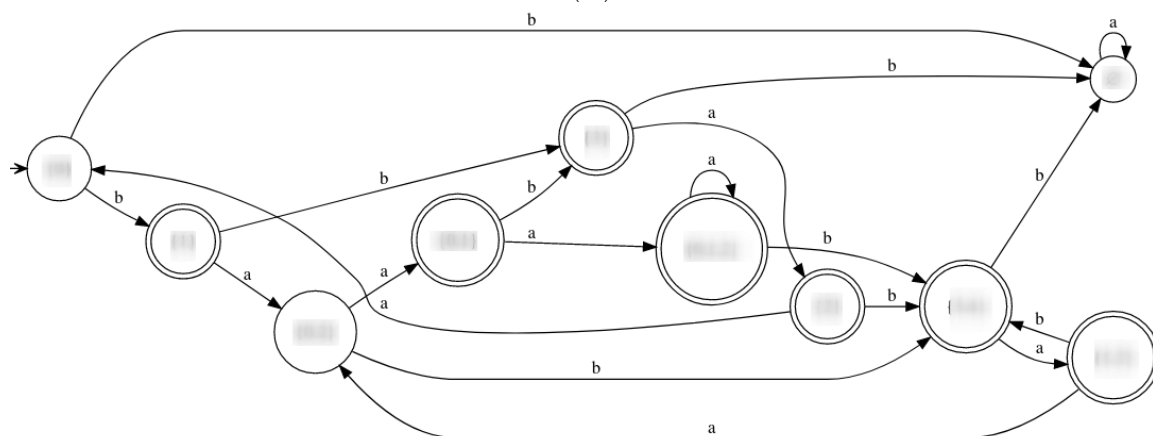


(-iv-)

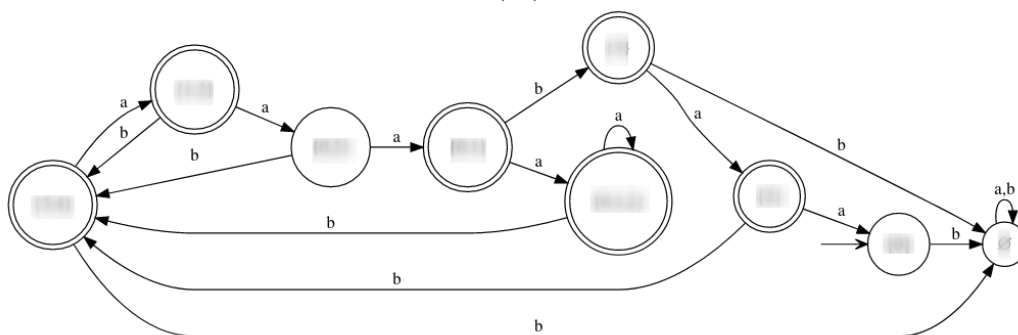
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



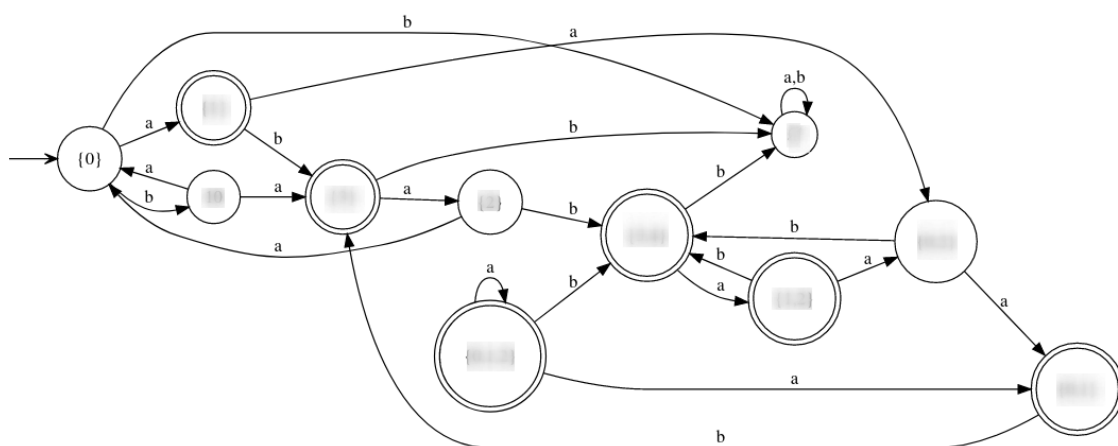
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a		c		e			h		j	k

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a		c	d				h	i	j

Question 8 :

					f				j	k	l	m	n

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

	b	c	d			g		i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

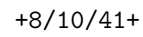
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par suffixe.	☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur.	☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ est fermé par facteur.	☐ Σ est fermé par préfixe.
	☐ Σ^* est fermé par préfixe.
	☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut être vide.	☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application.	☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot est une fonction.	☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe.	☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ f A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☒ A n'est pas complet. ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c A est complet.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ d A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_4 = a + b$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

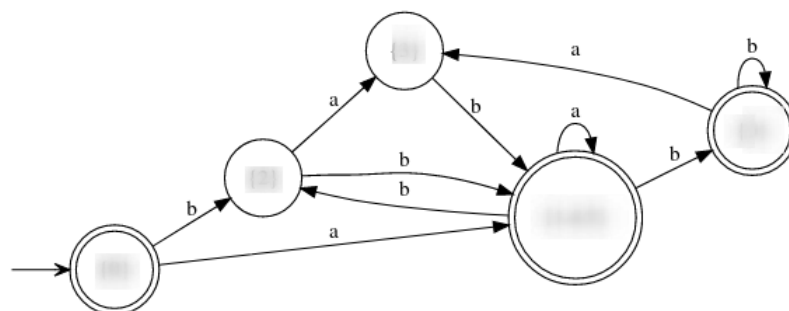
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 0 ☒ 4

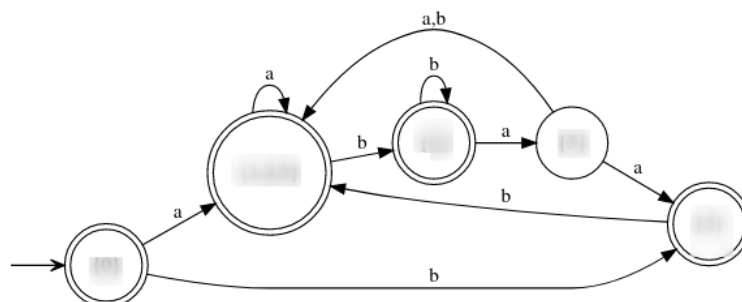
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

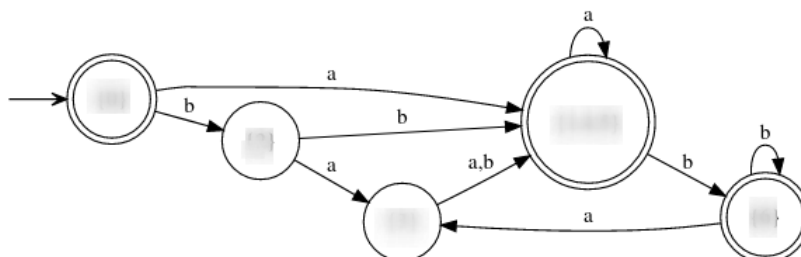
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



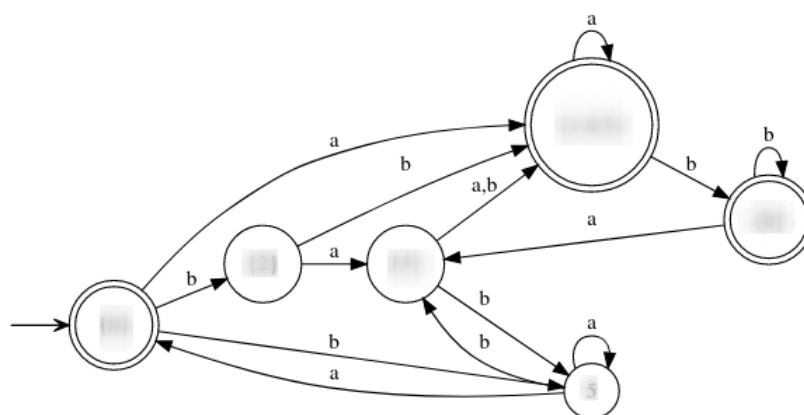
(-i-)



(-ii-)

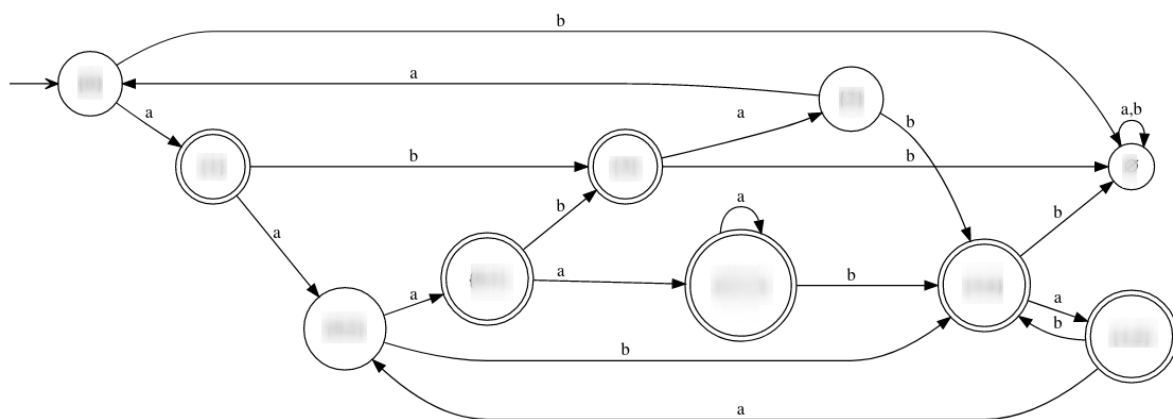


(-iii-)

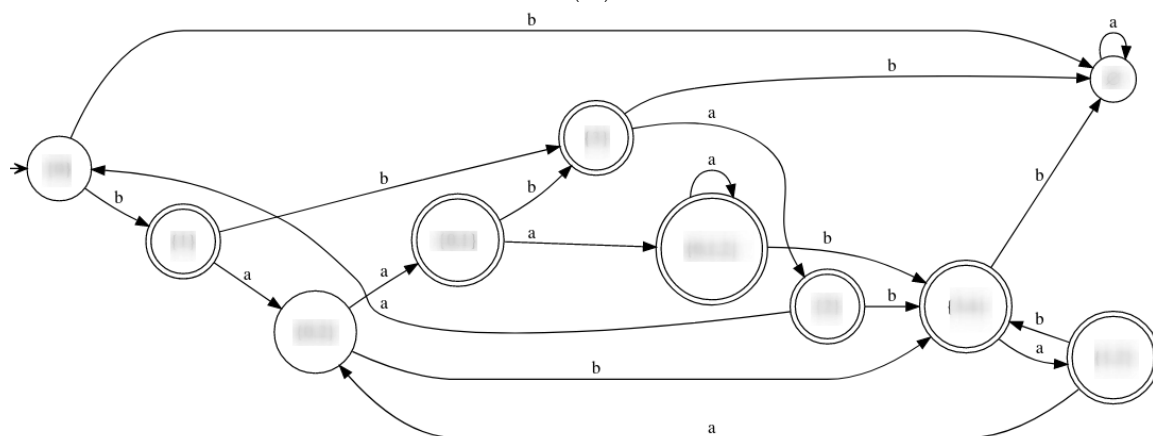


(-iv-)

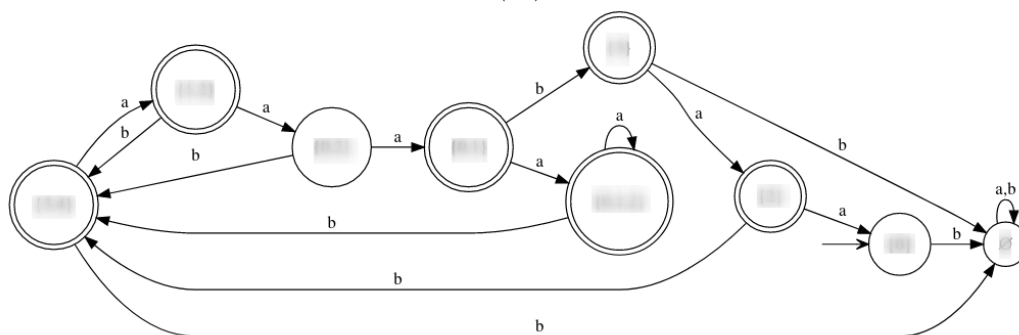
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



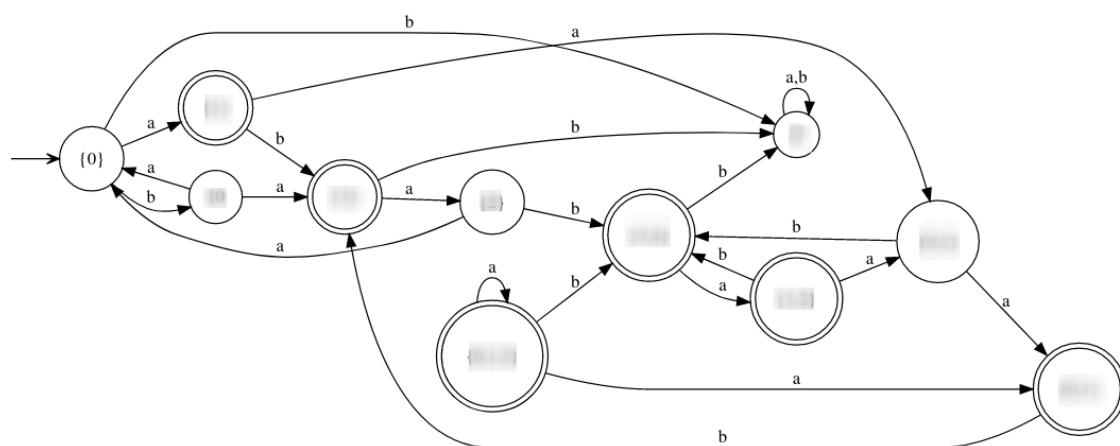
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f  h i j

Question 3 :     f g   j k  m n

Question 4 :  b  d e

Question 5 : a  c   f g   j k

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a b c d   g h i

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c   f g h  j k l 

Question 12 : a  c d e f g h

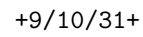
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles. ☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ c A possède un état puits ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f A accepte le langage universel. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ d A n'a pas d'état accepteur. ☐ e A a au moins un état non accessible.
☐ f A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.

- ☐ h A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
- ☐ i Un mot peut être infini. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

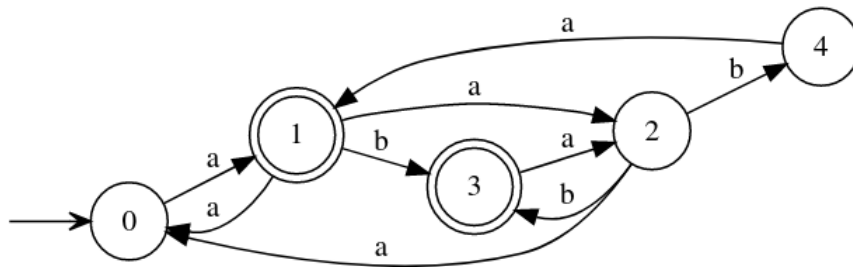
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

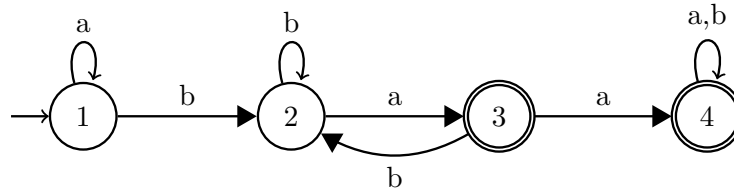
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 0 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

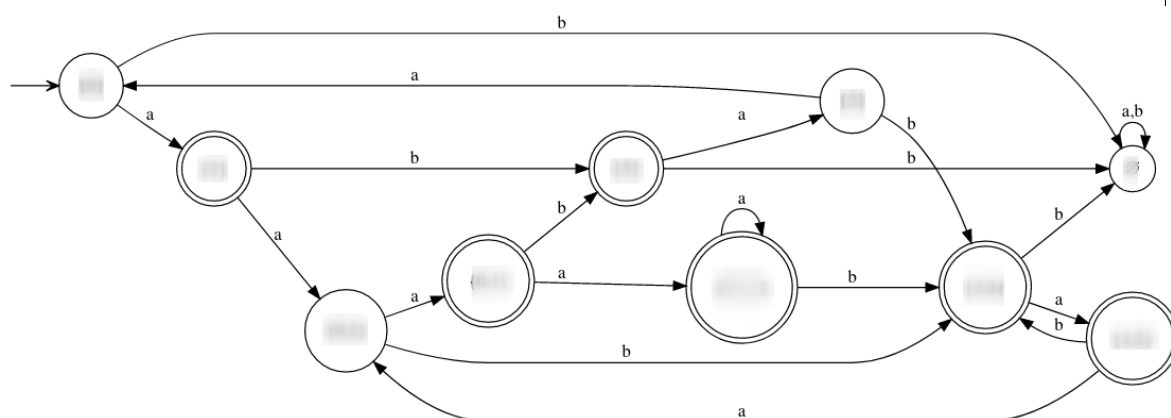


(-iii-)

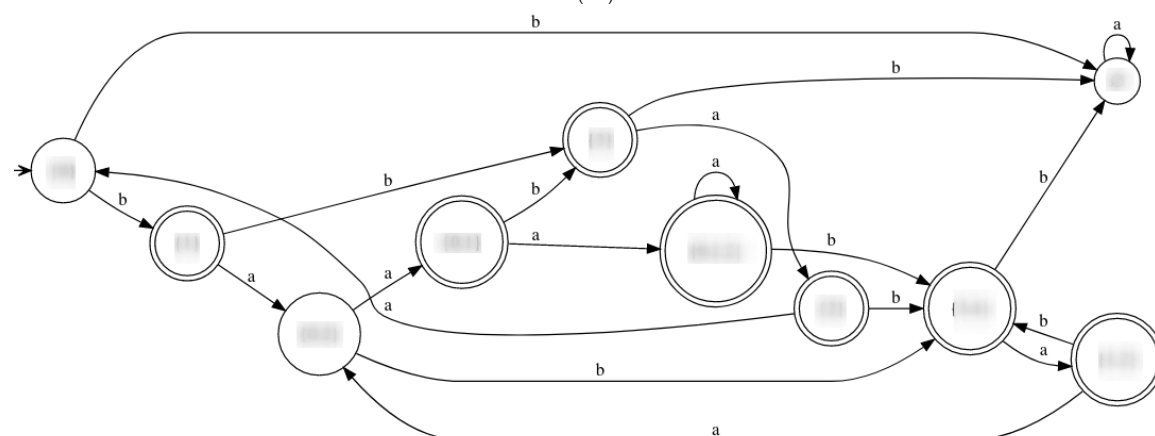


(-iv-)

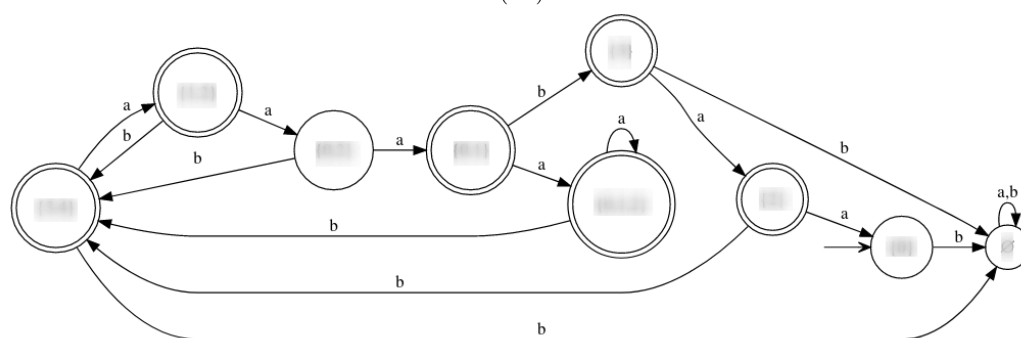
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

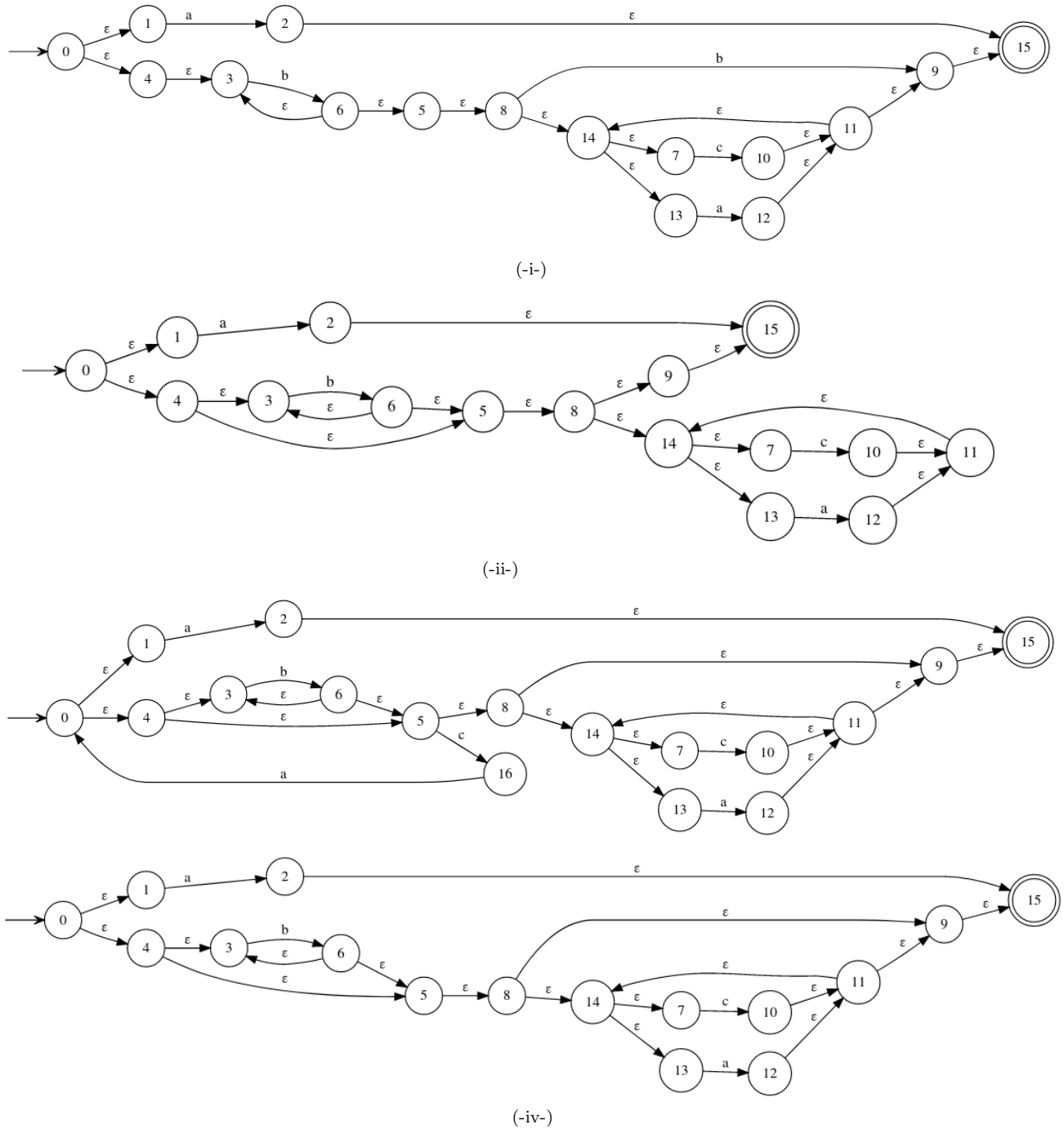
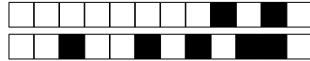


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c  e f g  i j

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :   c d e f g h i

Question 5 :    d e f  h  j k

Question 6 :  b       i  k l m n

Question 7 :   c d e

Question 8 : a b c d 

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 :  b c d e   h i j k l 

Question 12 : a b  d e f g h

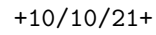
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a a au moins un état accessible. ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ u $\notin \mathcal{L}(A)$.
☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d A est complet. ☐ e u est accepté par A . ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Un mot est une fonction. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ i Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Un mot est une application. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

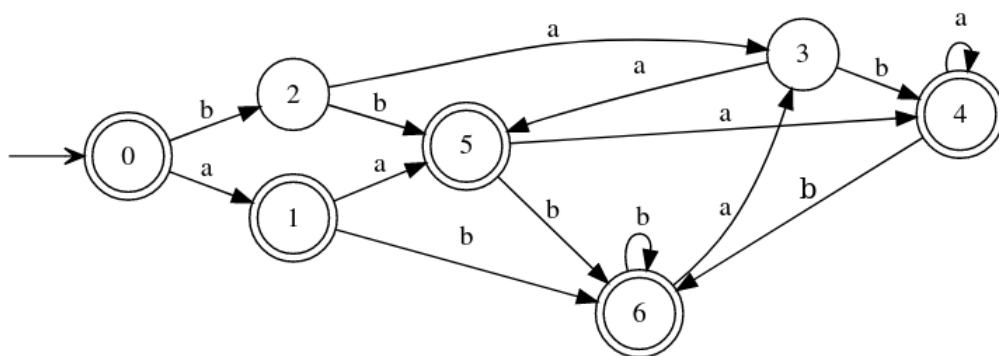
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

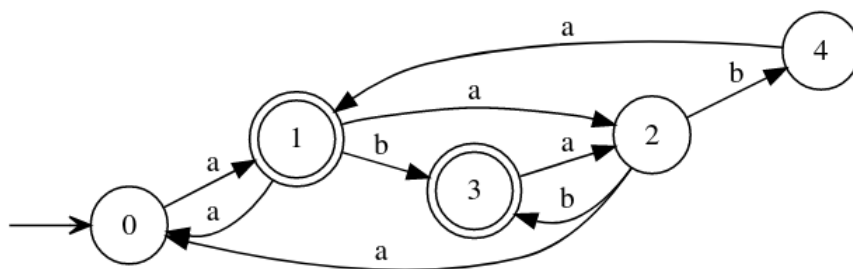
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

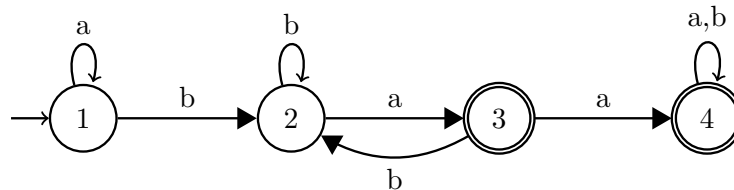
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ 4 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 5 ☐ f 0 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

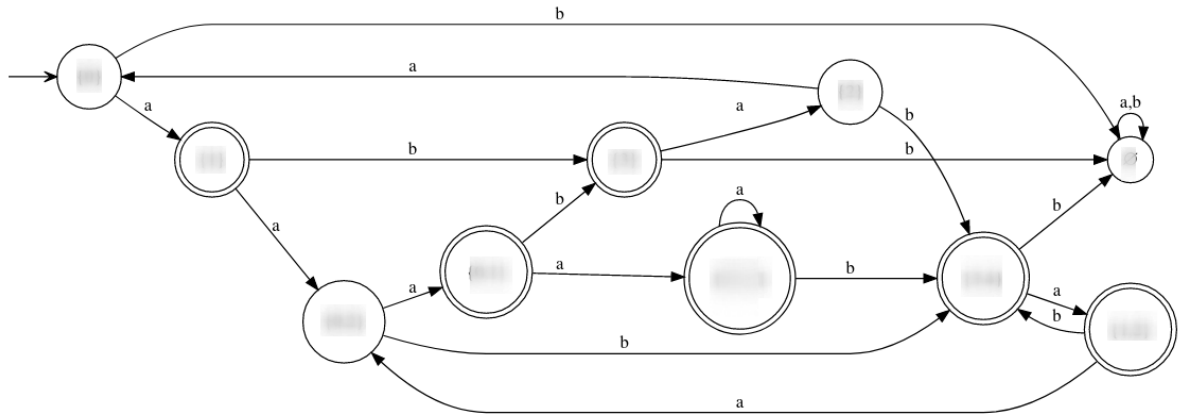


(-iii-)

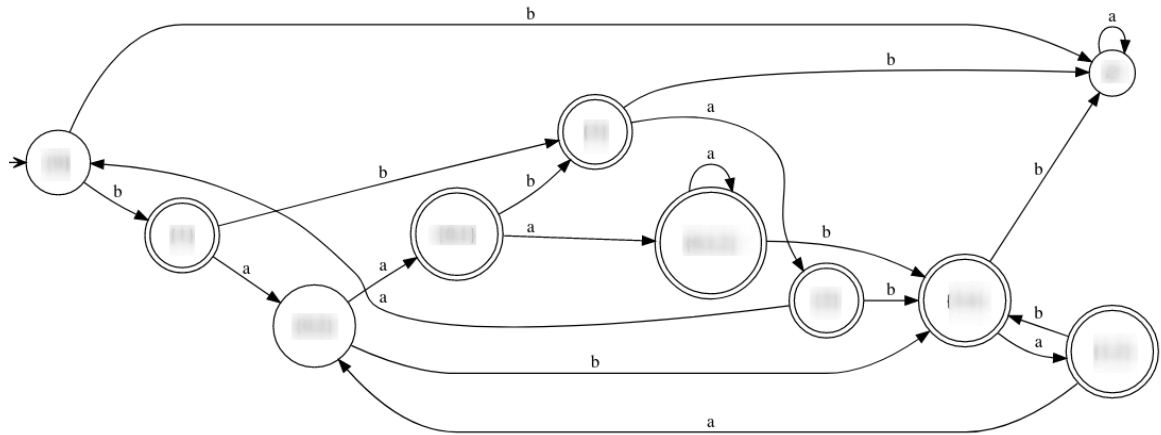


(-iv-)

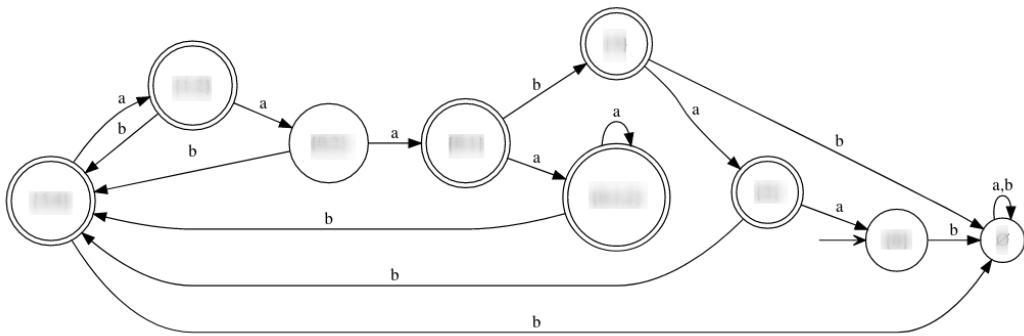
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



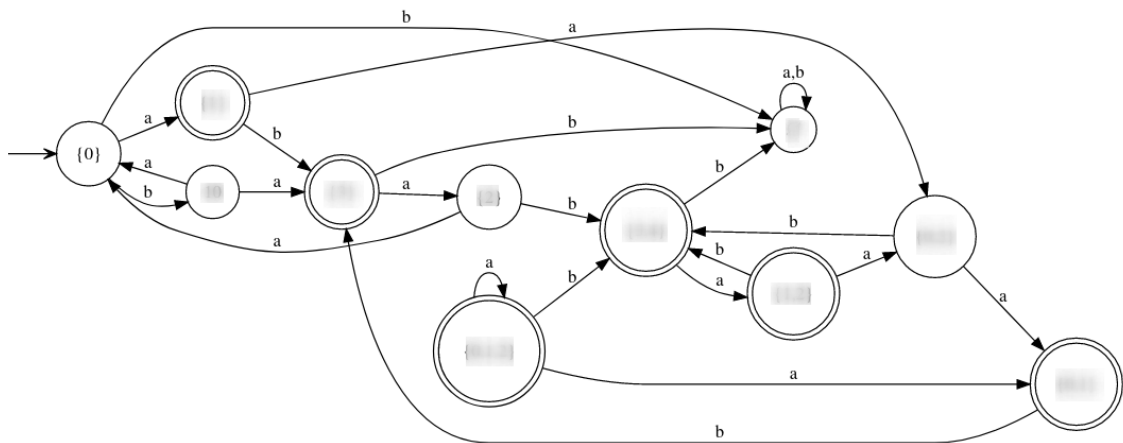
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

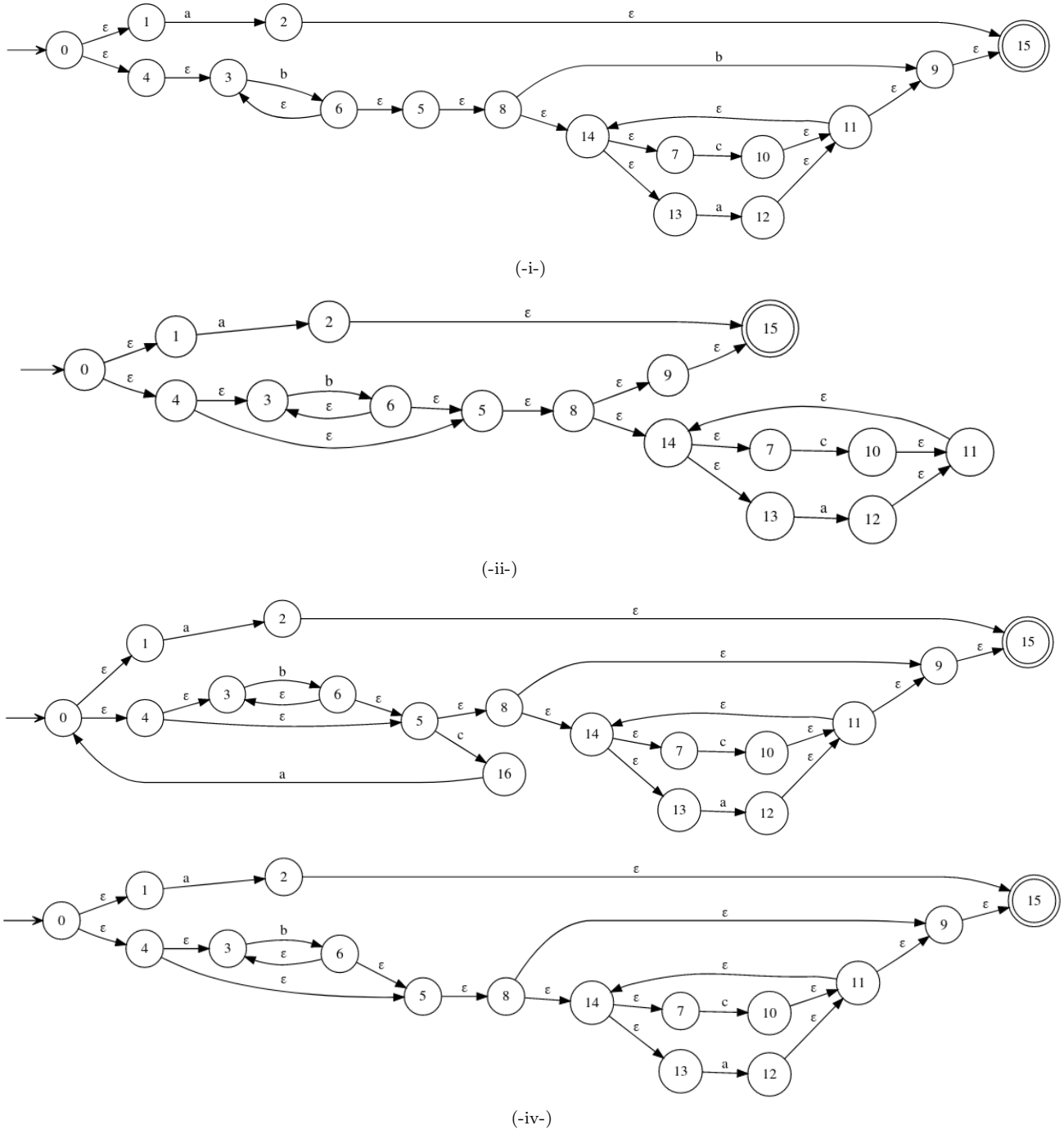
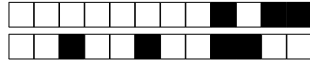


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c   g  i j k

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :  b  d e

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a   d e   h i j

Question 7 : a b c  e  g h i

Question 8 :    d  f   i   l m n

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a  c d  f g  i j k  m

Question 12 : a  c d e f g h

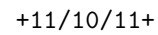
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'est pas complet.
- ☐ b $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☐ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ e A a au moins un état accessible.
- ☐ f u n'est pas accepté par A .
- ☐ g A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ i A a au moins un état non accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ b Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut être vide.
- ☐ f Un mot est une fonction.
- ☐ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ i Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot est une application.
- ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ A possède un état puits ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ A est complet.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d'ε-AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l'ε-AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

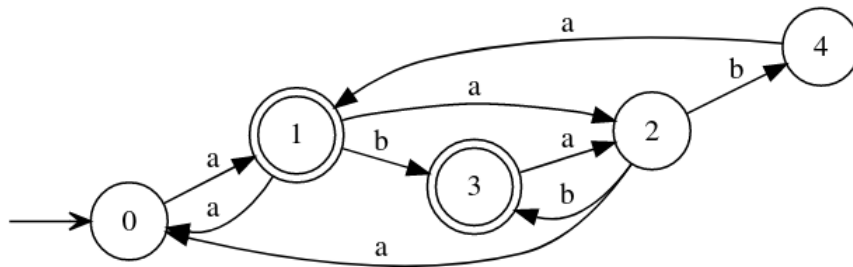
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

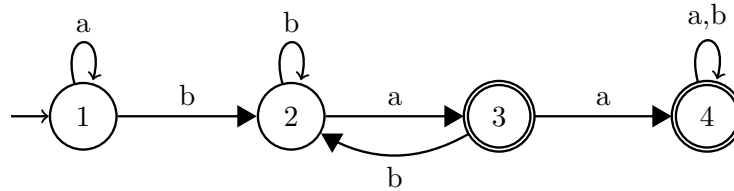
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 0 ☐ f 2 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

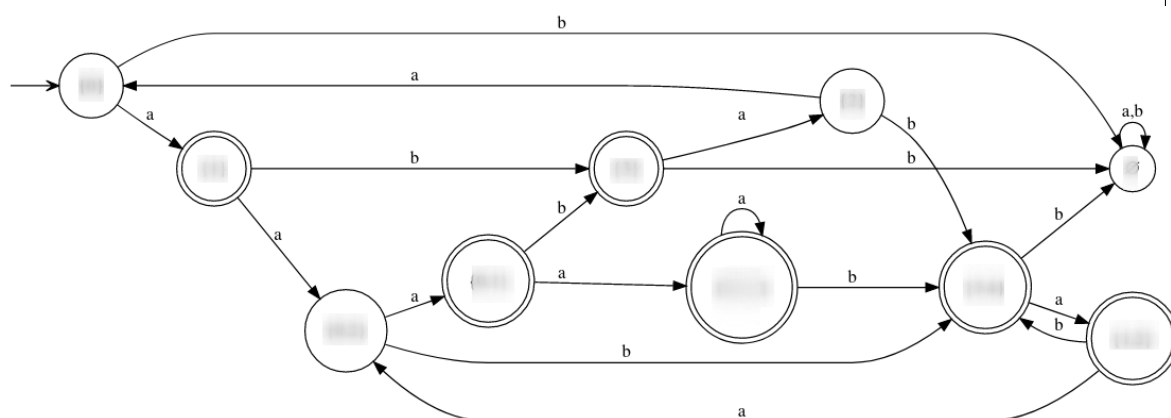


(-iii-)

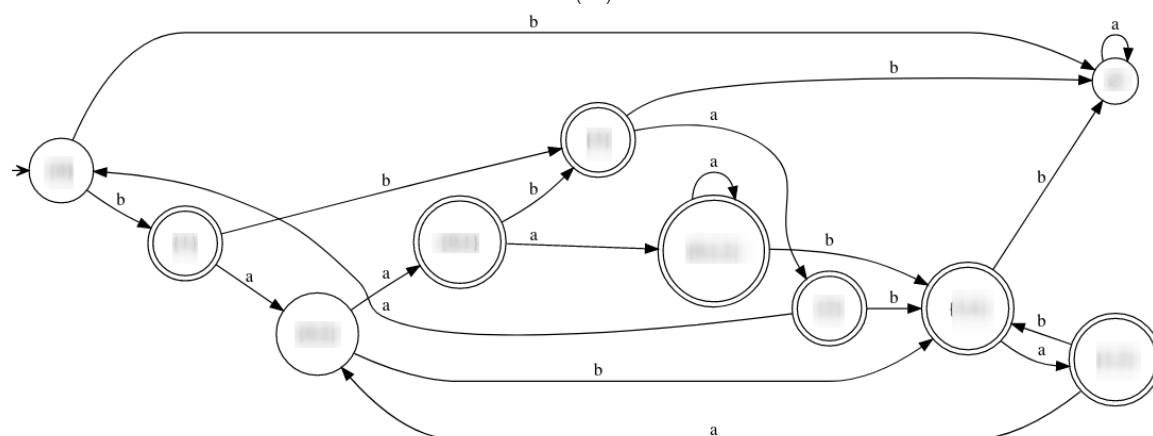


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

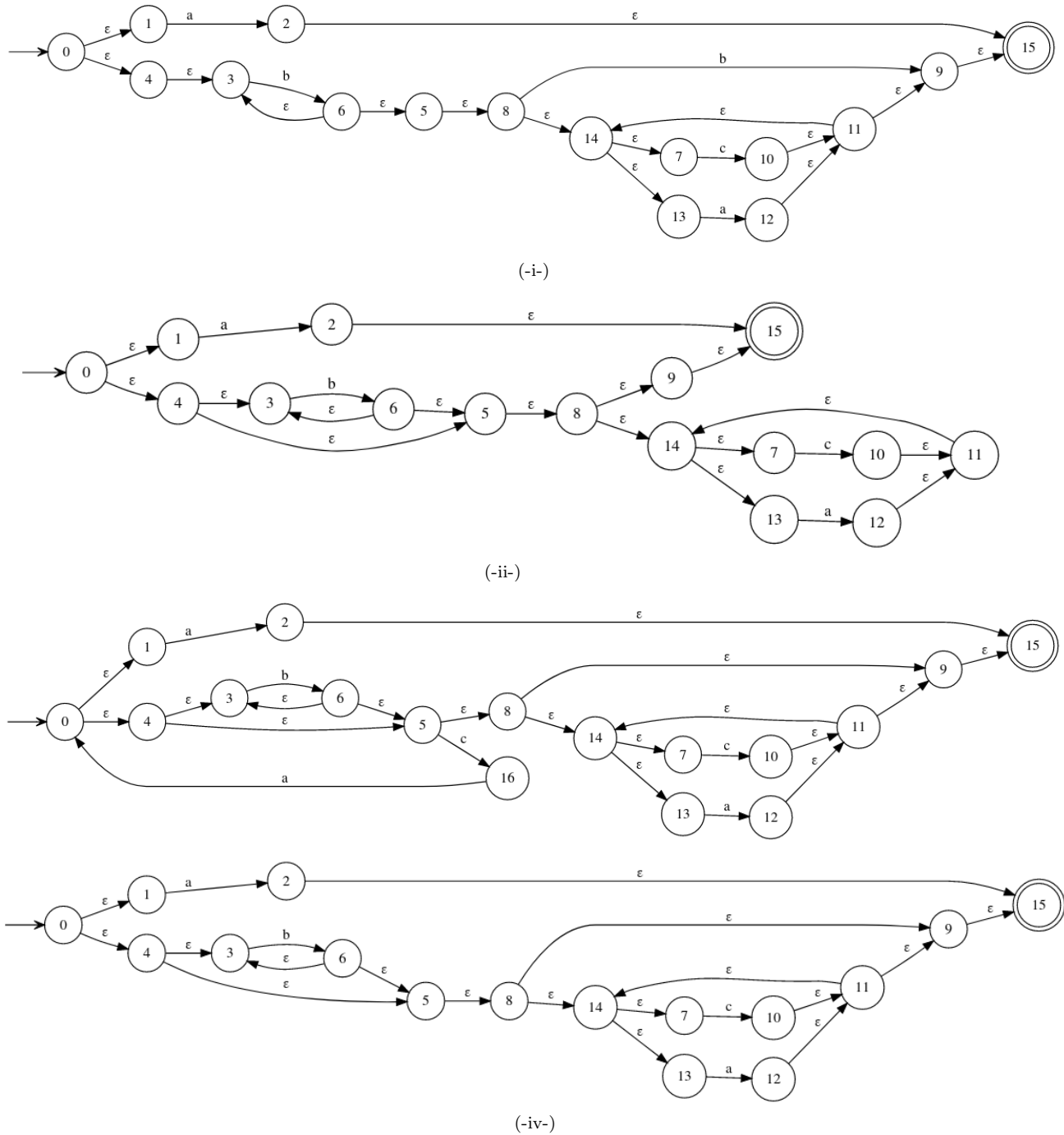
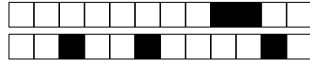


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c				g	h	i	j	k

Question 4 :

		c					h		j		l	m	n

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

a	b		d	e		g	h	i

Question 7 :

	b		d	e		g		i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a		c		e	f	g	h	i	j	k		

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

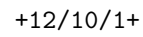
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
 ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ A possède un état puits
 ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Un mot est une fonction.
 ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ A a au moins un état accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ A a des états accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 6

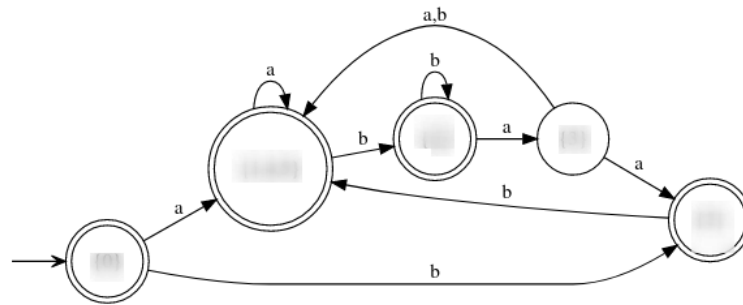
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

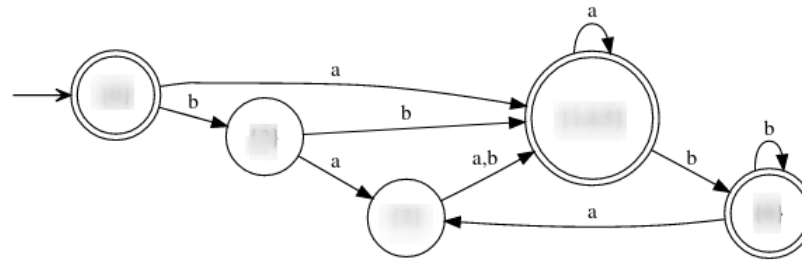
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



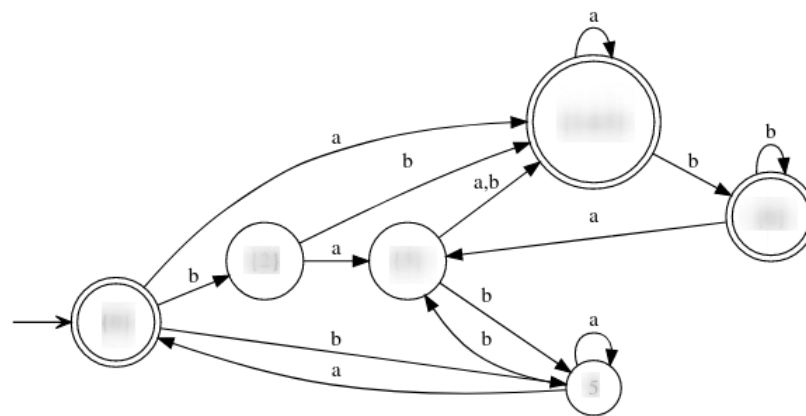
(-i-)



(-ii-)

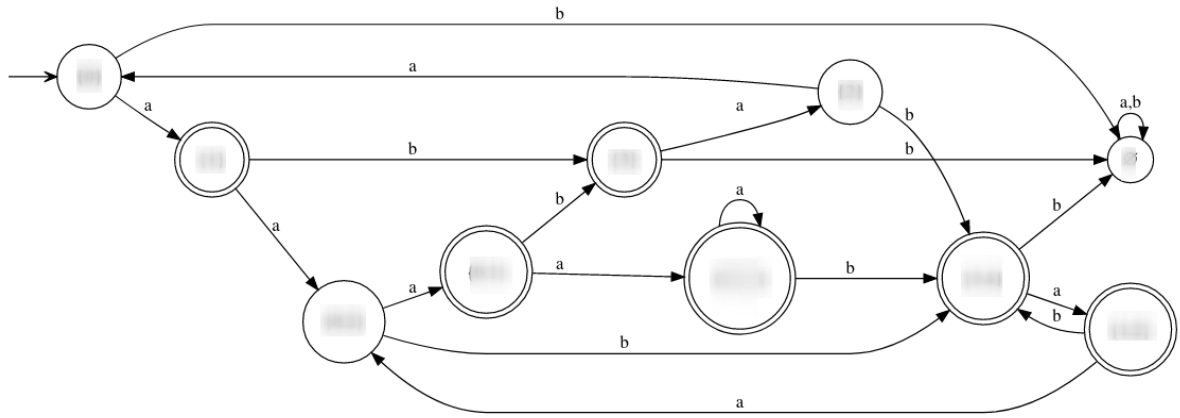


(-iii-)

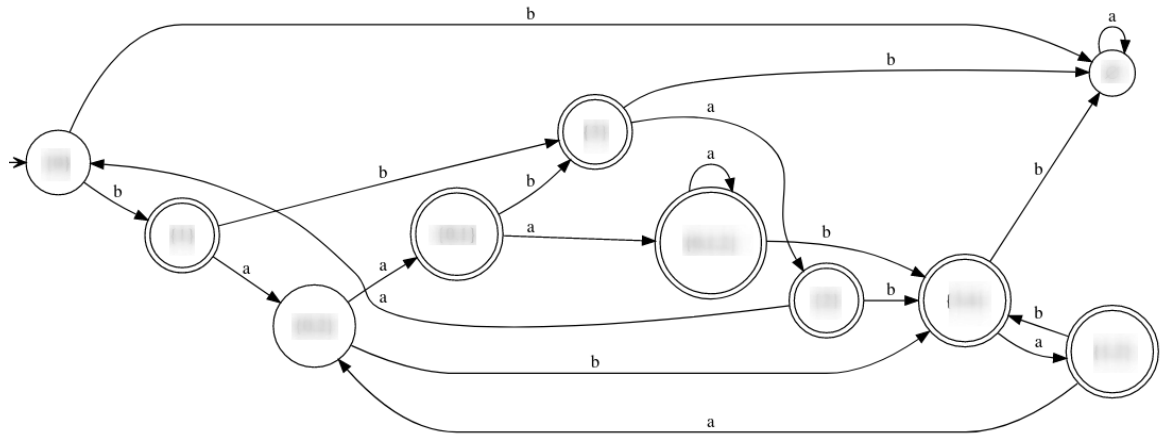


(-iv-)

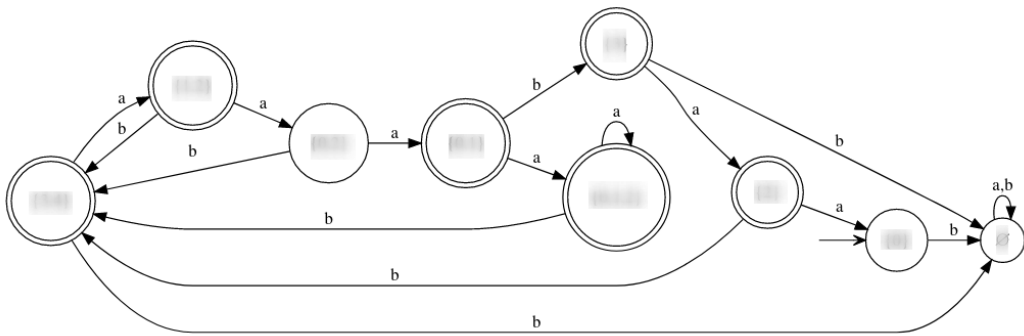
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



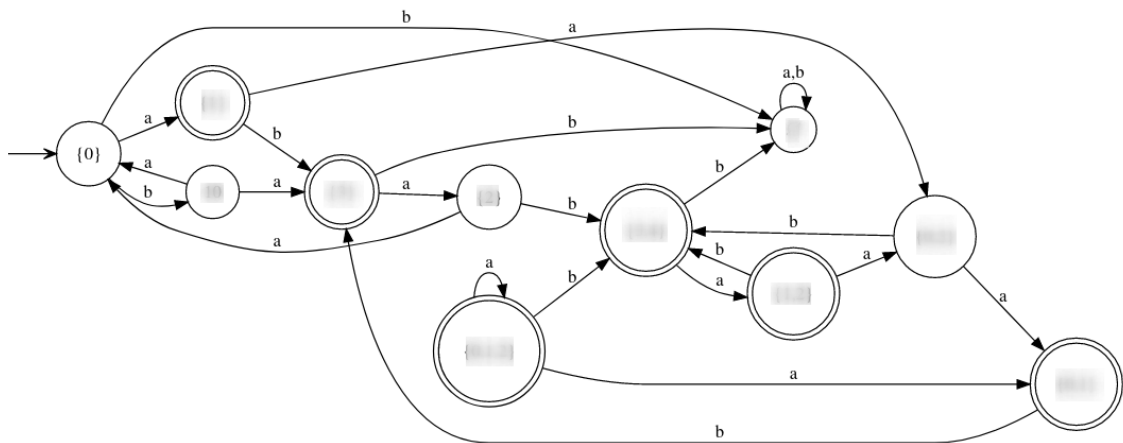
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

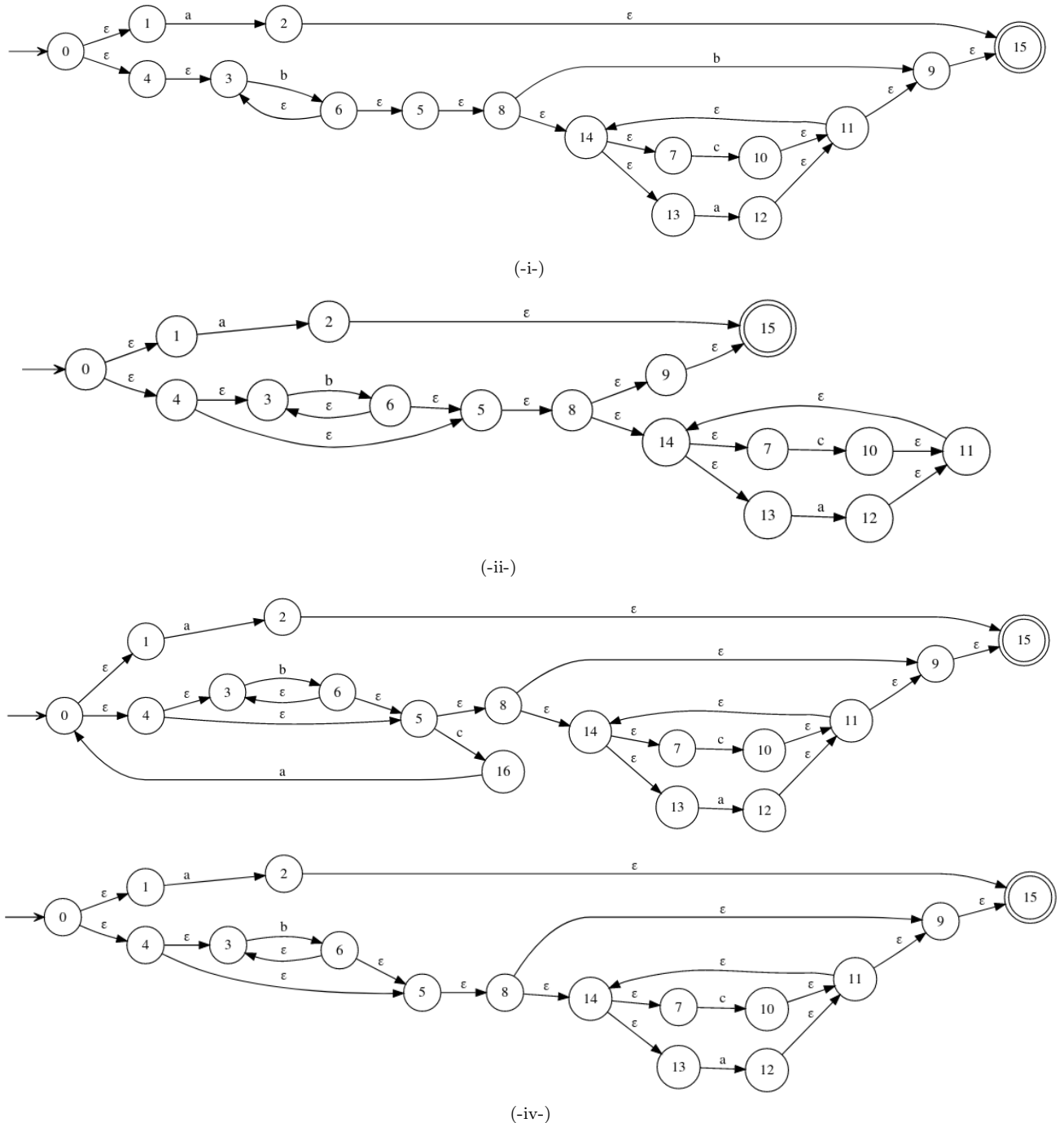


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c  e f   i j

Question 3 : a b c d e   h i

Question 4 :   c d  f  h     m n

Question 5 :   c d e   h  j k

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a   d e

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 :  b c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b    f g h i j k l 

Question 12 : a b  d e f g h

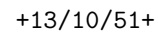
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ h A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une fonction.
☐ i Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ Un mot est une application.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d A est complet. ☐ e u est accepté par A . ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ est fermé par suffixe.
☒ Σ^* est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ f Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

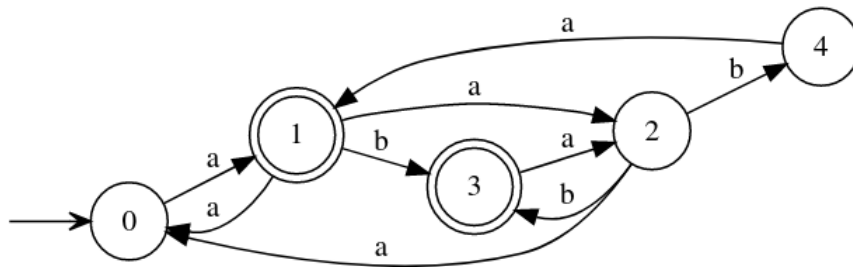
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

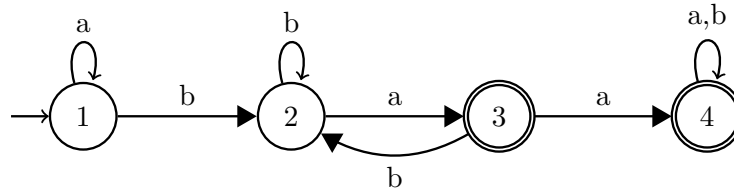
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 1 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

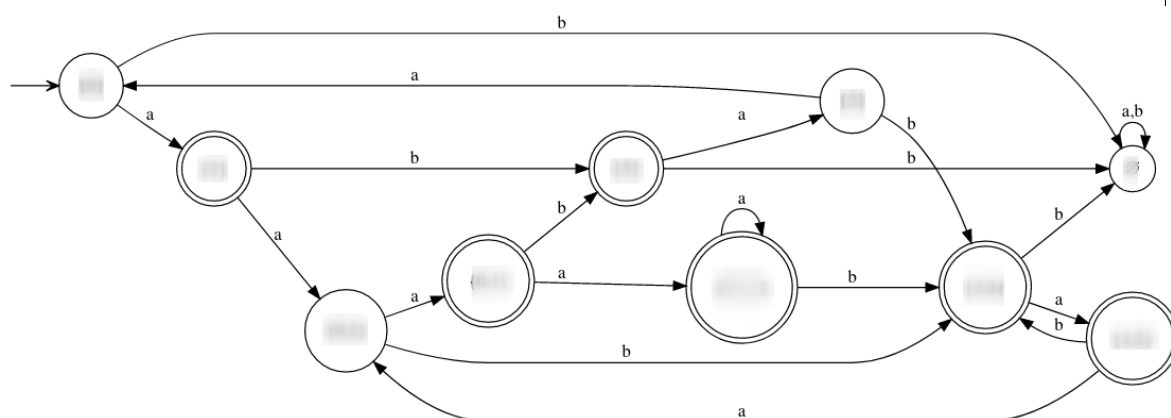


(-iii-)

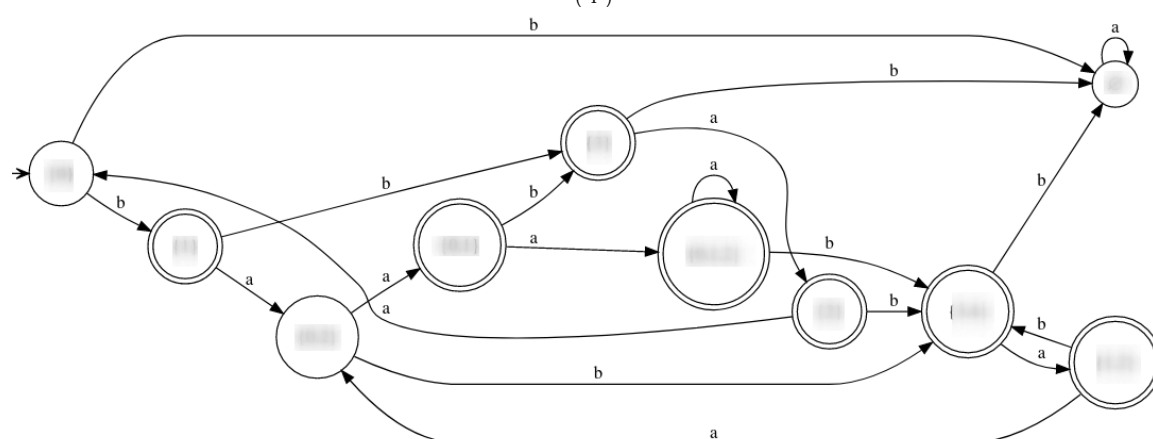


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

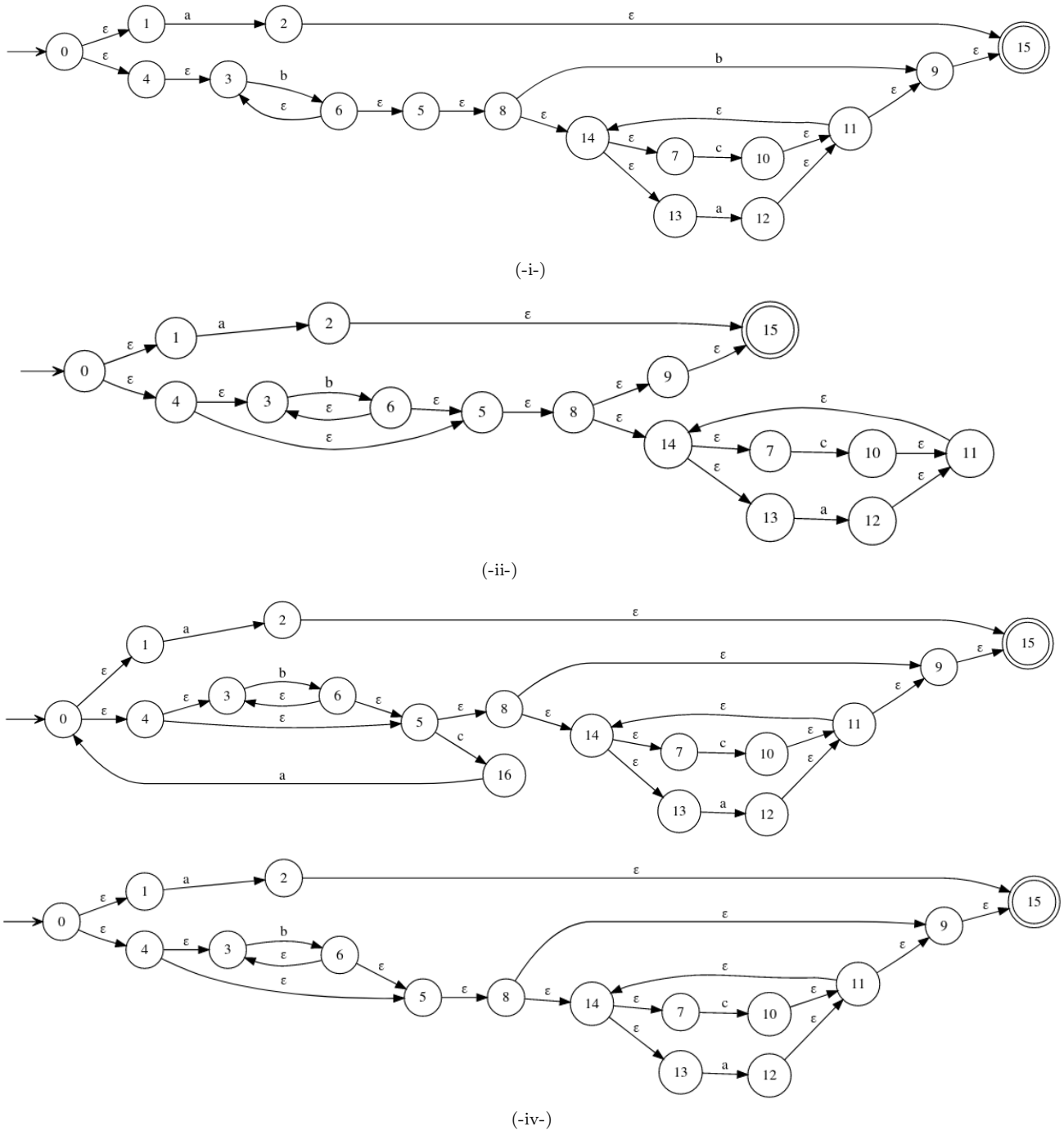


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ e ☐ ☐ h ☐ j ☐ k

Question 4 : ☐ a ☐ ☐ d ☐ e

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ d ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ i ☐ ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 8 : ☐ ☐ b ☐ ☐ e ☐ f ☐ ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐ i ☐ ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

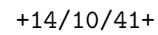
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ ☐ b

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c A n'est pas complet. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☐ e u n'est pas accepté par A . ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ g $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ b P est forcément déterministe.
☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être vide. ☐ b Un mot est une application.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot est une fonction.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
 ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs.
 ☐ A est complet.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ u est accepté par A .
 ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A accepte le langage universel.
 ☐ A possède un état puits
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
 ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-.
 ☐ la Figure 3-iv-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-iv-.
 ☐ la Figure 4-iii-.
 ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

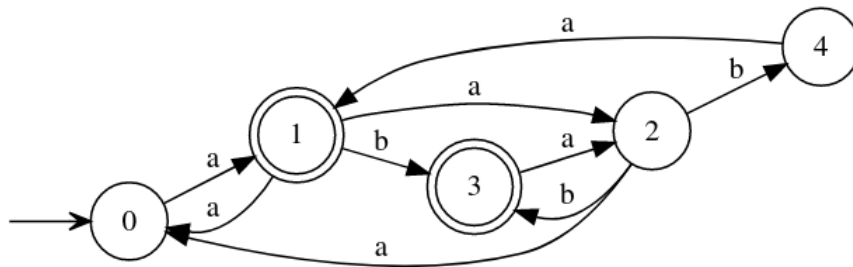
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

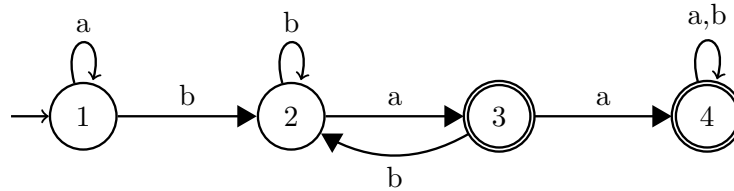
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 6 ☐ d 5 ☐ e 3 ☒ f 4 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

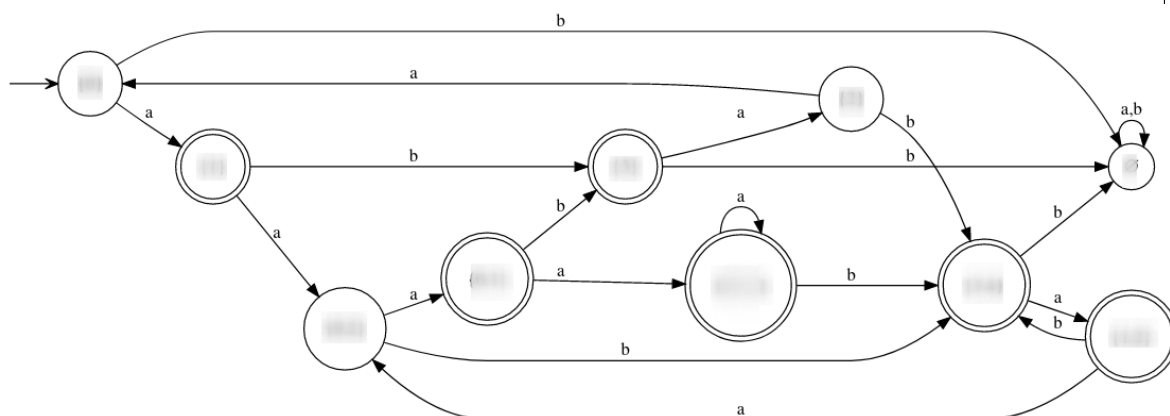


(-iii-)



(-iv-)

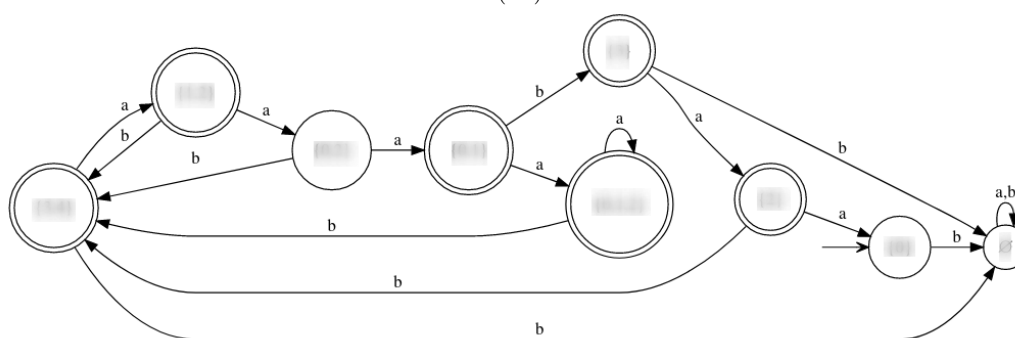
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



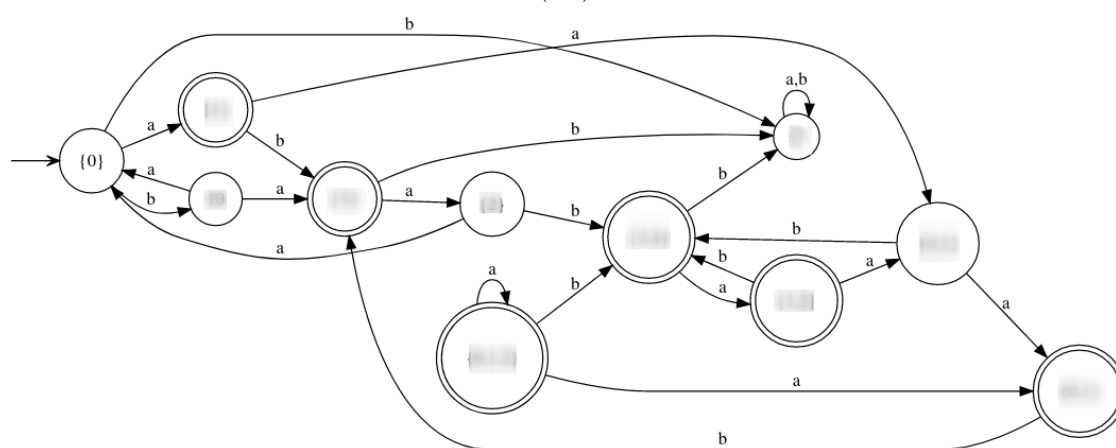
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

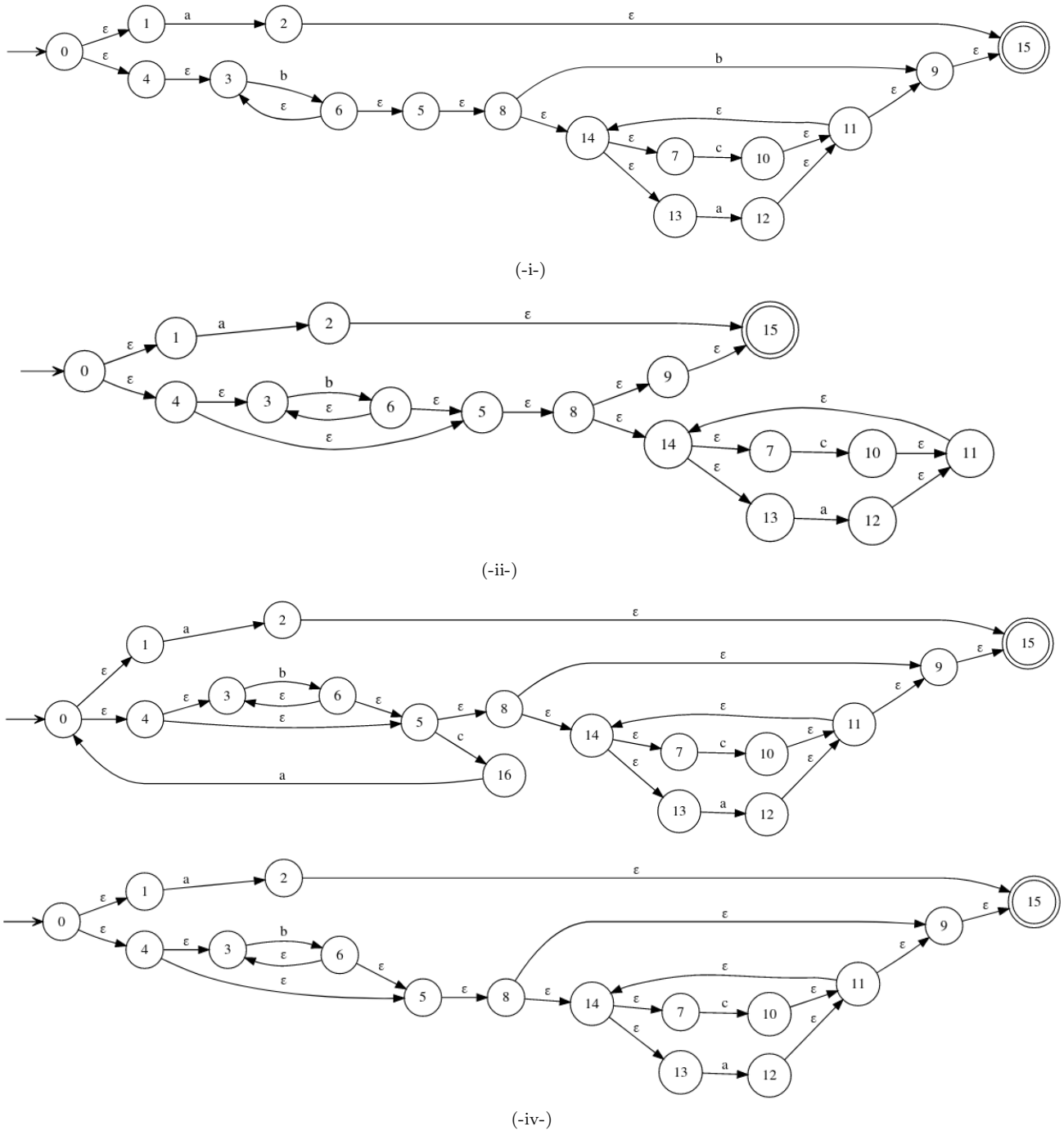


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d  f   i j k

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a   d e

Question 5 :   c d   g     l m n

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :  b c   f g  i j

Question 8 :  b c  e f g h i

Question 9 : a b  d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d e f   i  k  m

Question 12 : a b c d e  g h

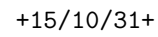
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ A possède un état puits ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

- ☐ e A a au moins un état co-accessible. ☐ f A a au moins un état non co-accessible.
☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☒ A n'est pas complet.
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Un mot est une fonction. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot peut être infini. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ i Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot est une application. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par facteur. ☐ h Σ est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii- ☒ la Figure 3-iii- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i- ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv- ☒ la Figure 4-i- ☐ c la Figure 4-ii- ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

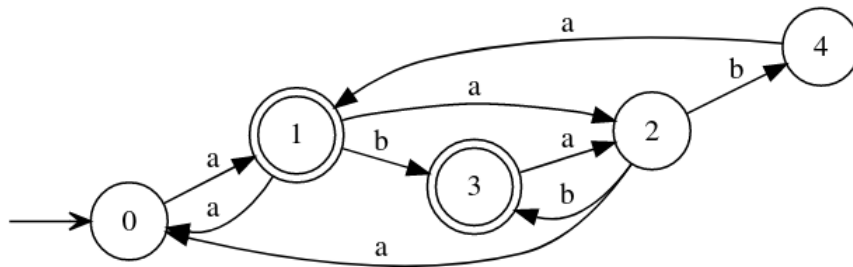
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

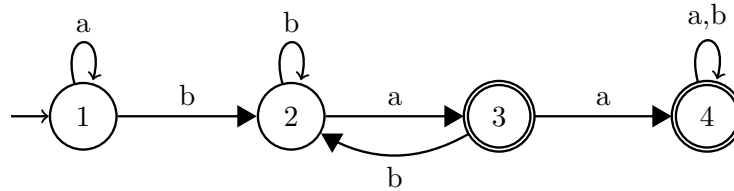
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 0 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 2 ☒ f 4 ☐ g 5

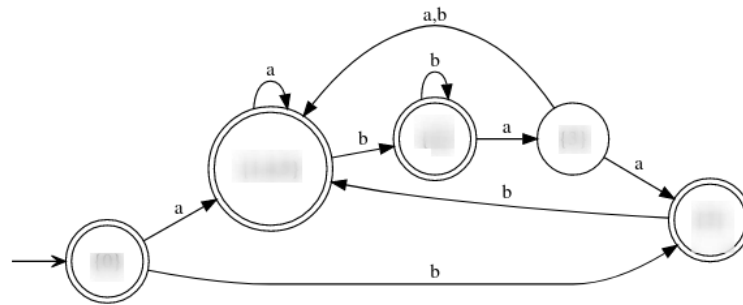
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



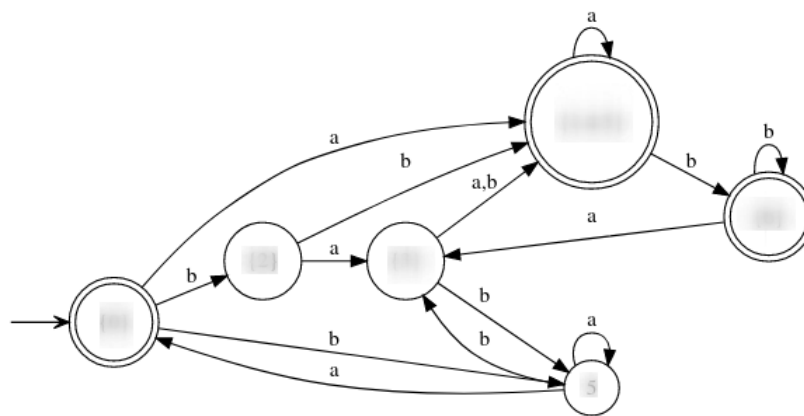
(-i-)



(-ii-)

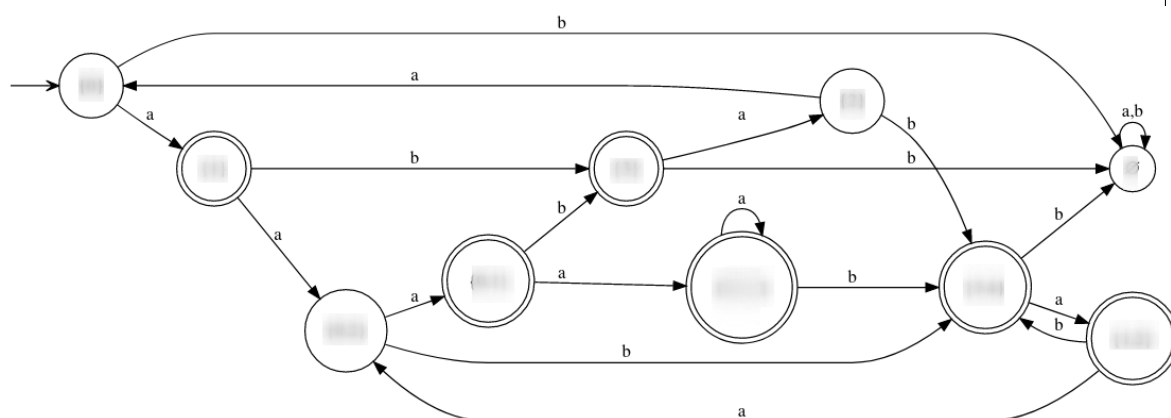


(-iii-)

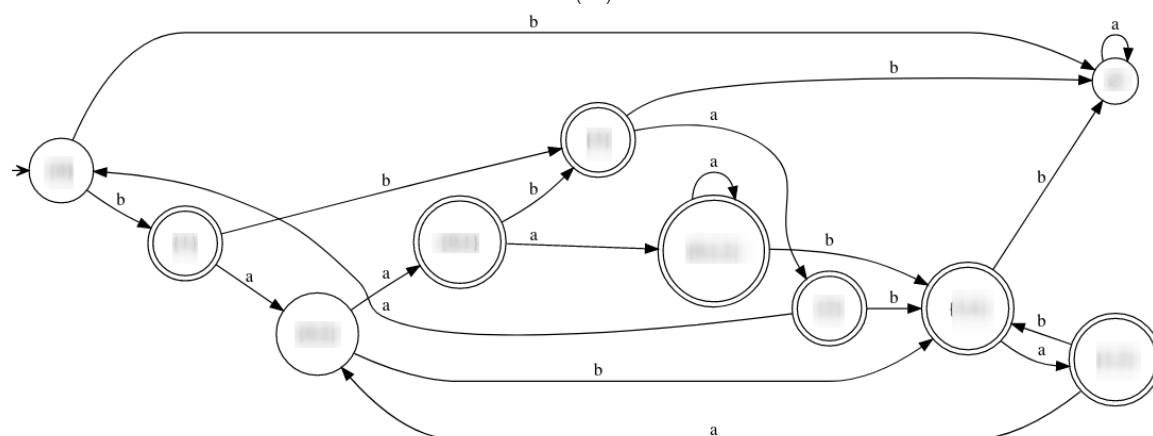


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

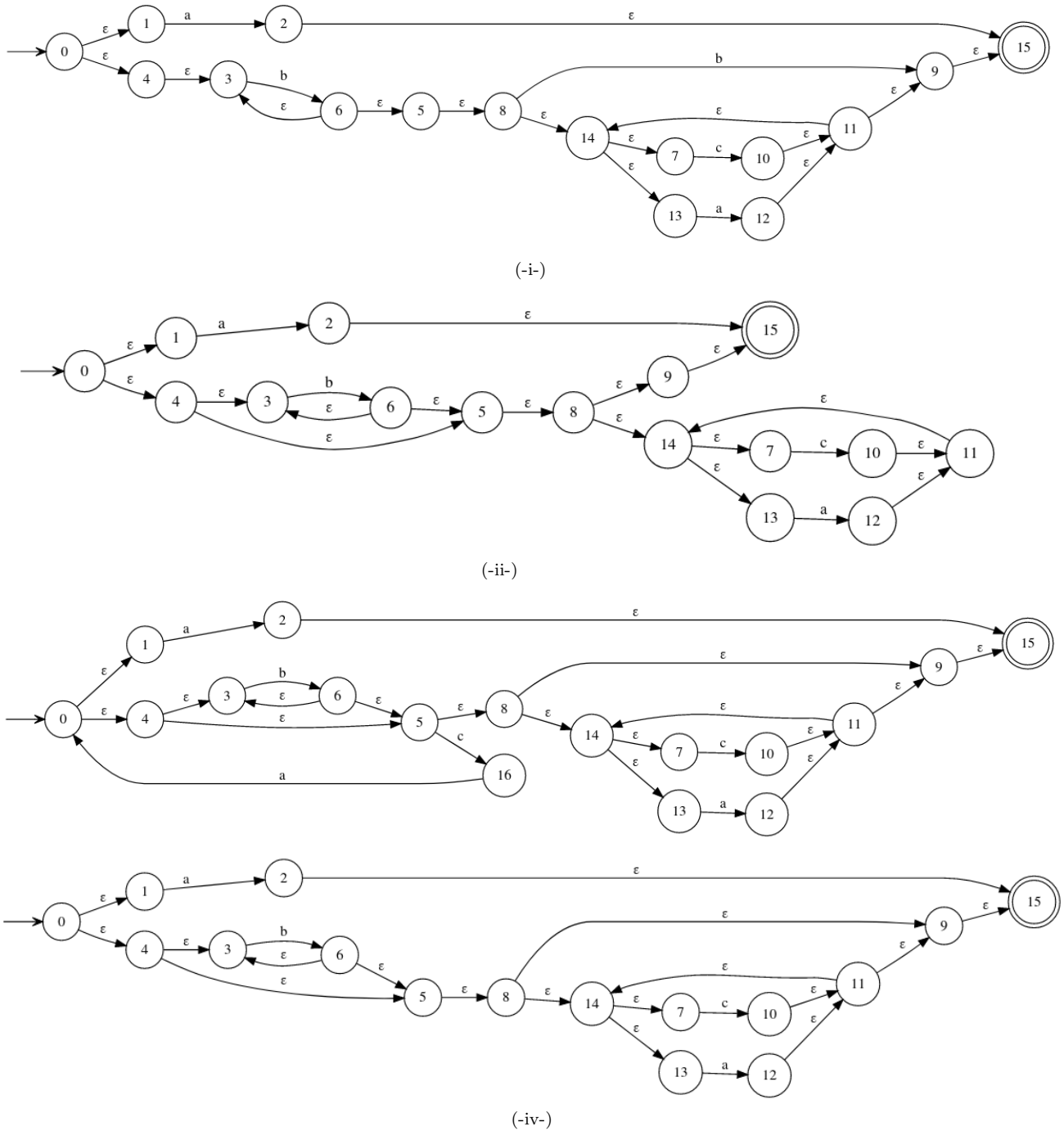
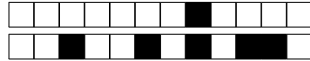


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservez enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a b c d e   h i

Question 5 :     e f g  i j k

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :  b    f g  i    m n

Question 8 :   c  e  g h i j

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a   d e f g h i  k  m

Question 12 : a b  d e f g h

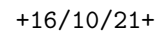
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c u est accepté par A . ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☒ b Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☒ c Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☒ e Un mot peut être vide. ☒ f Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ j Un mot est une fonction.
- ☒ k Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ l Un mot est une application.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ e A a au moins un état accessible. ☒ f u n'est pas accepté par A . ☒ g $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☒ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ i A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐	
☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	
☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
☐		☐		☐ Aucune des équations proposées.			
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐		☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

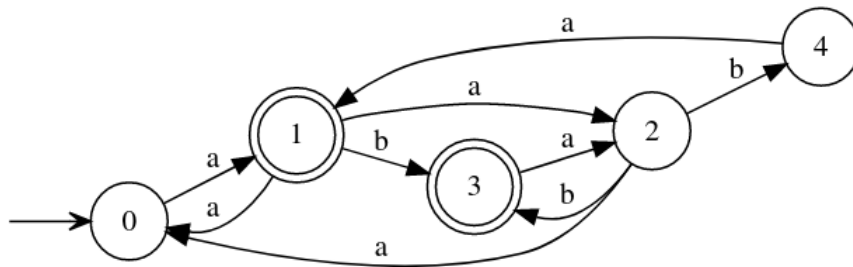
☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

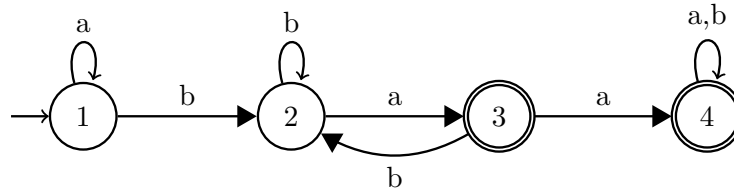
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

- ☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 5 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 3 ☒ 4

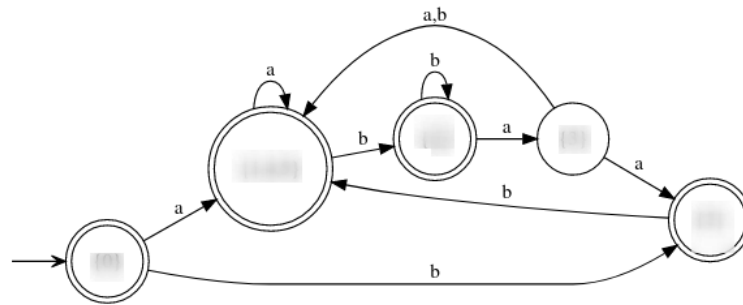
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

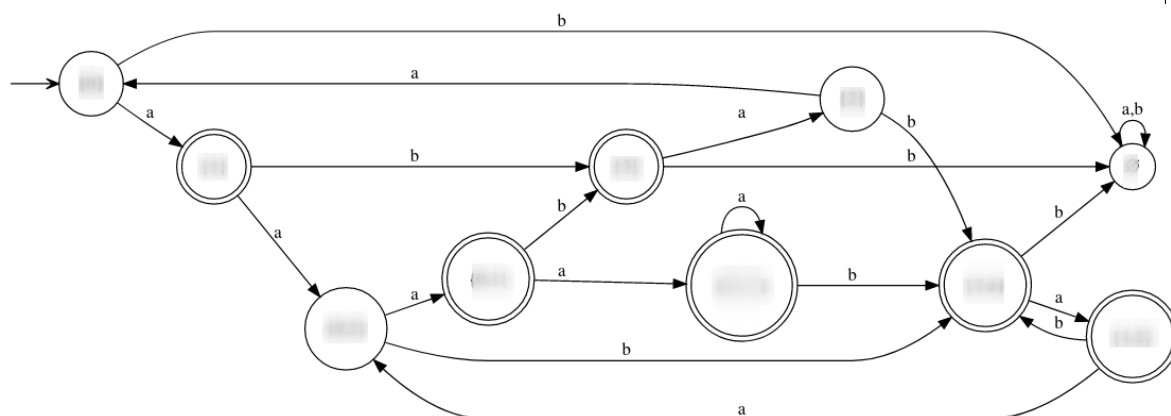


(-iii-)

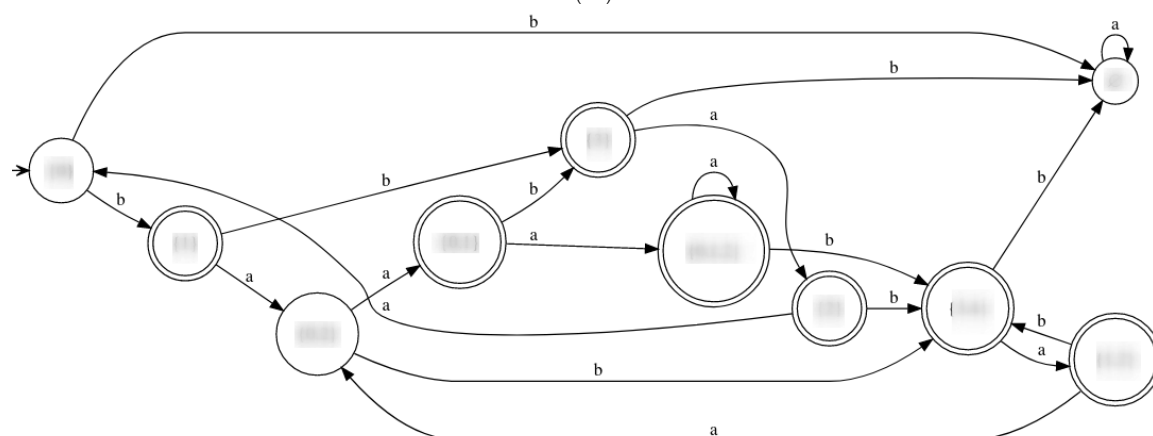


(-iv-)

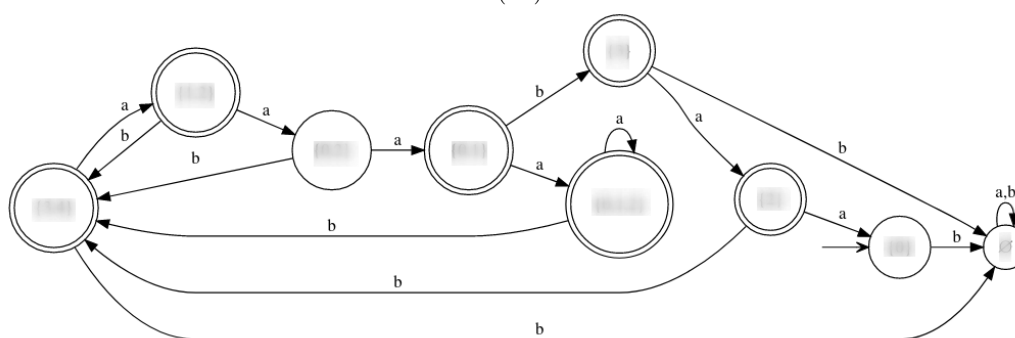
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

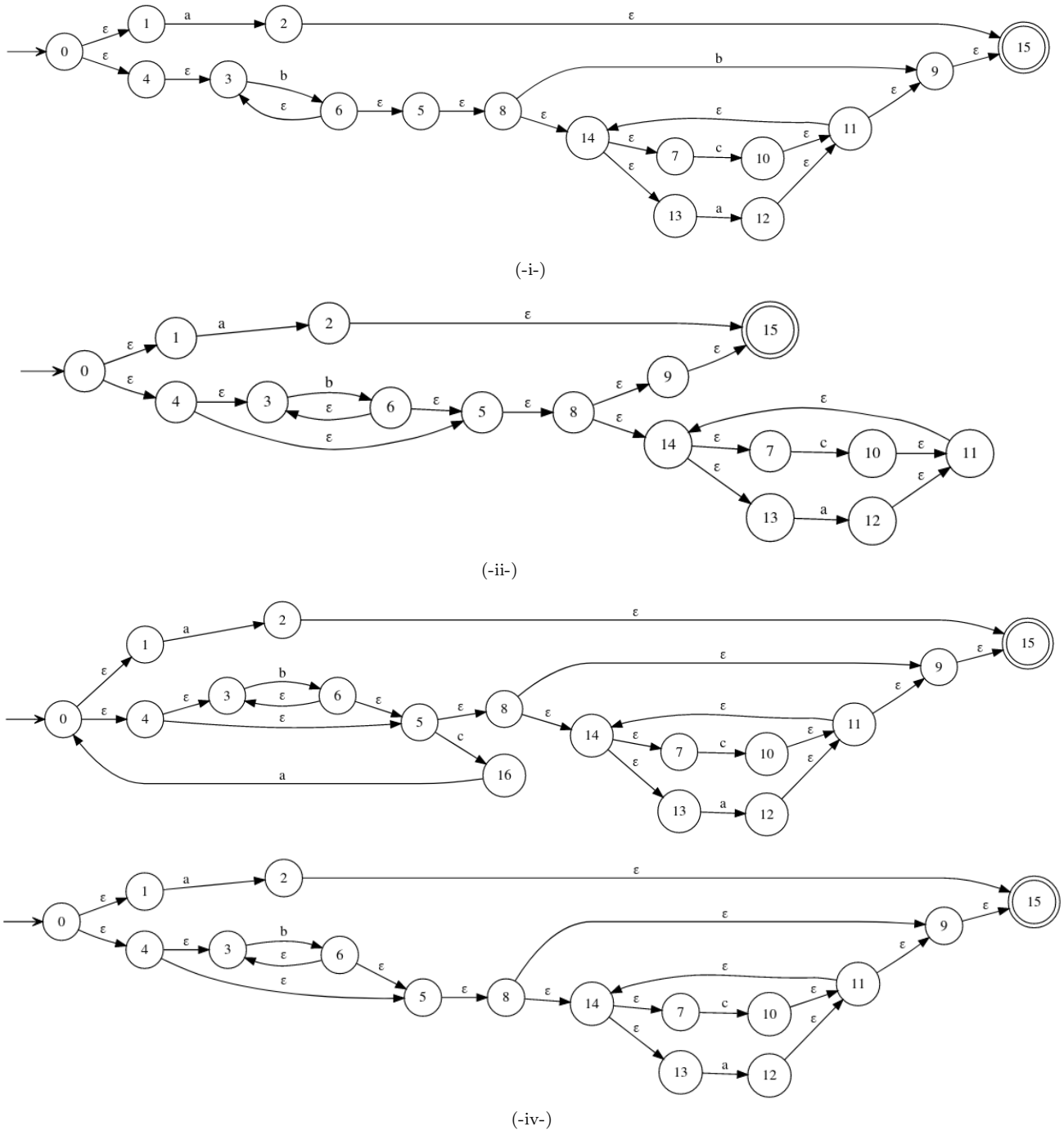
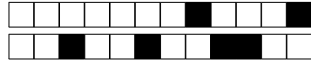


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a			d				h	i				m	n

Question 4 :

a	b	c	d						j	k

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a		c			f		h	i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c		e	f		h		j		l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

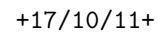
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire sheet is framed by a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
☐ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ e Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ h Σ est fermé par suffixe.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ f A a des états accepteurs.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☒ a Un mot peut être vide. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☒ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ d Un mot est une fonction.

☒ e Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☒ g Un mot est une application. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.

☒ i Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ j Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot peut être infini.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A a au moins un état non accessible.

☒ b Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☒ c A n'est pas complet. ☒ d $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ e A a au moins un état accessible.

☒ f u n'est pas accepté par A . ☐ g A a au moins un état non co-accessible.

☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ i A a au moins un état co-accessible.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 6 ☐ f 3 ☐ g 0

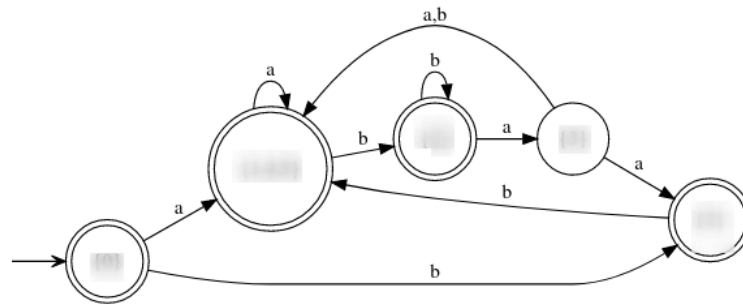
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

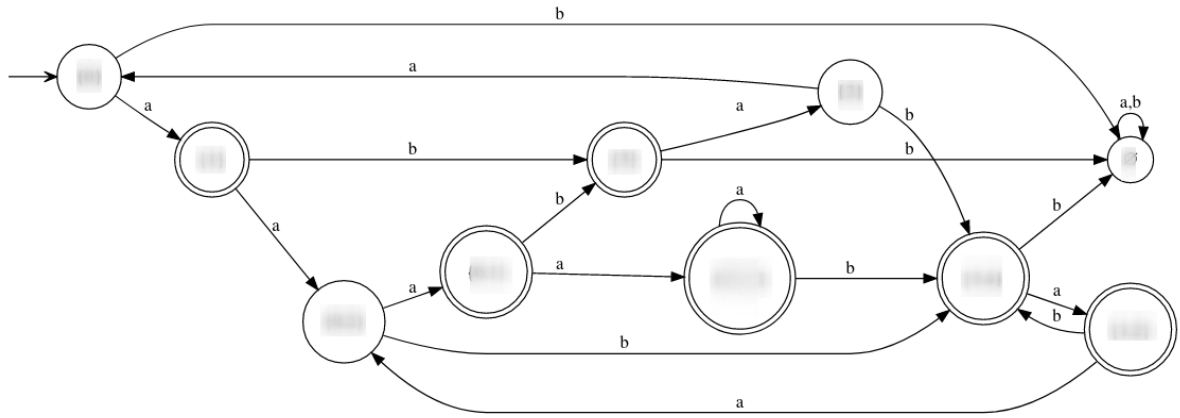


(-iii-)

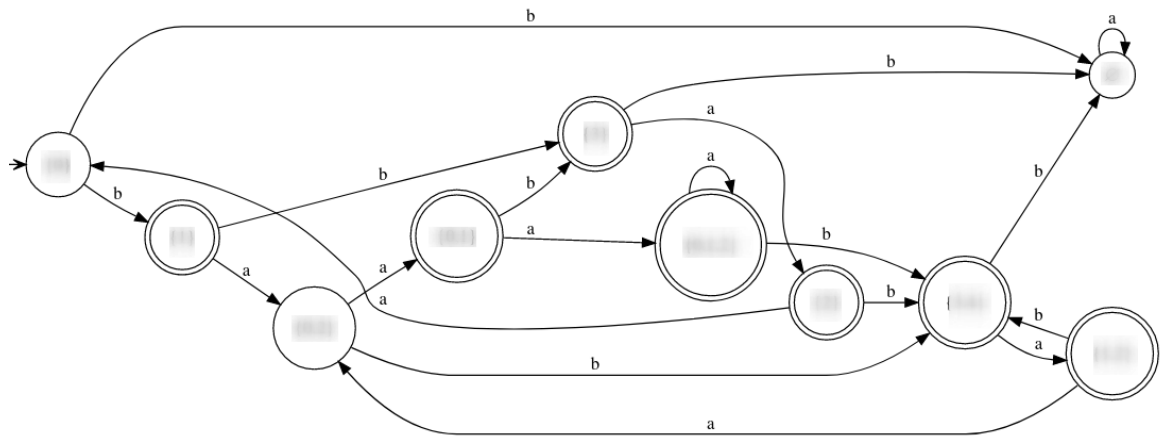


(-iv-)

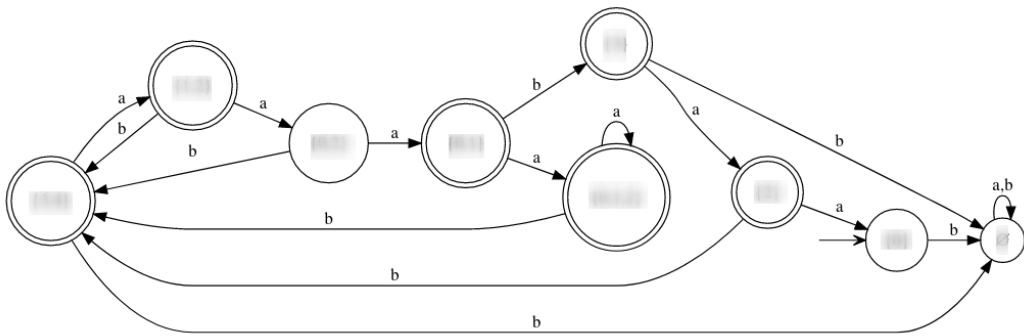
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



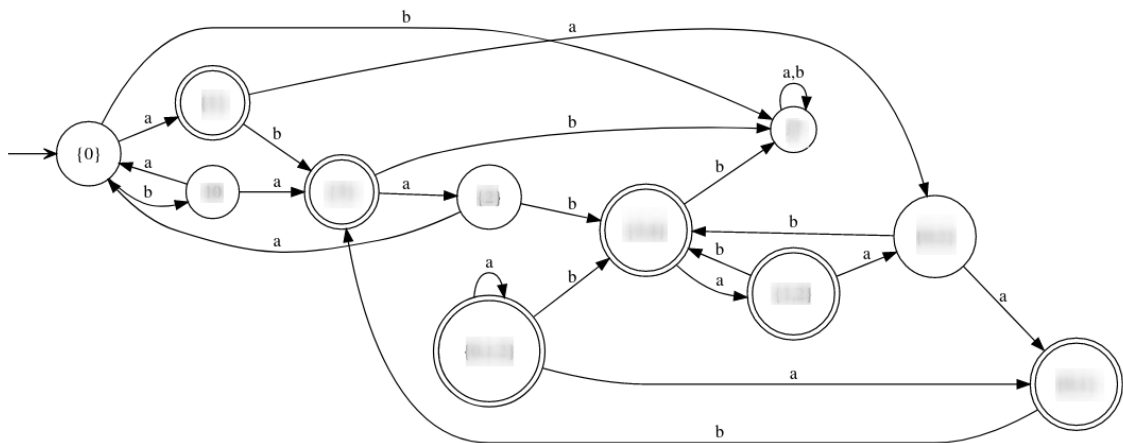
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

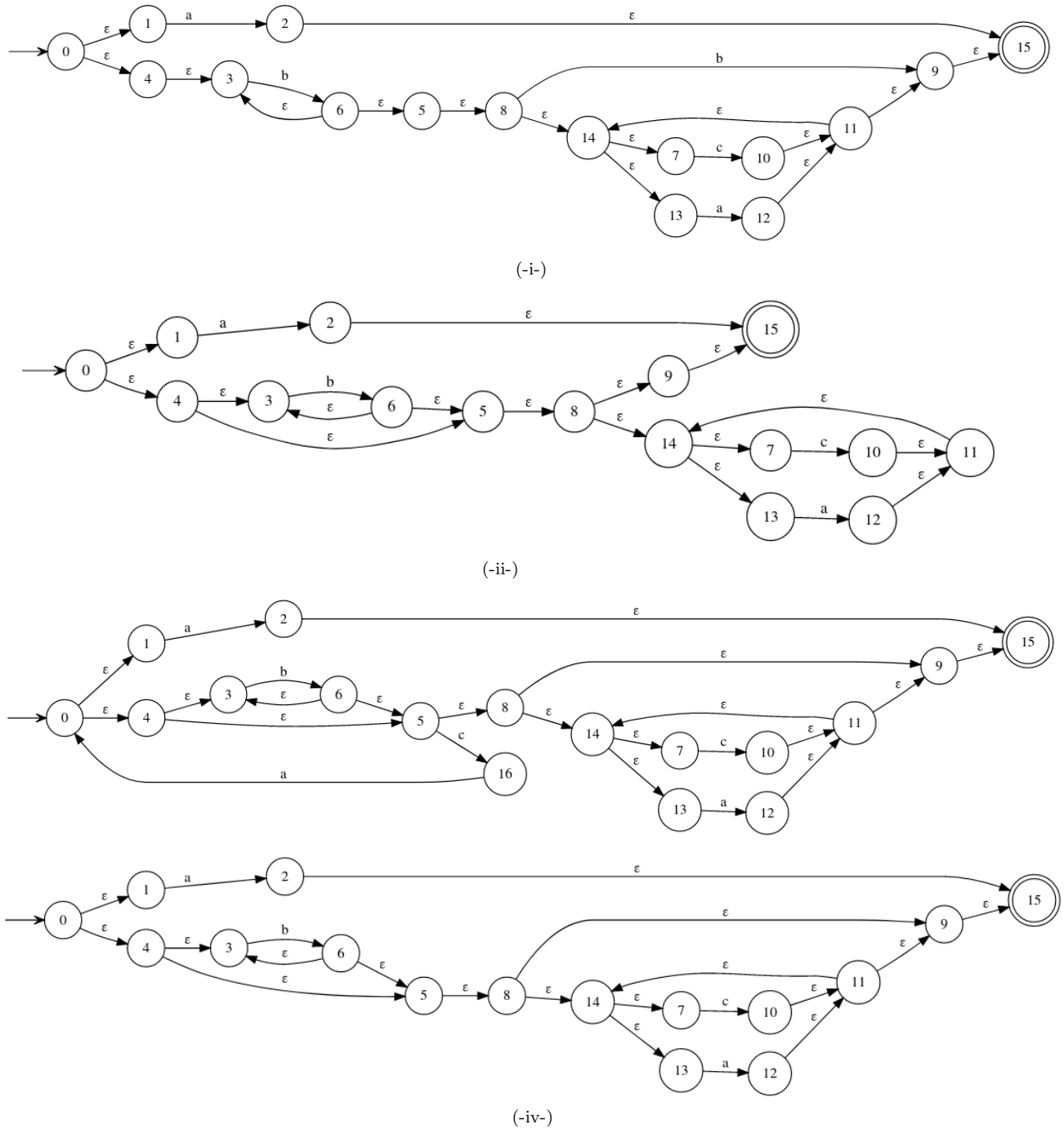
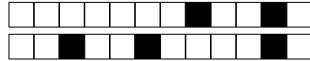


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d	e		g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

	b	c	d				h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

	b						h			k	l	m	n

Question 8 :

a						g	h	i	j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c			f		h	i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

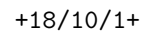
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ b P est forcément déterministe.
- ☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet.
- ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ b Un mot est une application.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ d Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ h Un mot peut être infini.

- ☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut être vide.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ c A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ h Σ est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A a au moins un état non accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ A n'est pas complet.
☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

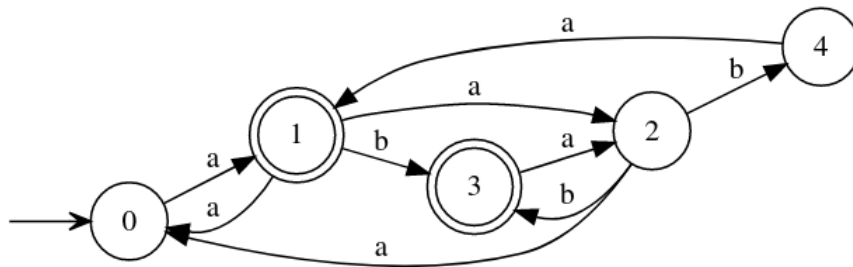
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

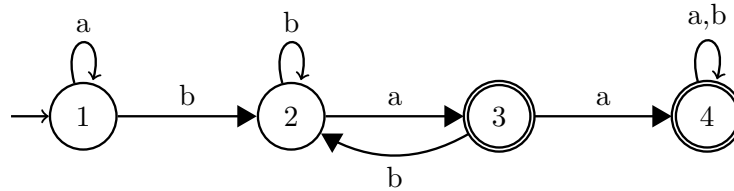
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 2 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

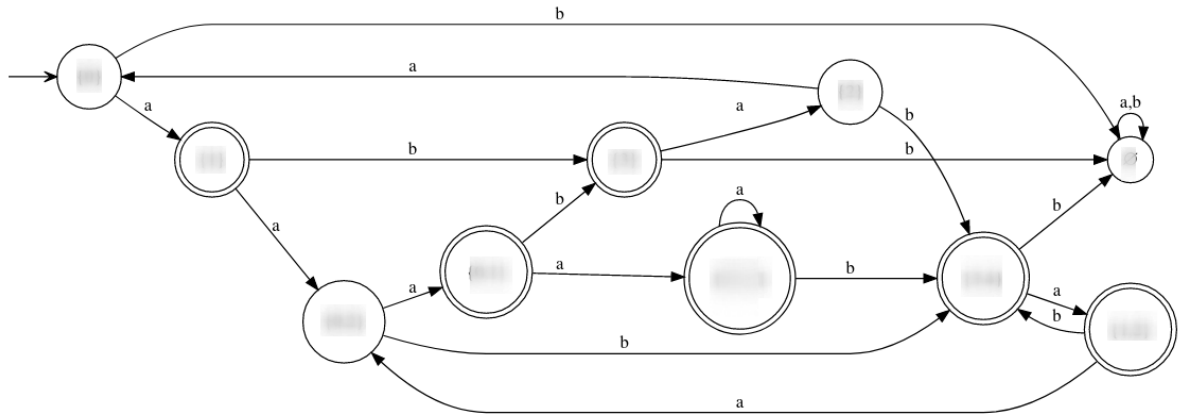


(-iii-)

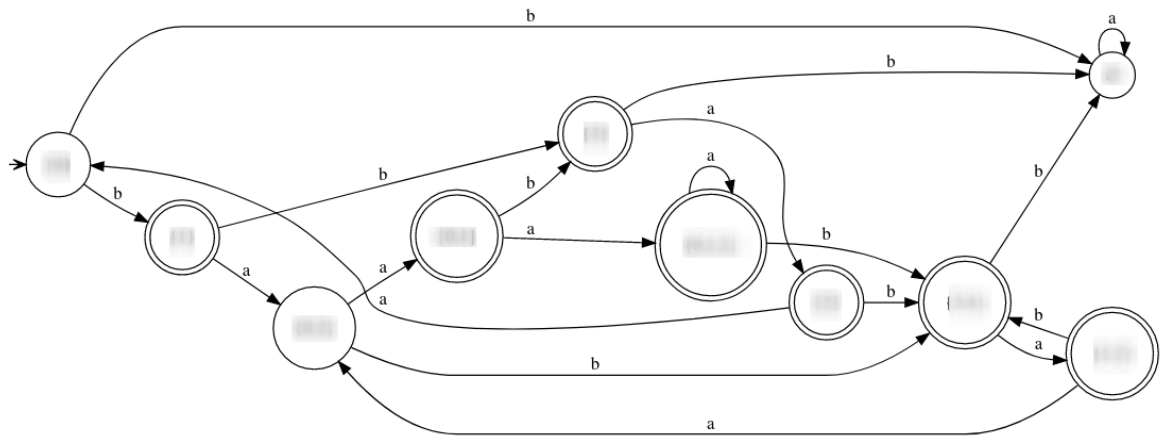


(-iv-)

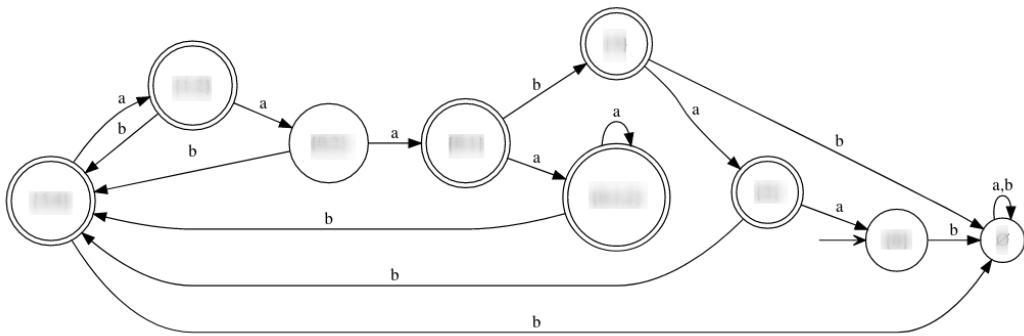
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



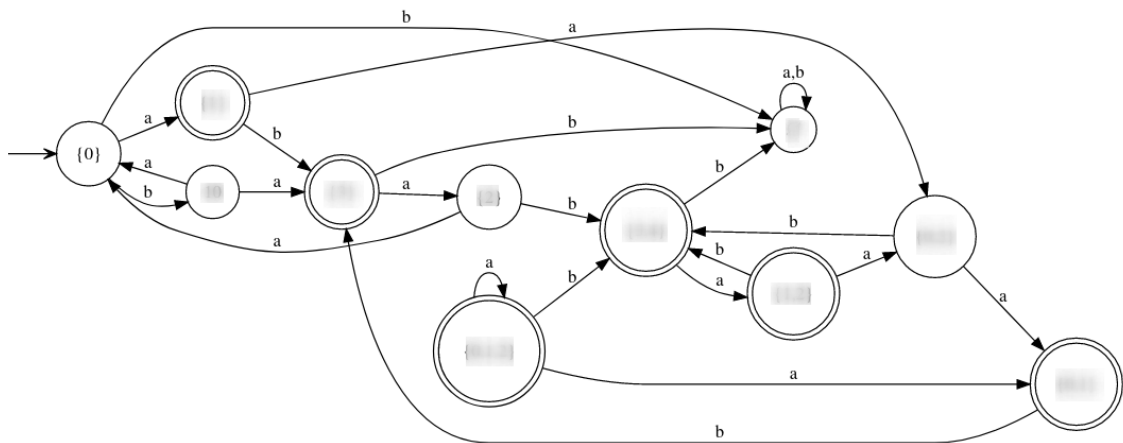
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

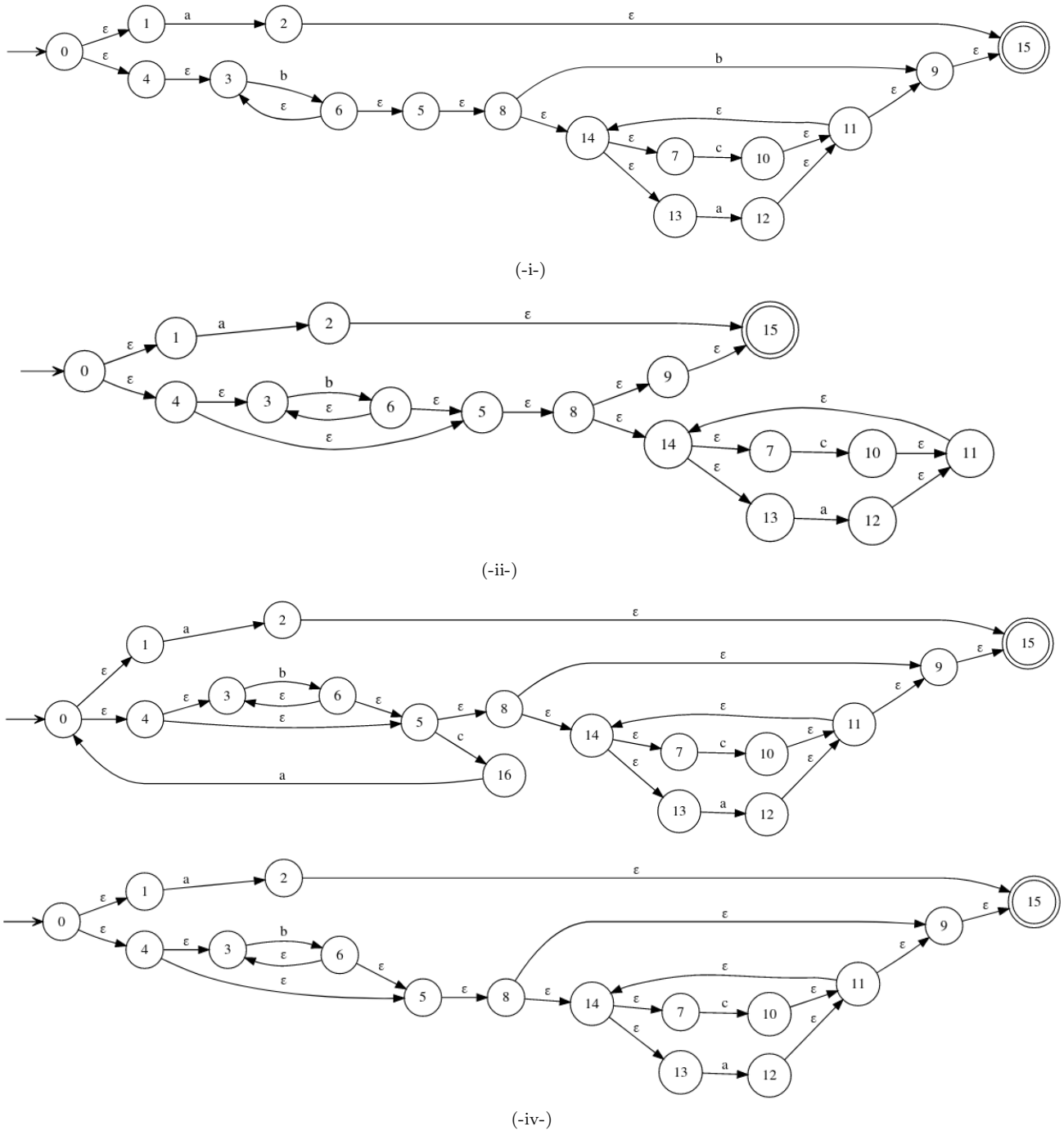


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

		c			f		h	i				m	n

Question 6 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 7 :

	b		d			g	h	i	j

Question 8 :

	b	c	d		f				j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f	g	h	i		k		

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

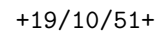
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
 ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet.
 ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
 ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A possède un état puits
 ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ A accepte le langage universel.
 ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c A est complet.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☒ e Σ^* est fermé par facteur.
☒ f Σ^* est fermé par suffixe. ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-i-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)^*$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

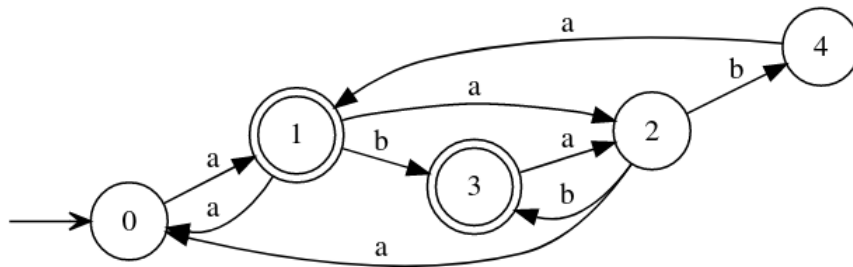
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

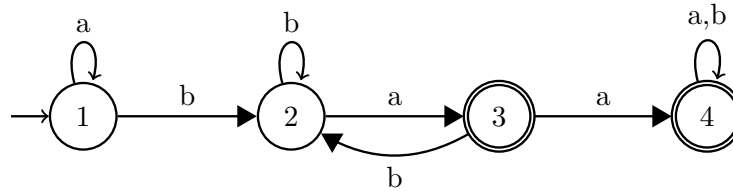
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ b 4 ☐ c 5 ☐ d 1 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 2

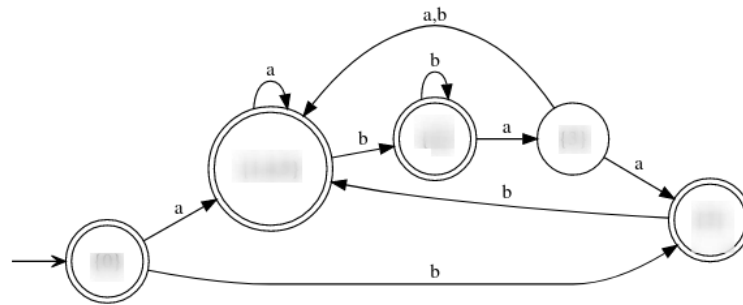
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



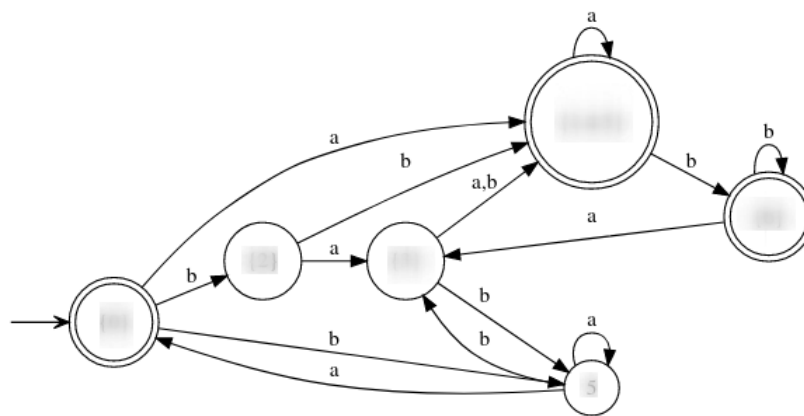
(-i-)



(-ii-)

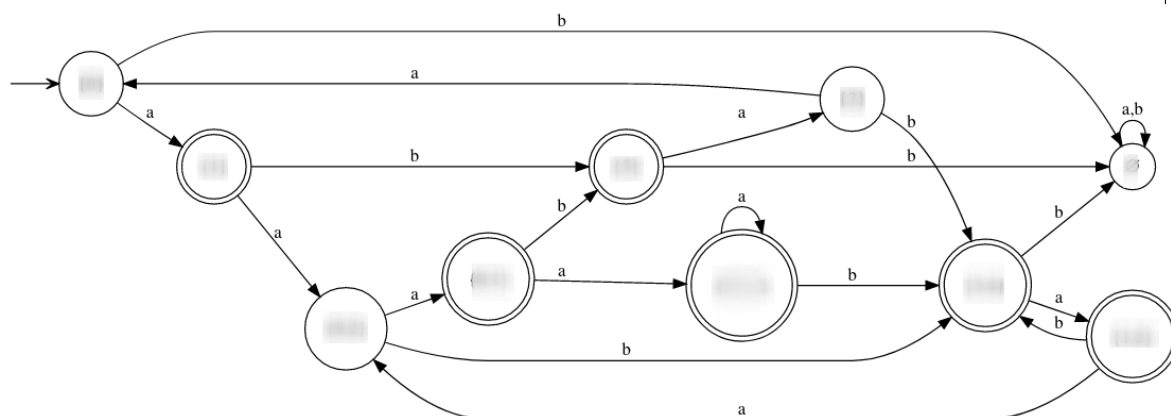


(-iii-)

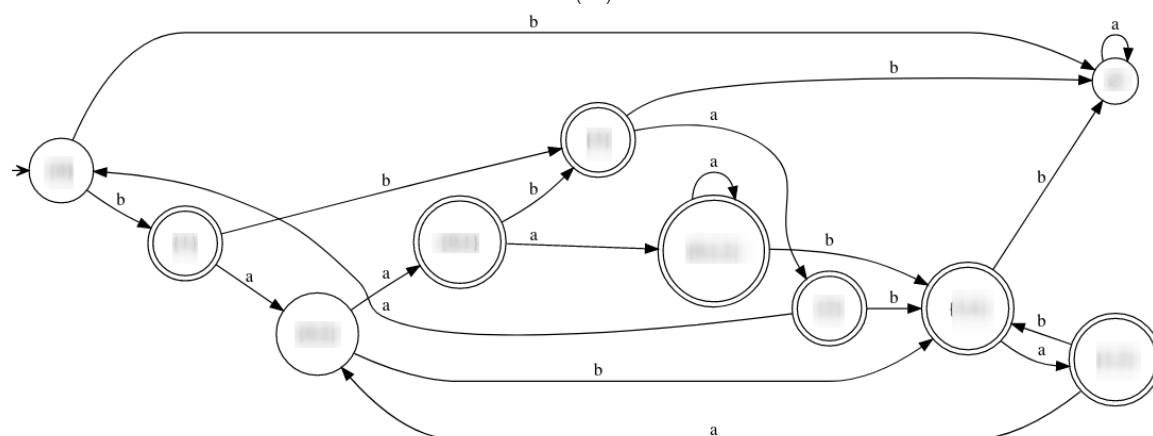


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ e ☐ g h i ☐ ☐ ☐ m n

Question 3 : a b ☐ ☐ ☐ ☐ g h ☐ j k

Question 4 : a b ☐ d e f ☐ h i

Question 5 : a b c d e f g ☐

Question 6 : ☐ b ☐ d e

Question 7 : a b ☐ d ☐ ☐ ☐ h i j

Question 8 : a b c d ☐

Question 9 : a b c ☐ e

Question 10 : a b c ☐

Question 11 : ☐ ☐ c d e ☐ g h i j ☐ l m

Question 12 : a b c ☐ e f g h

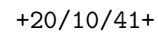
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : ☐ b c d e f

Question 15 : a b c ☐ e f

Question 16 : ☐ b

Question 17 : a b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet. ☐ u est accepté par A .
- ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii- ☐ la Figure 3-i- ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iv- ☐ la Figure 3-iii-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii- ☐ la Figure 4-i- ☐ la Figure 4-ii- ☐ la Figure 4-iv-

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

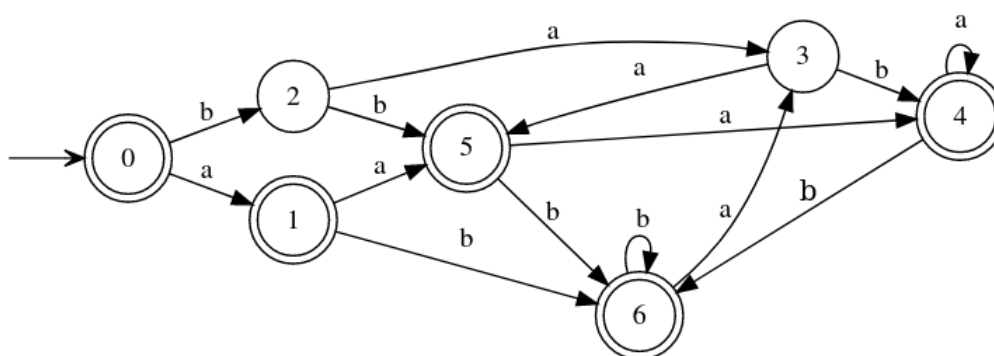
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

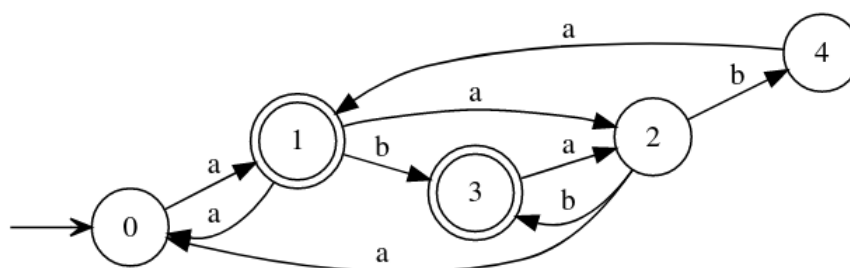
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

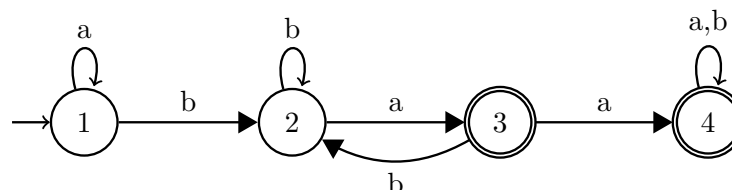
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 3 ☐ d 2 ☐ e 6 ☐ f 5 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

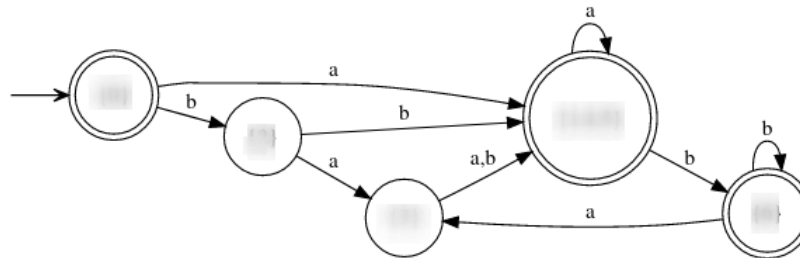
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



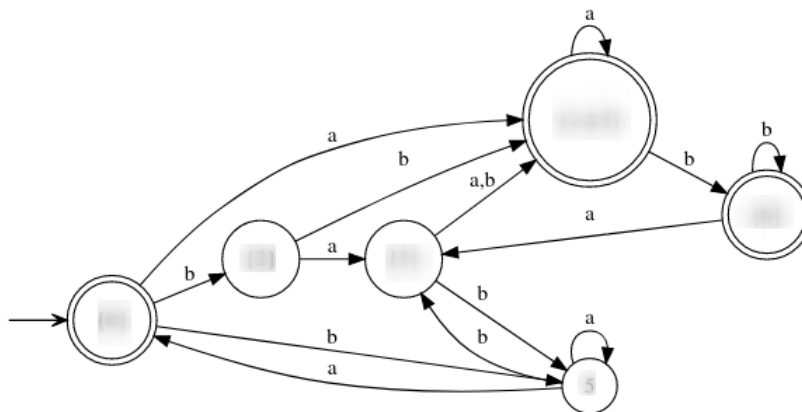
(-i-)



(-ii-)

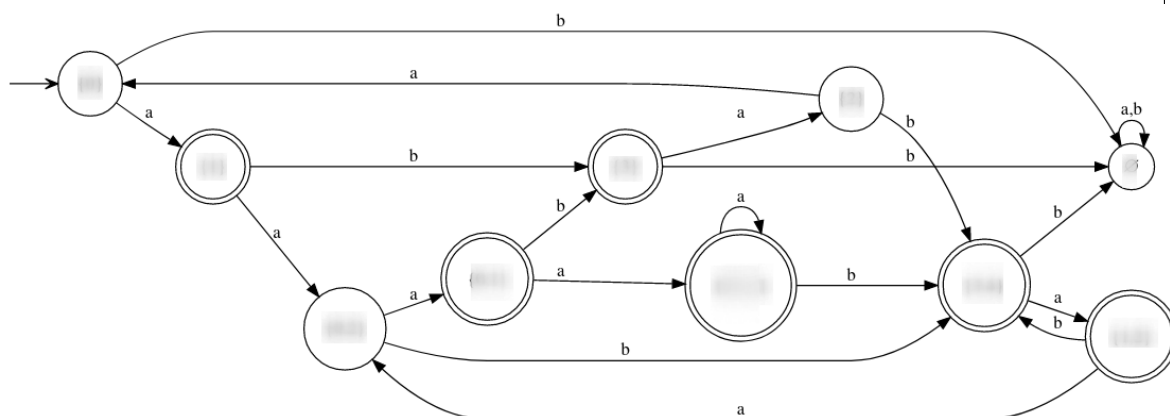


(-iii-)



(-iv-)

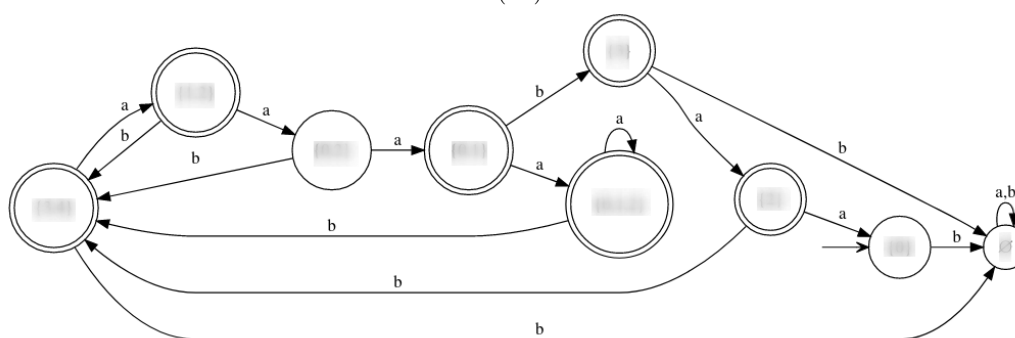
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 3 : ☐ b ☐ d ☐ e

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 5 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 7 : ☐ b ☐ c ☐ e ☐ j ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ h ☐ j ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

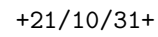
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ b

Question 17 : ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c u est accepté par A .
☐ d A est complet. ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☒ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

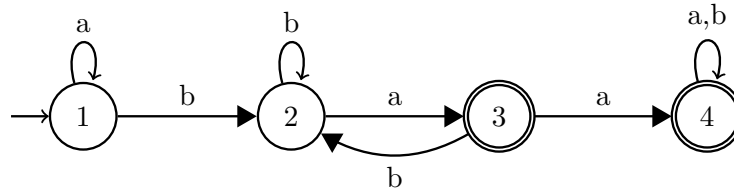
☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 3 ☐ c 1 ☐ d 6 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

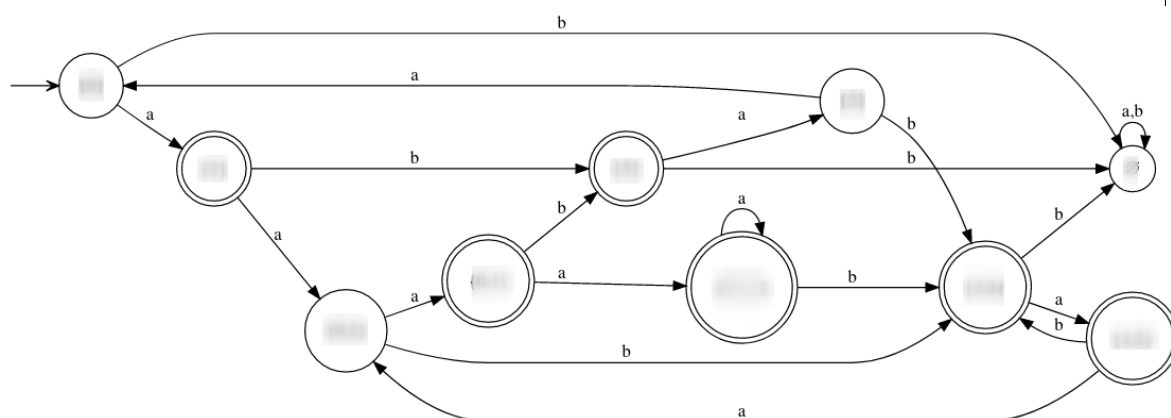


(-iii-)

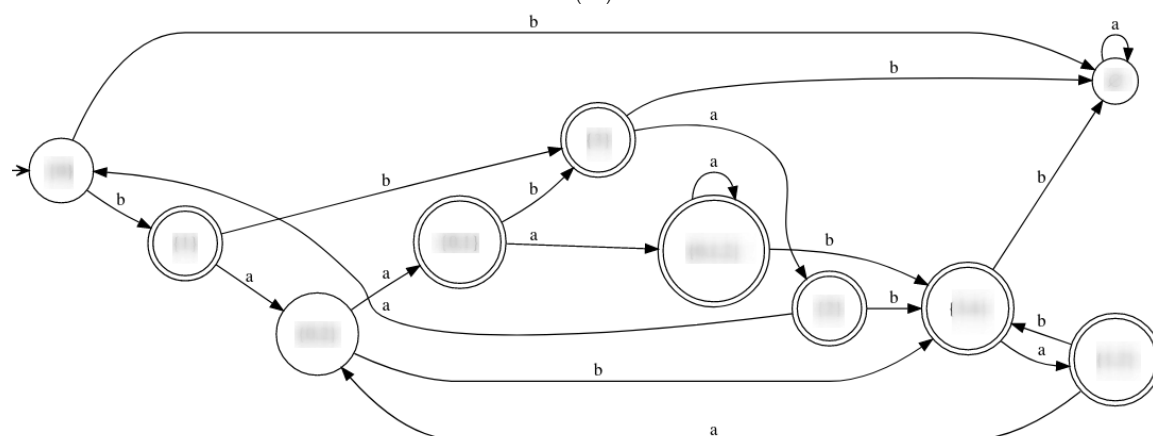


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

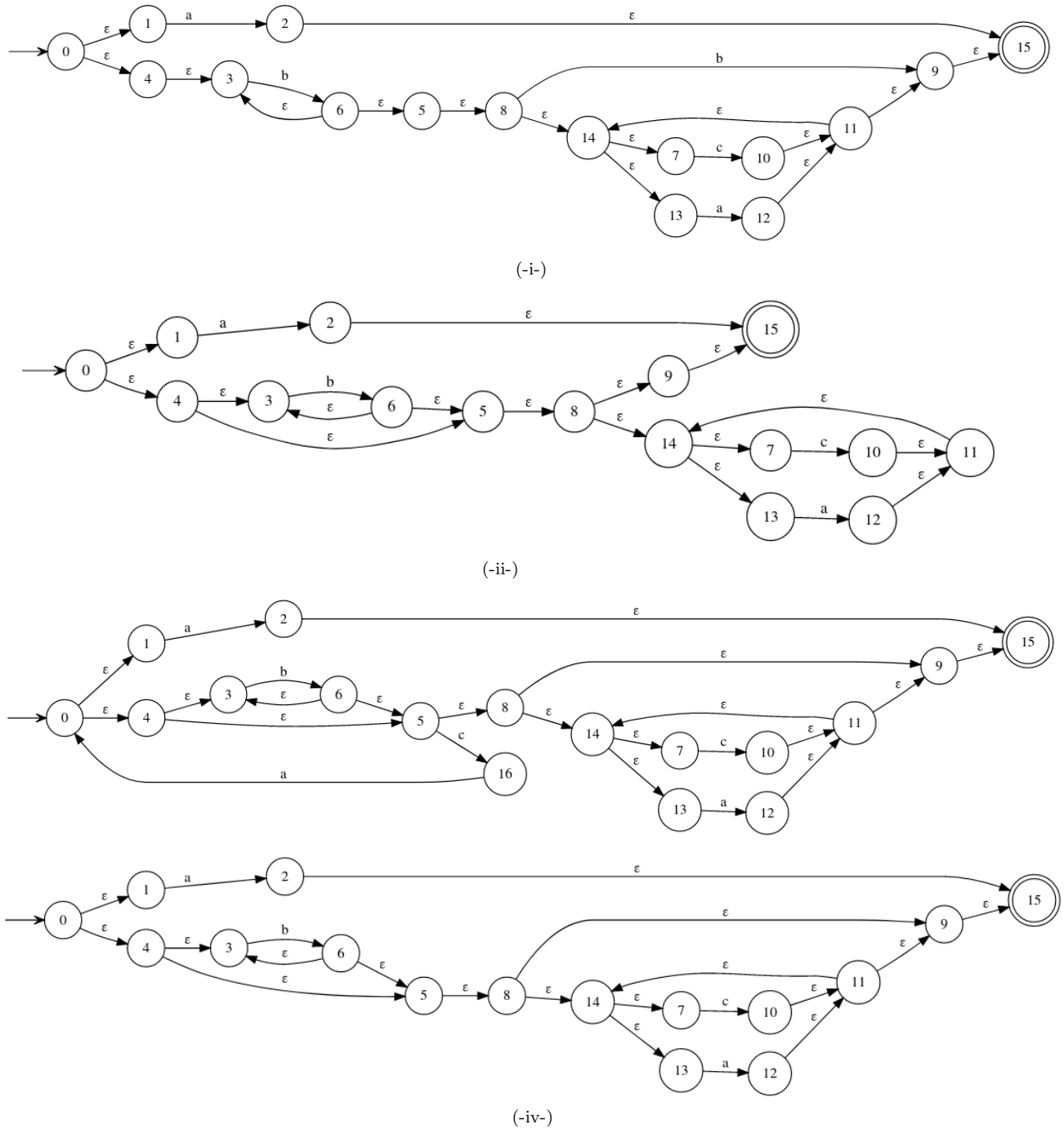
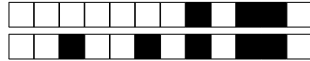


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ c ☐ e f ☐ ☐ i j k

Question 3 : a b c d ☐

Question 4 : a b c d e f g ☐

Question 5 : a ☐ ☐ d e f g h i

Question 6 : ☐ ☐ c d e

Question 7 : a ☐ ☐ d e ☐ ☐ h i j

Question 8 : a ☐ c ☐ ☐ ☐ g ☐ ☐ j ☐ ☐ m n

Question 9 : a ☐ c d e

Question 10 : a ☐ c d

Question 11 : ☐ b c d e ☐ ☐ h ☐ j k l m

Question 12 : a b ☐ d e f g h

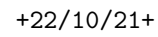
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : a b ☐ d e f

Question 15 : a ☐ c d e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : a b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☒ c $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ d A a au moins un état co-accessible.
☒ e A a au moins un état accessible. ☒ f A n'est pas complet.
☒ g u n'est pas accepté par A . ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☒ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur. ☒ b Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ f Σ^* est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par facteur.
☒ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot est une fonction. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ i Un mot peut être infini. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A possède un état puits
☐ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d A accepte le langage universel. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

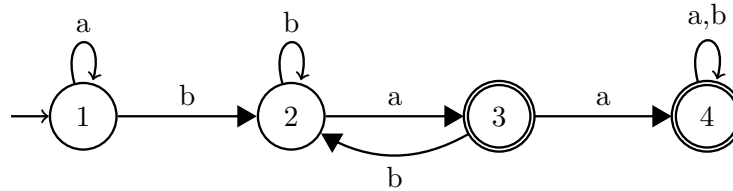
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 2 ☐ f 5 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



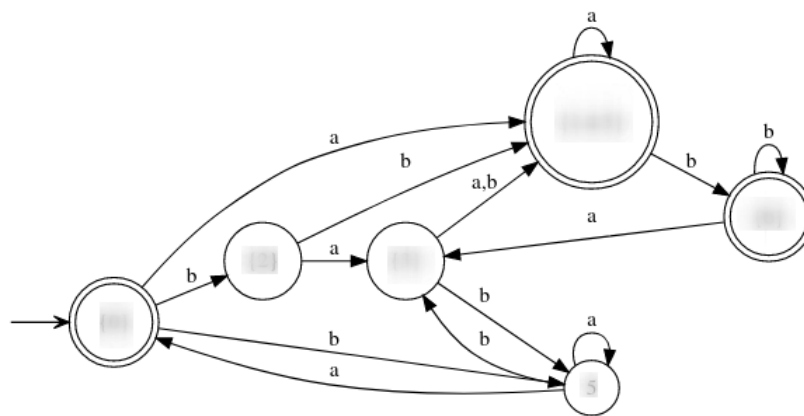
(-i-)



(-ii-)

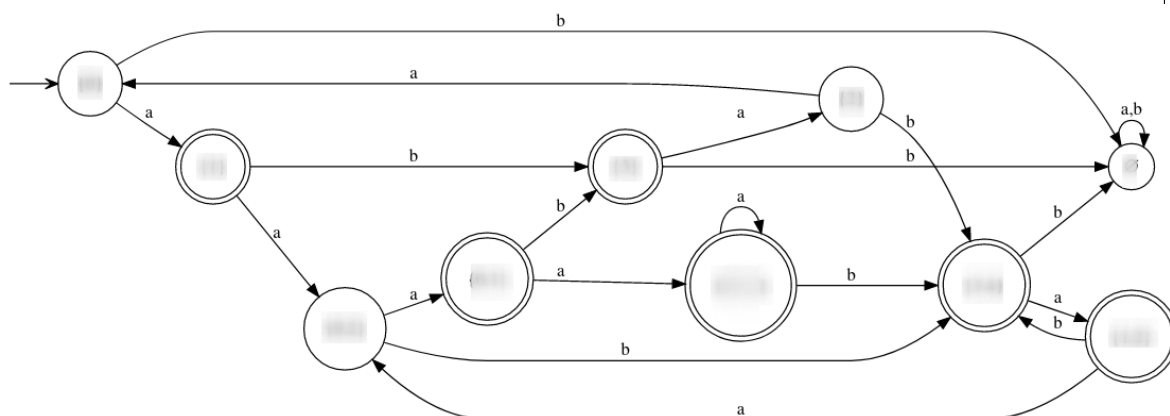


(-iii-)



(-iv-)

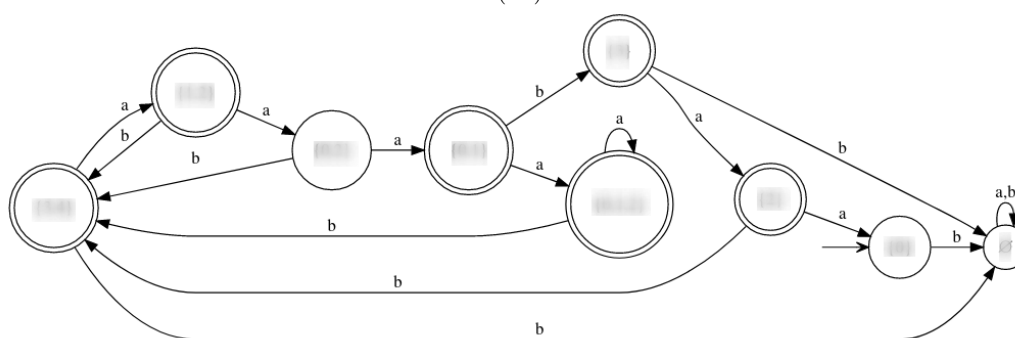
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



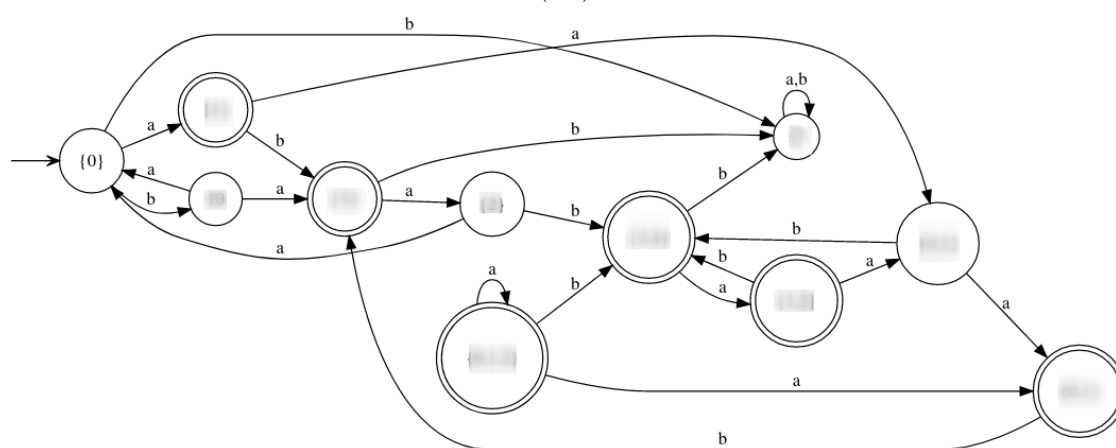
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

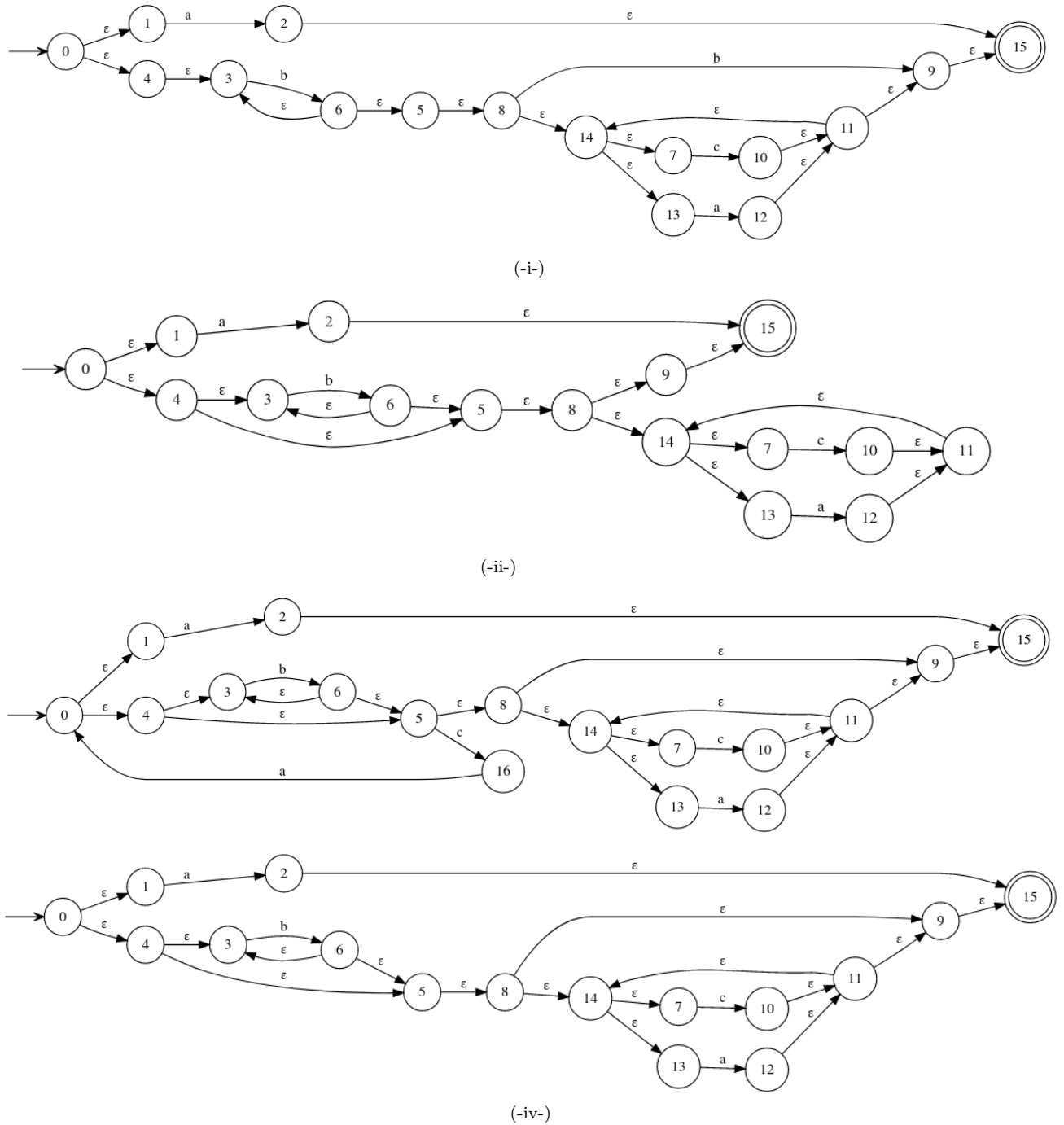
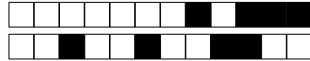


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d				h		j	k

Question 3 :

	b		d	e

Question 4 :

		c	d	e		g		i	j

Question 5 :

	b	c						i		k		m	n

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c	d				h	i		k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

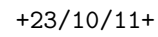
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ d A n'est pas complet. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☐ f A a au moins un état non accessible.
☐ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A a au moins un état accessible. ☐ i u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot est une fonction. ☐ f Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ i Un mot est une application. ☐ j Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ k Un mot peut être vide. ☐ l Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.
☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$
	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a+b)^*$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

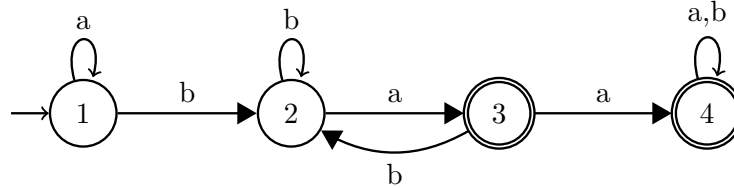
☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☒ b 4 ☐ c 2 ☐ d 5 ☐ e 1 ☐ f 6 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

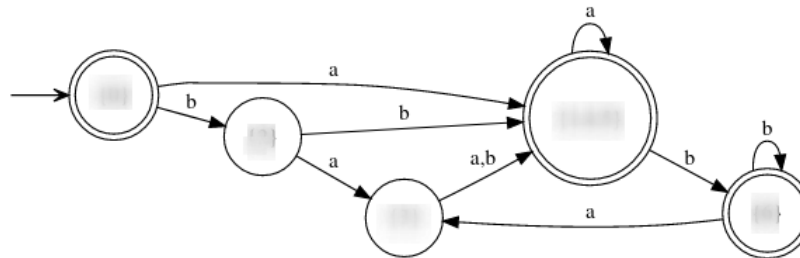
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



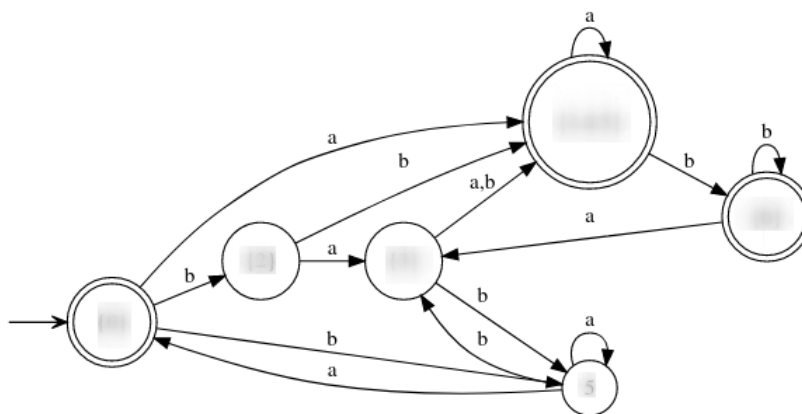
(-i-)



(-ii-)

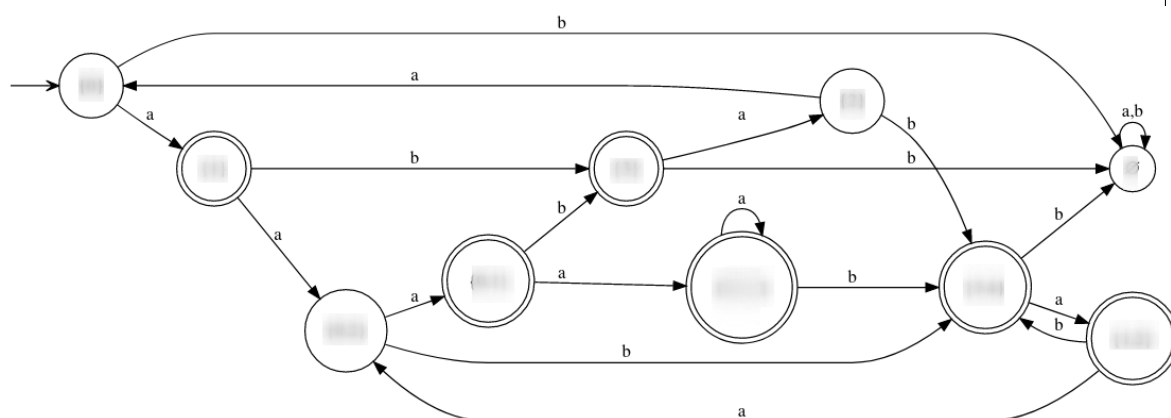


(-iii-)

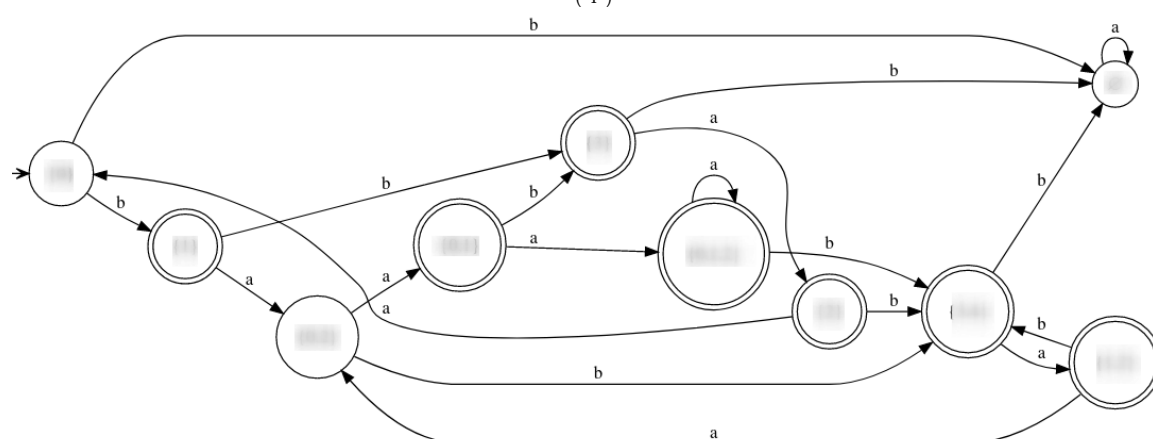


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

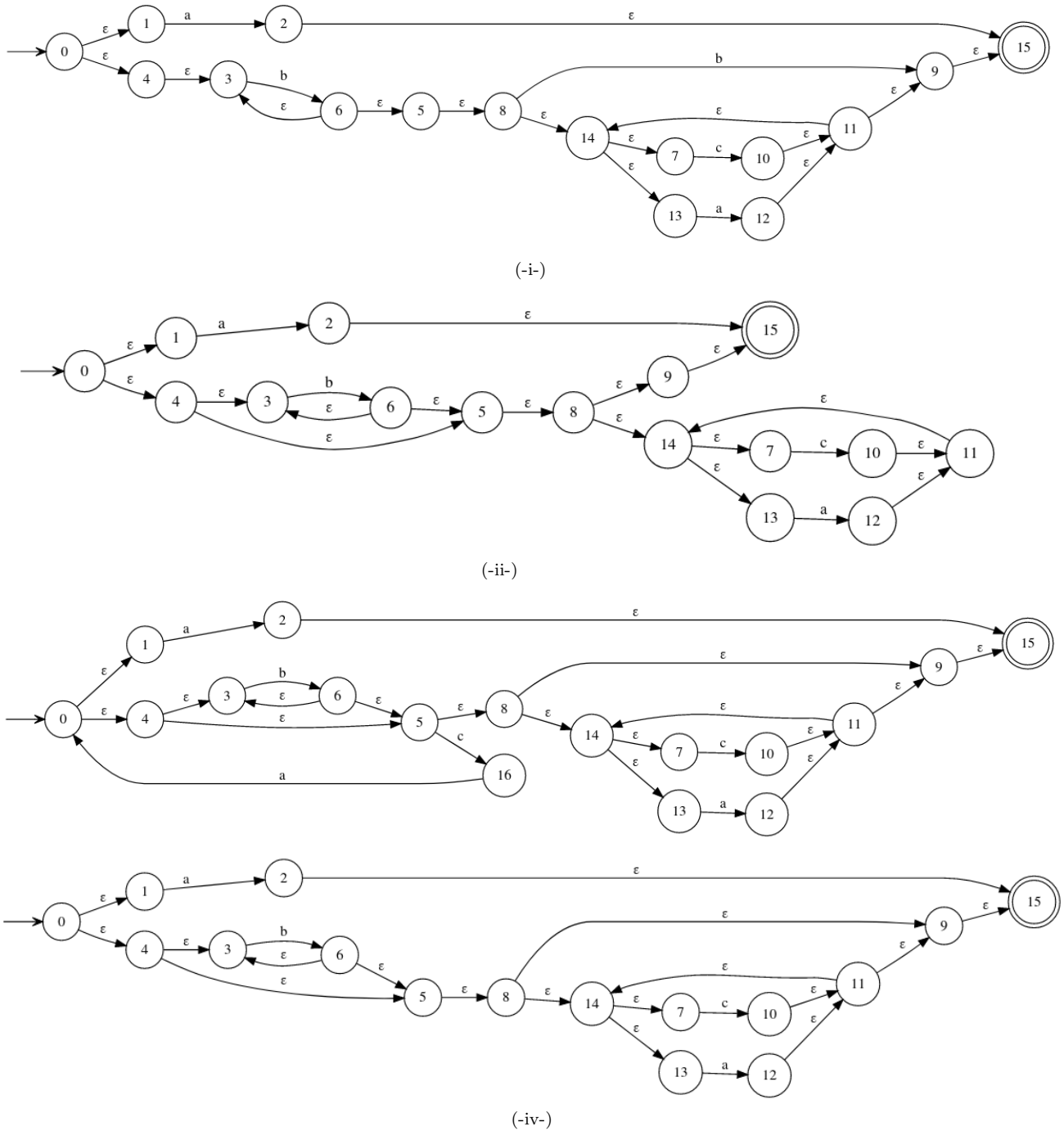
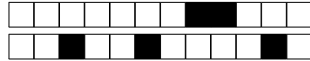


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e	f				j	k

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

a	b	c				g						m	n

Question 5 :

	b	c		e	f			i	j

Question 6 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

		c	d	e	f		h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

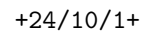
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, with a solid line at the very top. The paper is otherwise blank, with no text or markings.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c A accepte le langage universel.
- ☐ d A possède un état puits
- ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible.
- ☐ b $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d u n'est pas accepté par A .
- ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☐ f A n'est pas complet.
- ☐ g A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ i A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ b Σ est fermé par facteur.
- ☐ c Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe.
- ☐ e Σ^* est fermé par facteur.

- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ d Un mot peut être infini.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c A est complet. ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

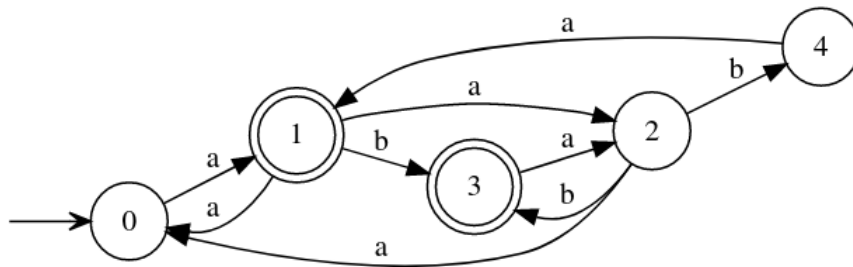
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

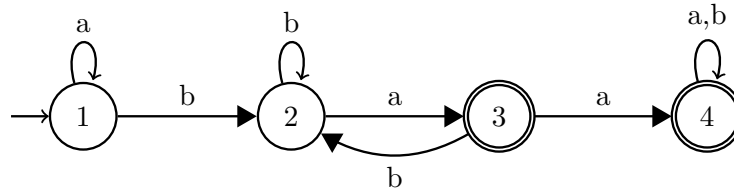
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 5 ☐ c 2 ☒ 4 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

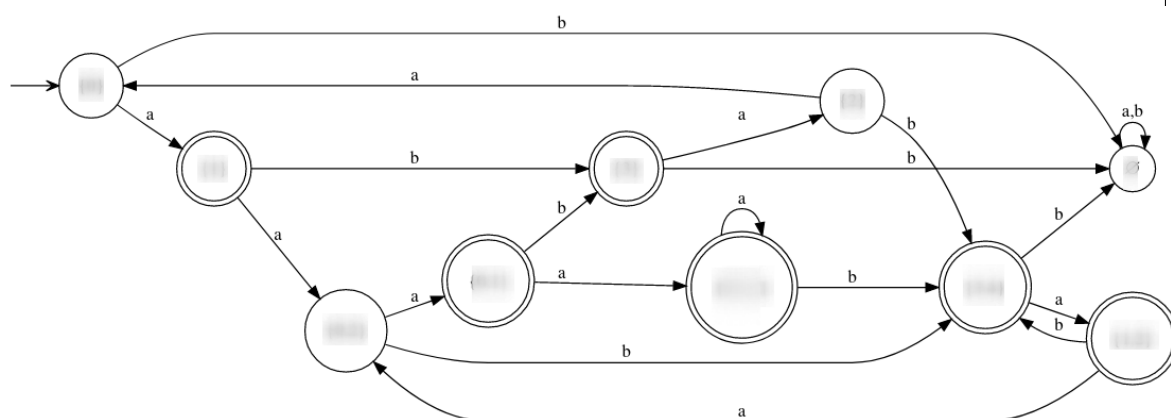


(-iii-)

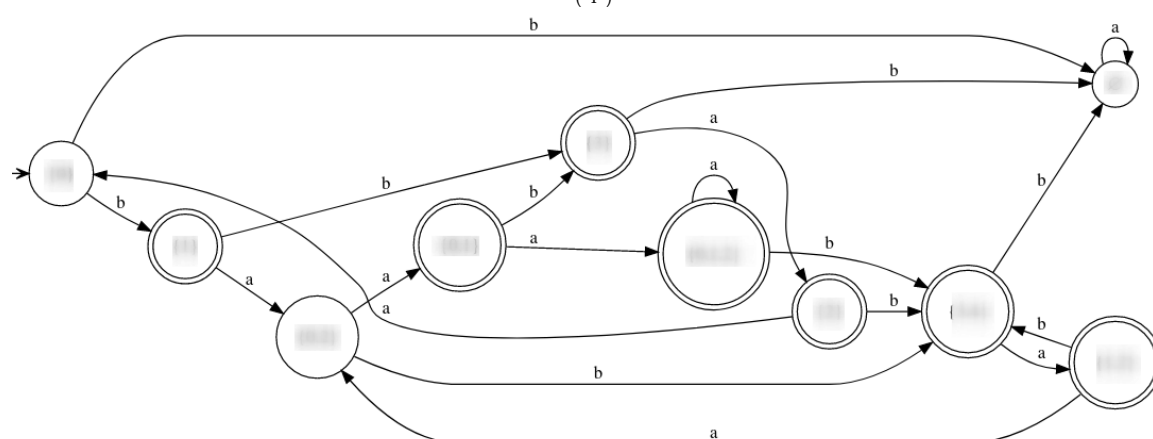


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

	b	c	d	e		g	h	i

Question 4 :

a				e		g	h		j	k

Question 5 :

	b		d		f	g		i	j

Question 6 :

a		c	d	e								m	n

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b			e	f	g		i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

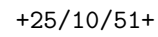
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a A accepte le langage universel. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.

☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g A possède un état puits

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Un mot est une application.

☐ c Un mot peut être vide. ☐ d Un mot est une fonction.

☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ h Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ j Un mot peut être infini.

☐ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A a des états accepteurs.
☐ A est complet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

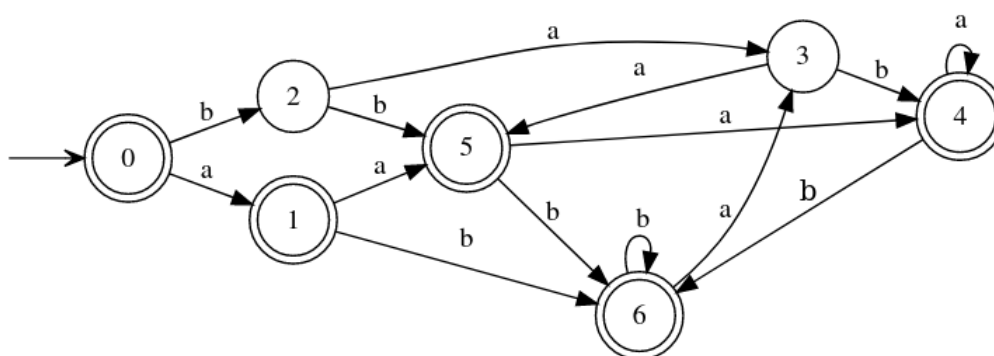
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

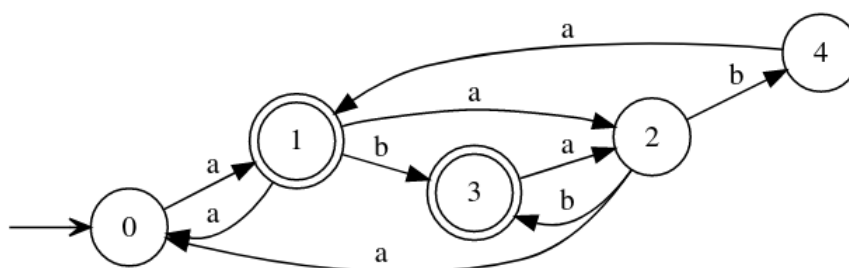
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

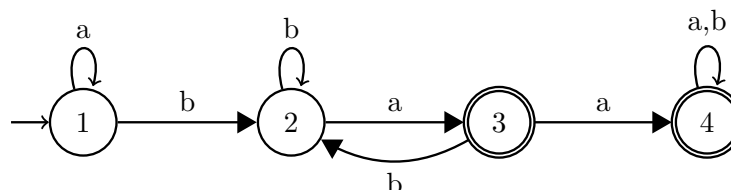
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 2 ☐ f 5 ☐ g 3

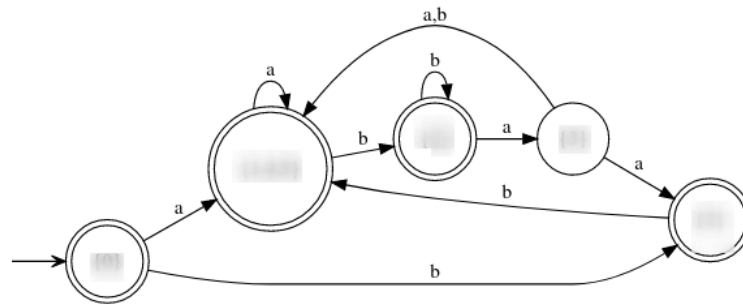
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



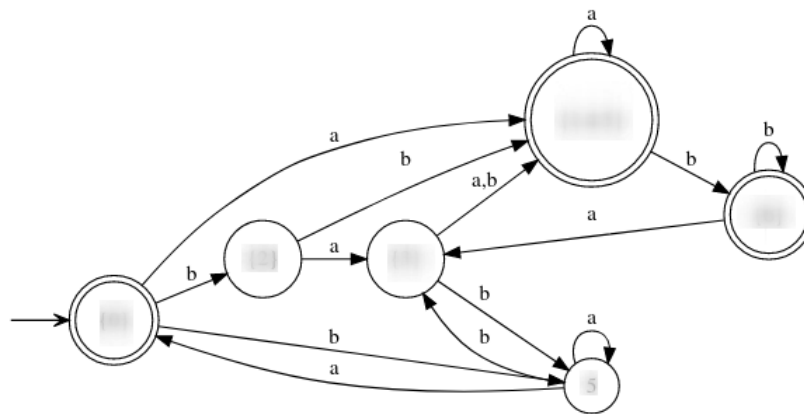
(-i-)



(-ii-)

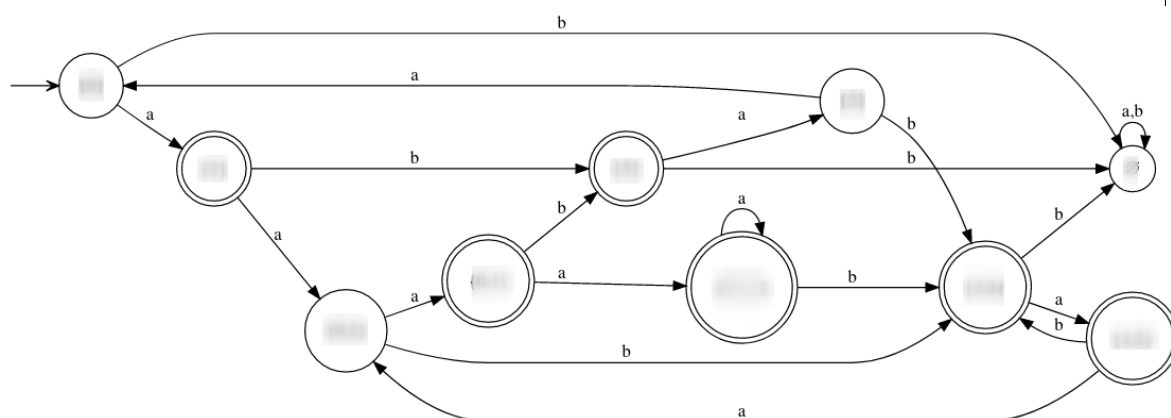


(-iii-)

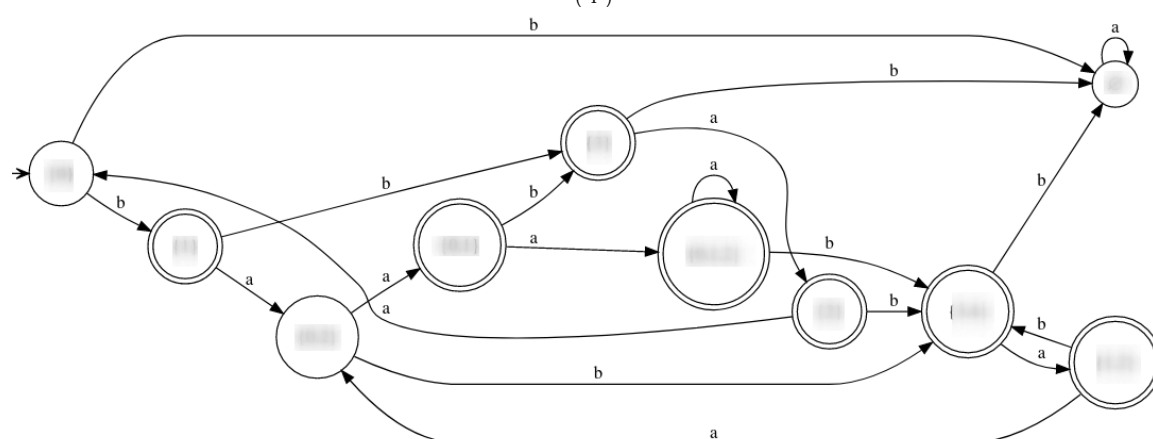


(-iv-)

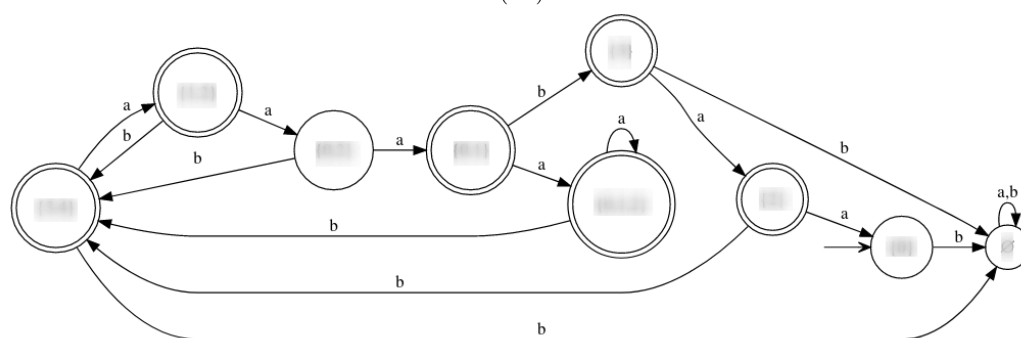
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

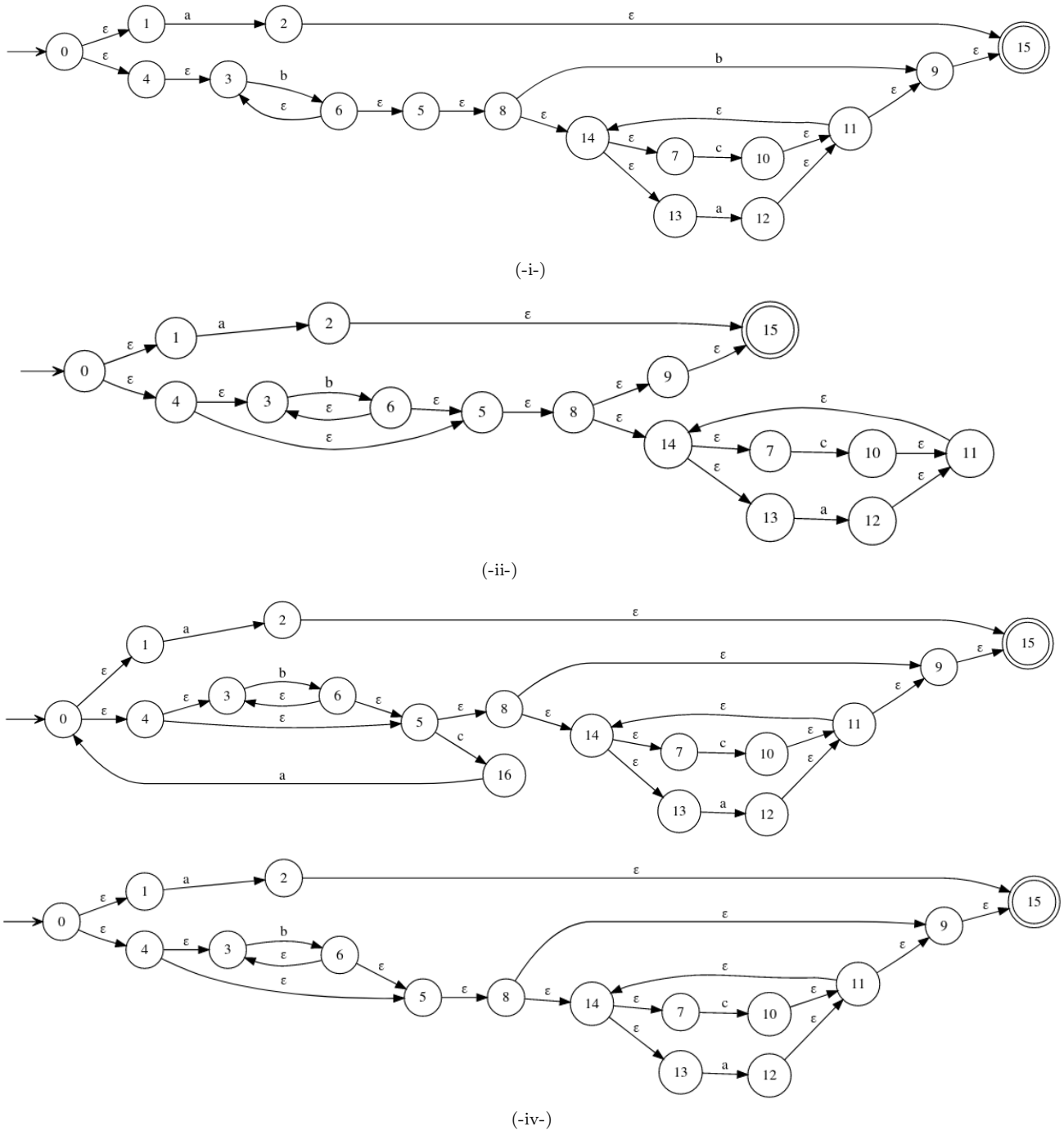


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

				e	f			i	j			m	n

Question 5 :

		c		e	f			i	j	k

Question 6 :

		c	d	e

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b	c			f			i	j

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c		e		g	h	i	j		l	

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

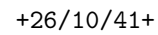
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ d A n'a pas d'état accepteur. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ g A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c A accepte le langage universel.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ c P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ b Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ d Un mot peut être infini.
- ☒ e Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ f Un mot est une fonction.
- ☒ g Un mot peut être vide. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ i Un mot est une application. ☒ j Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
	☐ $X_4 = a + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☒ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☒ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

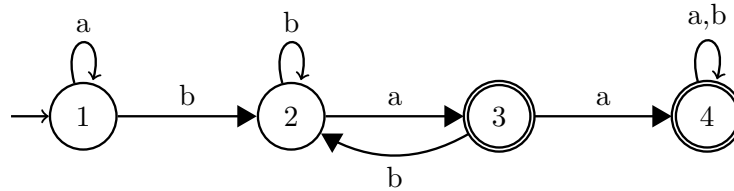
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 6 ☐ d 0 ☐ e 2 ☐ f 3 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

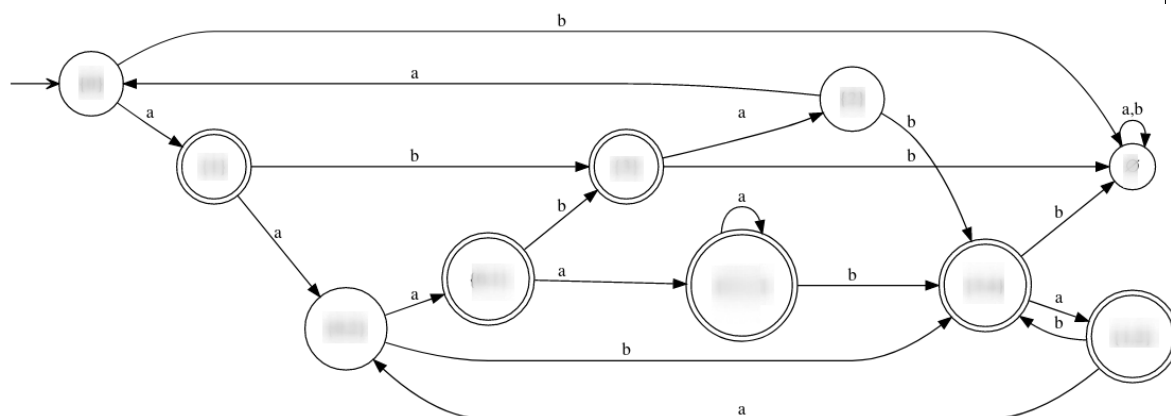


(-iii-)

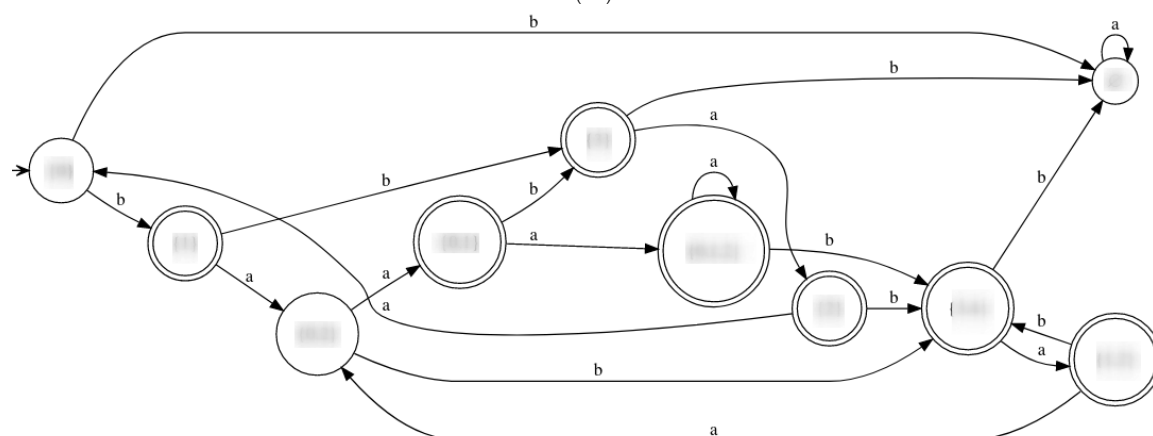


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



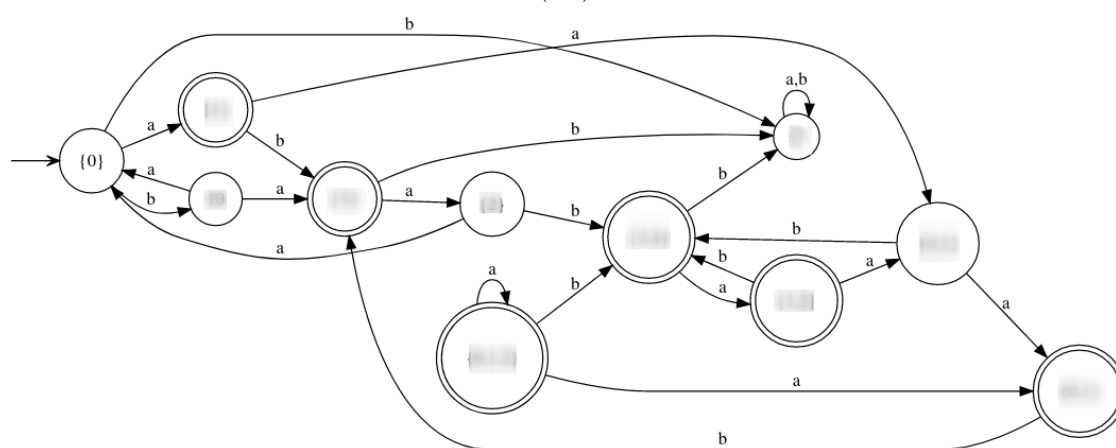
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

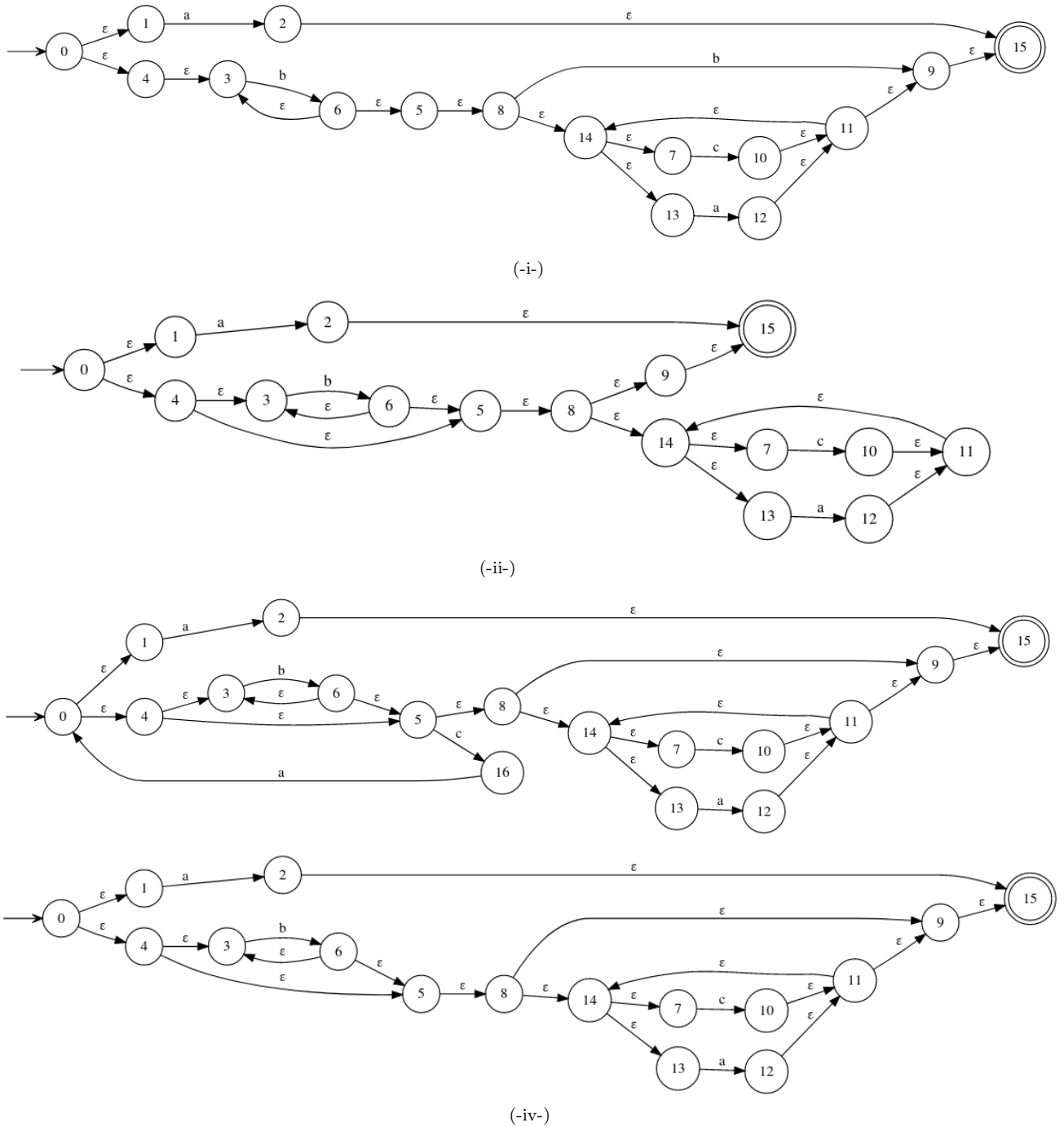


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d			g	h	i	j

Question 3 :

			d	e		g		i	j	k

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a		c		e	f	g	h	i

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

			d				h			k	l	m	n

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

	b	c	d		f	g	h	i	j			m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

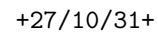
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une fonction.
- ☐ b Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot est une application.
- ☐ d Un mot peut être vide.
- ☐ e Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ h Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ i Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ k Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A .
- ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c A est complet.
- ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible.
- ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ c A a au moins un état accessible.
- ☐ d u n'est pas accepté par A .

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

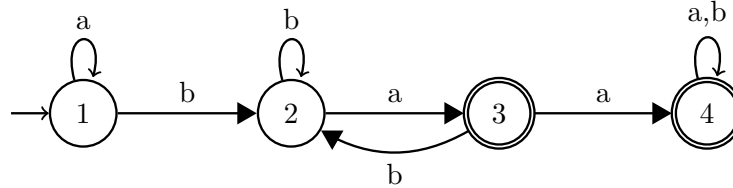
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 1 ☐ c 3 ☒ 4 ☐ e 5 ☐ f 0 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

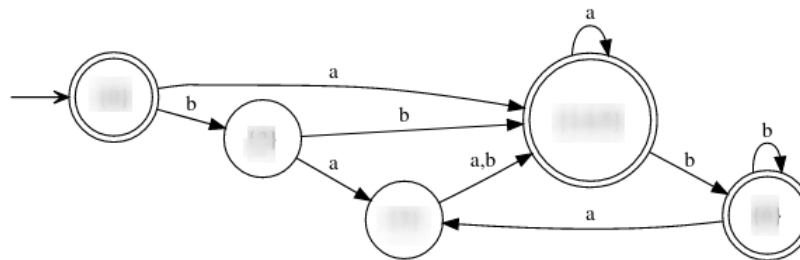
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



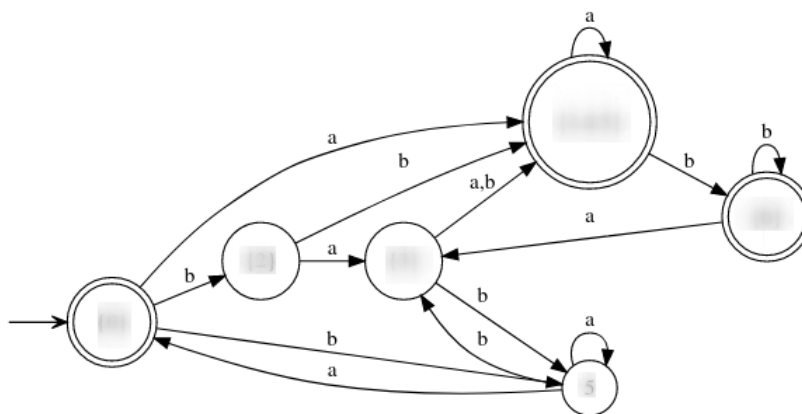
(-i-)



(-ii-)

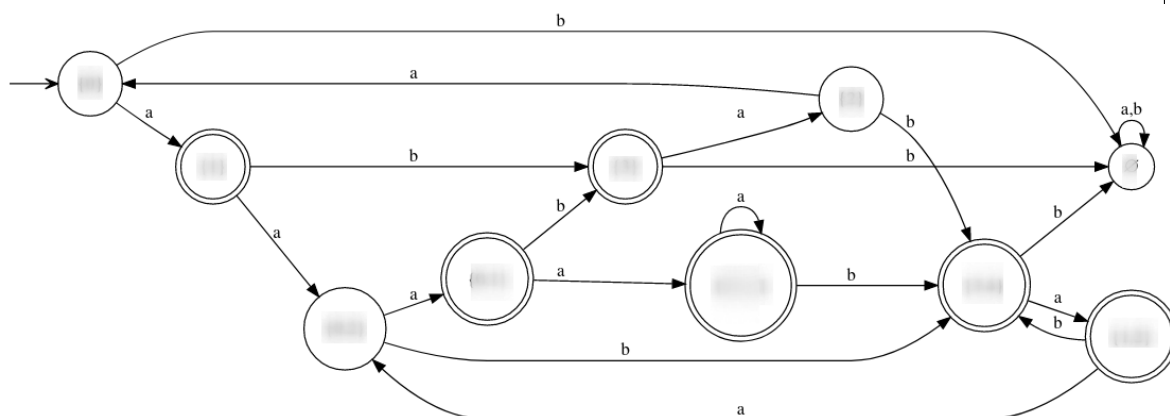


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

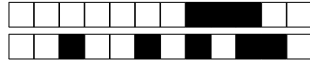


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

					f			i	j		l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a	b			e		g			j	k

Question 6 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 7 :

a		c			f		h	i	j

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d		f	g		i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

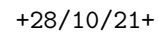
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.

- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot est une application. ☒ Un mot peut être vide.
- ☐ g Un mot peut être infini. ☒ Un mot est une fonction.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.
- ☐ e A est complet. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii- ☐ b la Figure 3-iv- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii- ☐ d la Figure 3-i-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii- ☐ b la Figure 4-iii- ☒ la Figure 4-i- ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

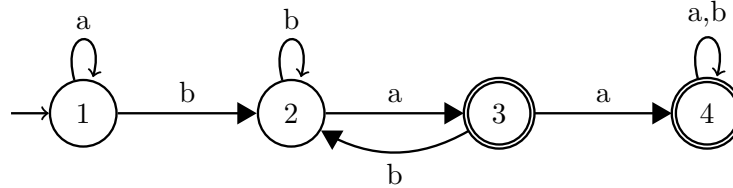
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 1 ☐ c 0 ☐ d 2 ☐ e 3 ☒ f 4 ☐ g 5

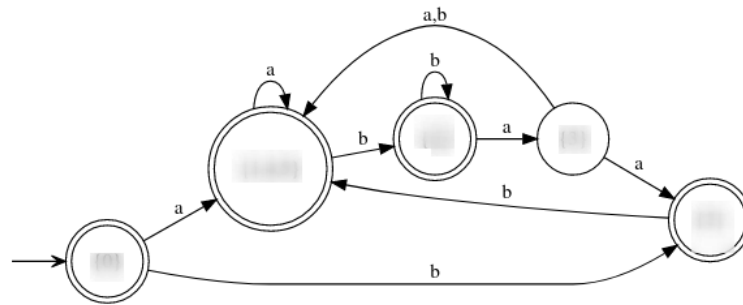
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



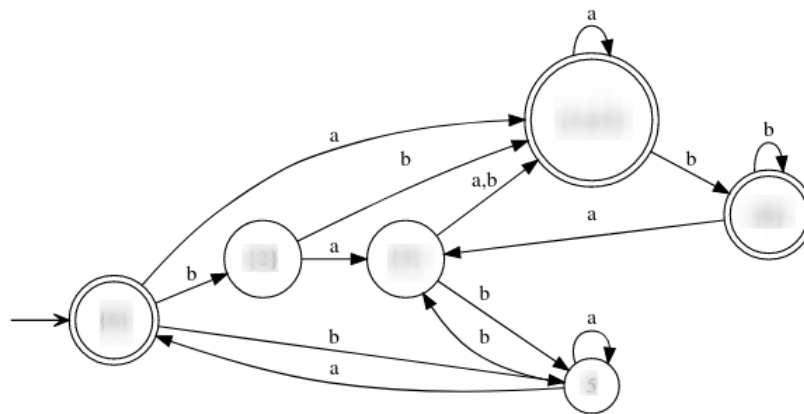
(-i-)



(-ii-)

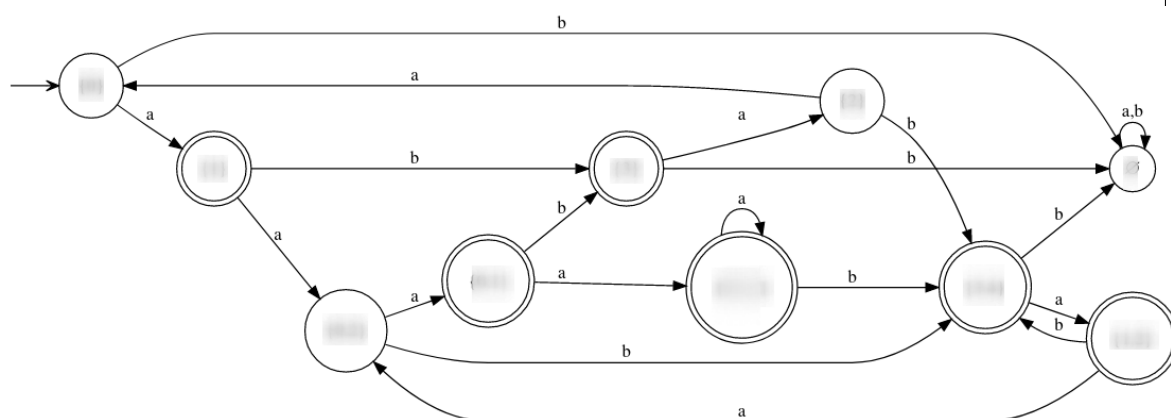


(-iii-)

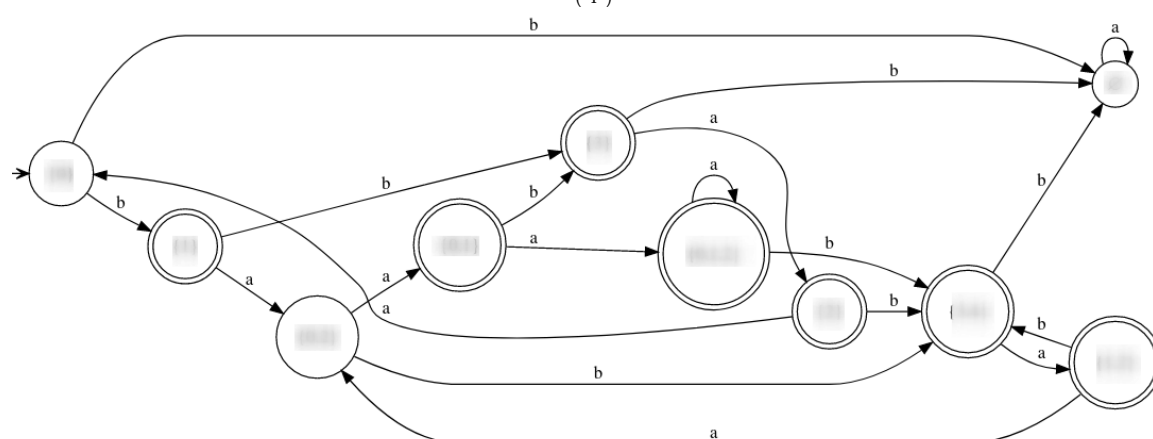


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

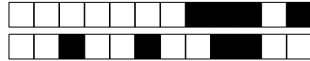


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ e ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k

Question 3 : ☐ b ☐ ☐ d ☐ e

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 5 : ☐ b ☐ ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ g ☐ ☐ i ☐ ☐ k ☐ ☐ m ☐ n

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ ☐ h ☐ ☐ ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ ☐ g ☐ h

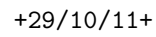
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐ ☐

Question 17 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A .
 ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état accessible.
 ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible.
 ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur.
 ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ A est complet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

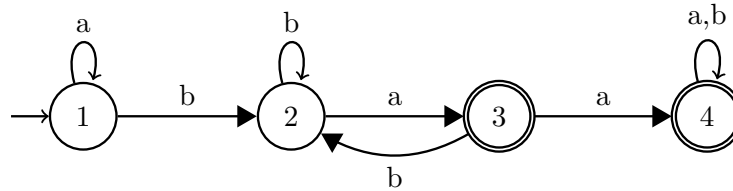
- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 3 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

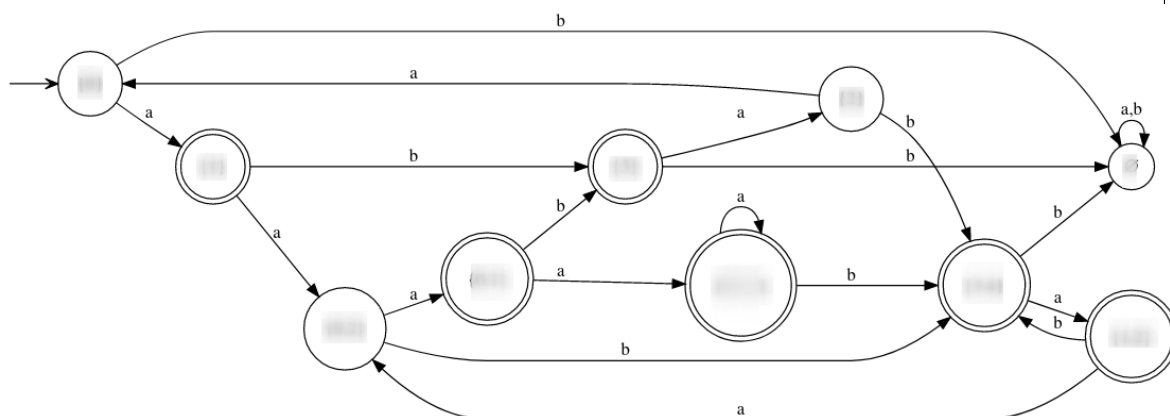


(-iii-)

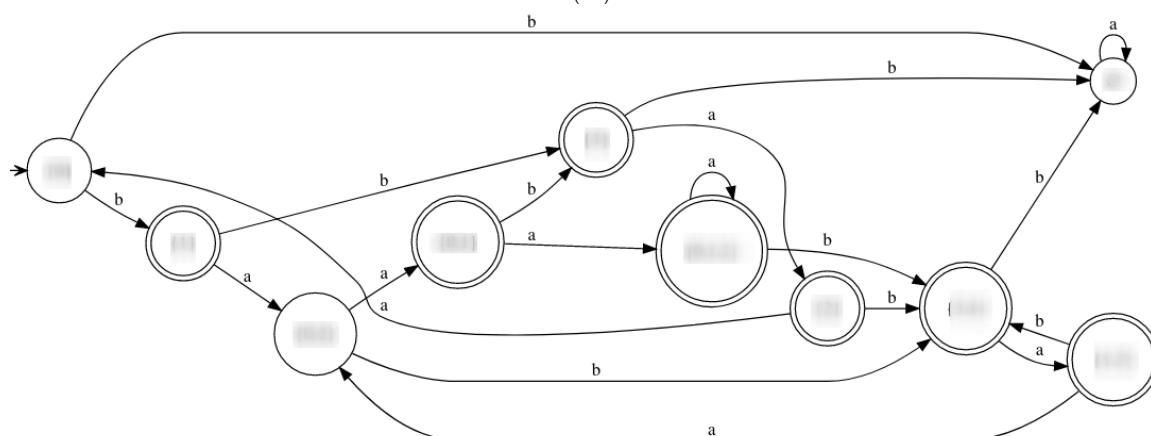


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

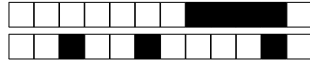


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f g   j k

Question 3 :  b  d e

Question 4 :   c d e  g  i j

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b c  e  g h i

Question 8 :     f  h  j  l m n

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 :  b c d e f  h  j k  m

Question 12 :  b c d e f g h

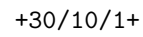
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

- ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une application.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles. ☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f A accepte le langage universel.
☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

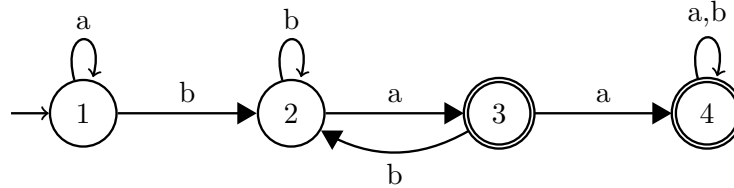
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 5 ☒ d 4 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

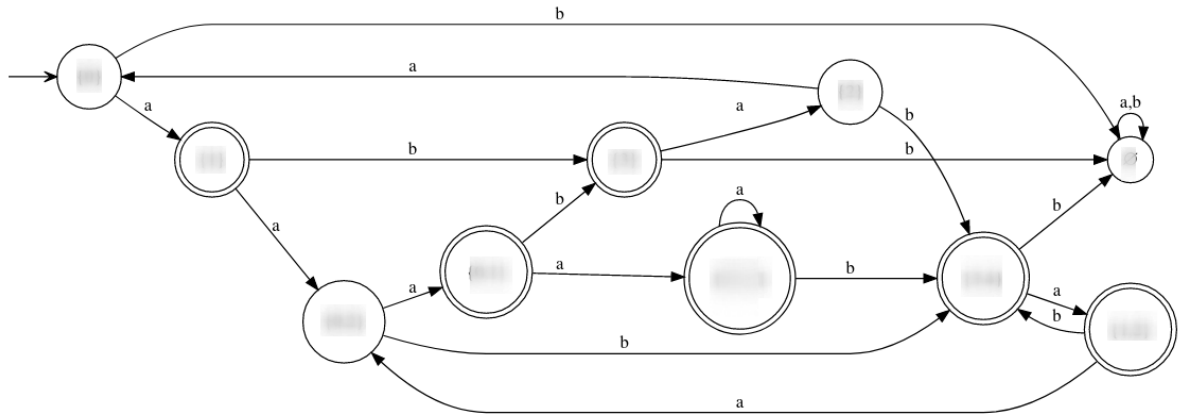


(-iii-)

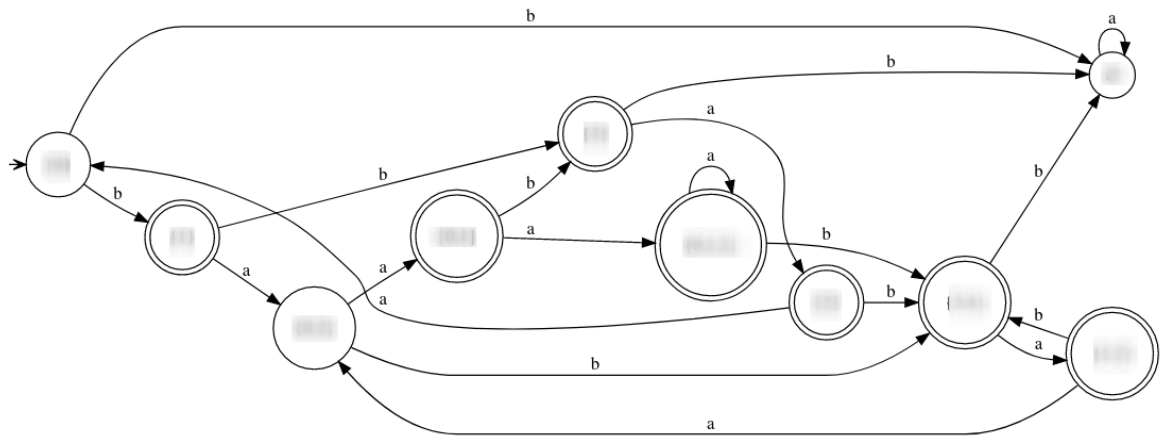


(-iv-)

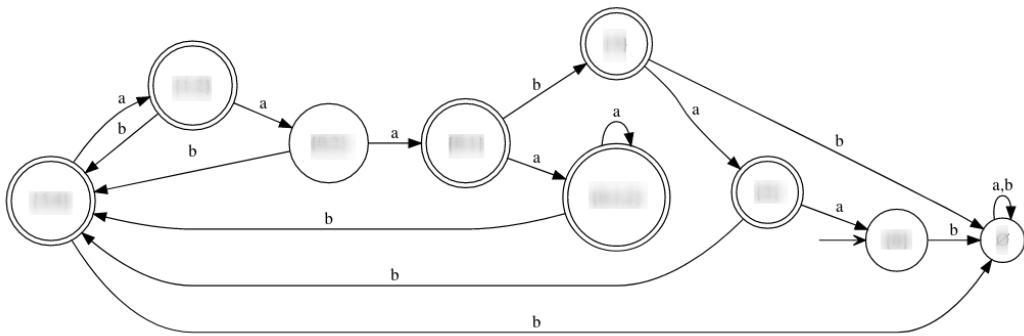
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



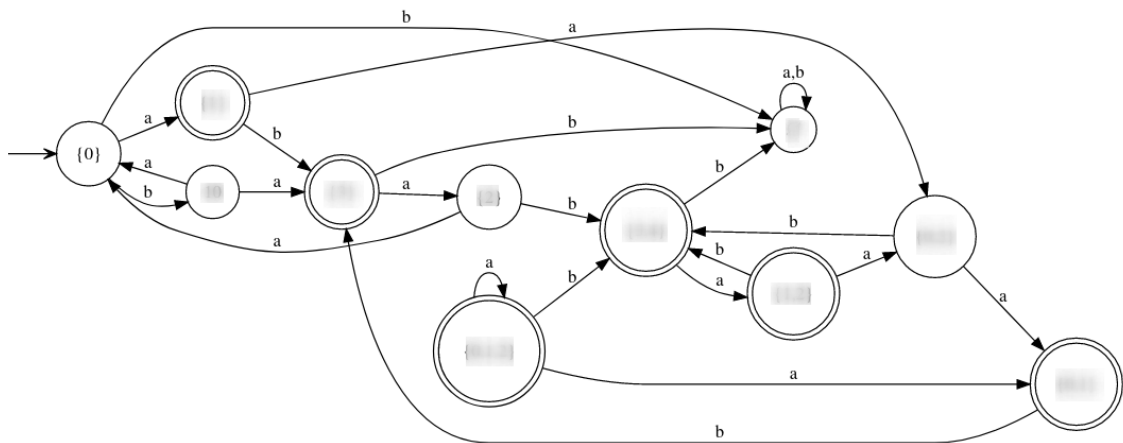
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c		e					j	k

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

	b	c		e	f			i	j

Question 6 :

		c	d				h		j			m	n

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b		d	e	f			i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

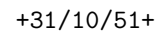
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a. A a au moins un état accessible.
 ☐ b. A a au moins un état co-accessible.
- ☐ c. u n'est pas accepté par A .
 ☐ d. A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ e. $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f. A n'est pas complet.
 ☐ g. A a au moins un état non accessible.
- ☐ h. Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ i. A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j. Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a. Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ b. Un mot est une fonction.
- ☐ c. Un mot peut être infini.
 ☐ d. Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e. Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ f. Un mot peut être vide.
- ☐ g. Un mot est une application.
 ☐ h. Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ i. Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ j. Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ k. Un mot possède une infinité d'extensions.
 ☐ l. Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m. Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a. P est forcément déterministe.
- ☐ b. Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ c. $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d. Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d u est accepté par A . ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ c Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par facteur.
☐ e Σ est fermé par préfixe. ☒ f Σ^* est fermé par préfixe. ☒ g Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ d A possède un état puits ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

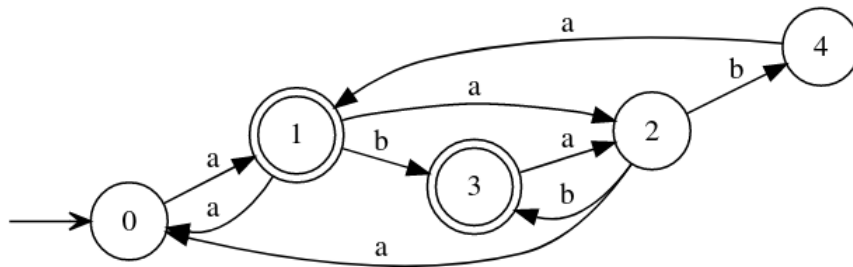
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

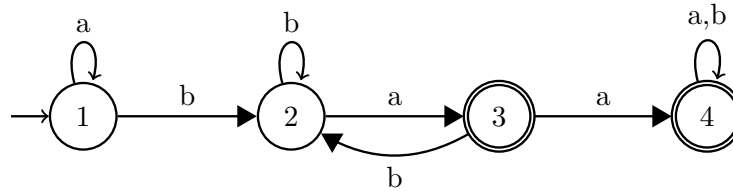
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

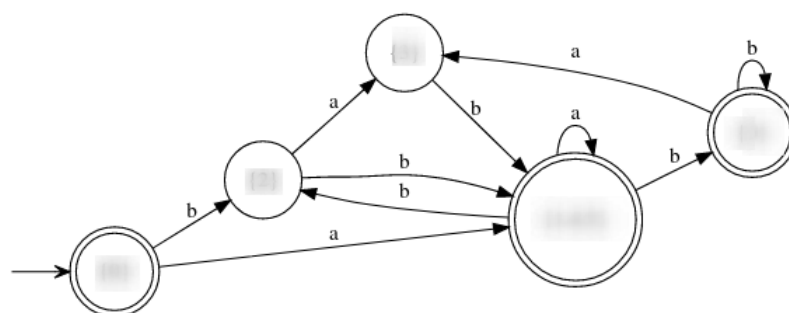
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 1 ☒ 4 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 0

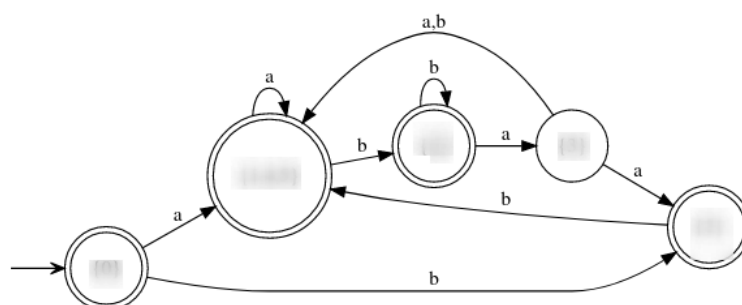
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

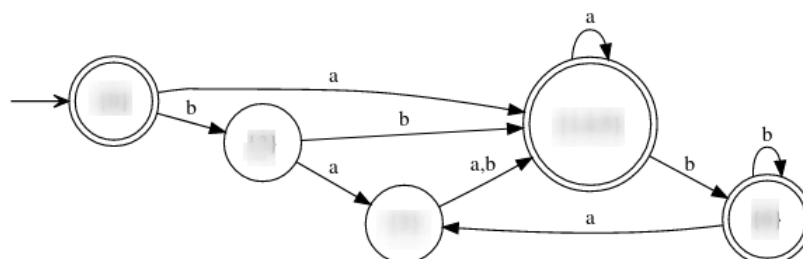
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



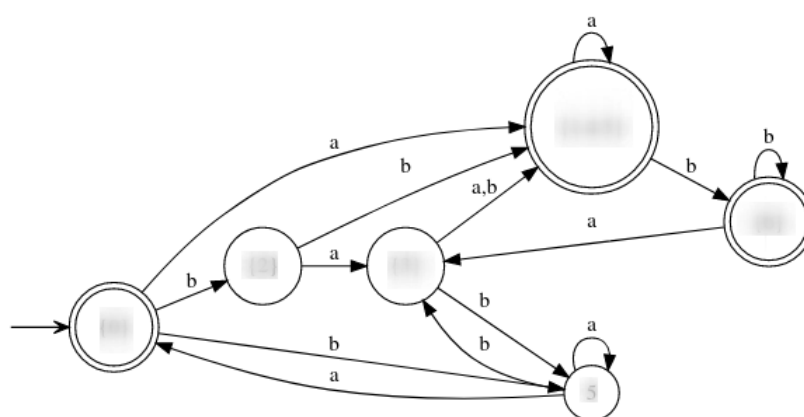
(-i-)



(-ii-)

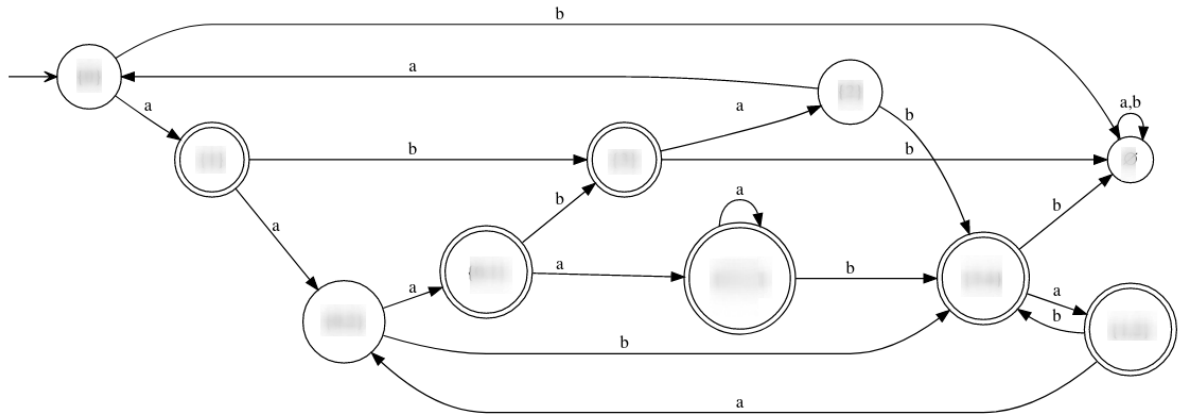


(-iii-)

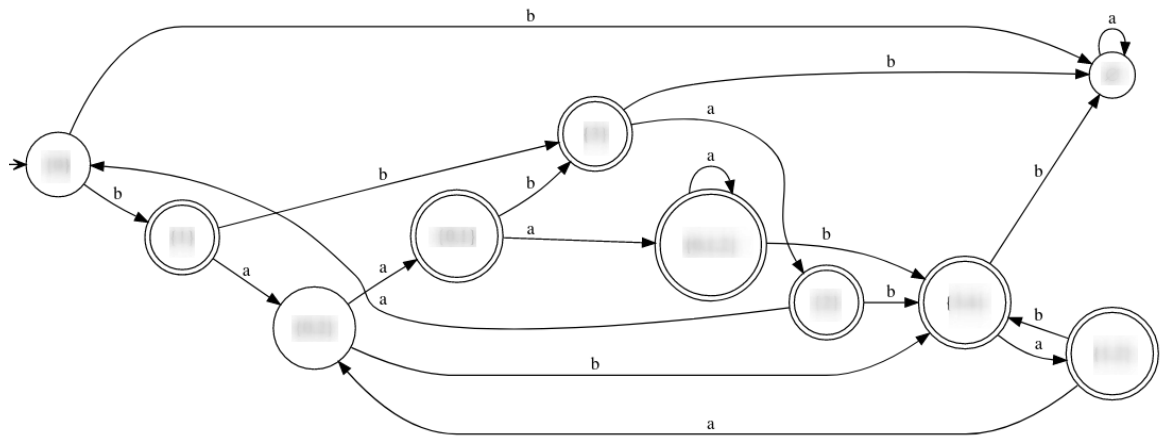


(-iv-)

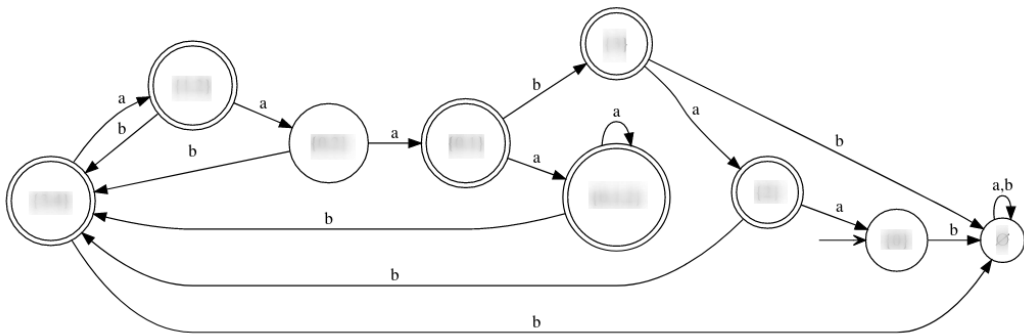
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



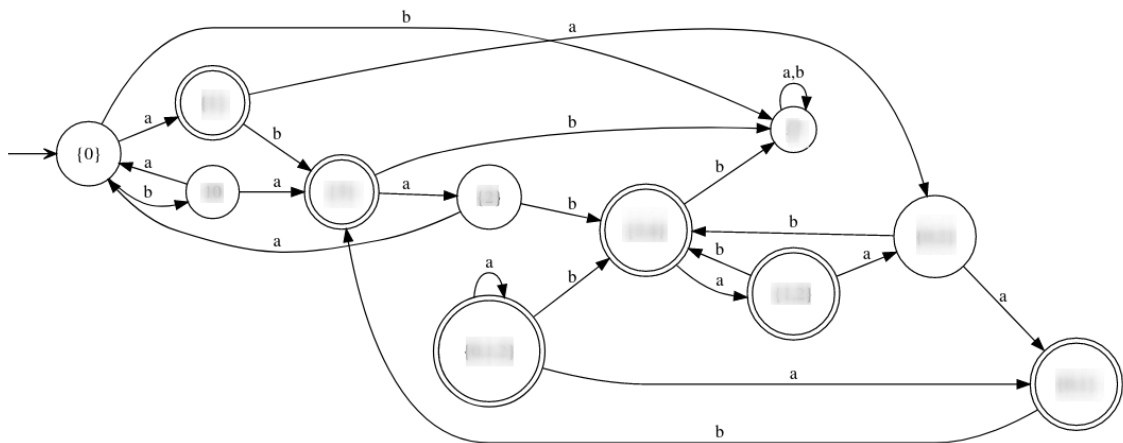
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

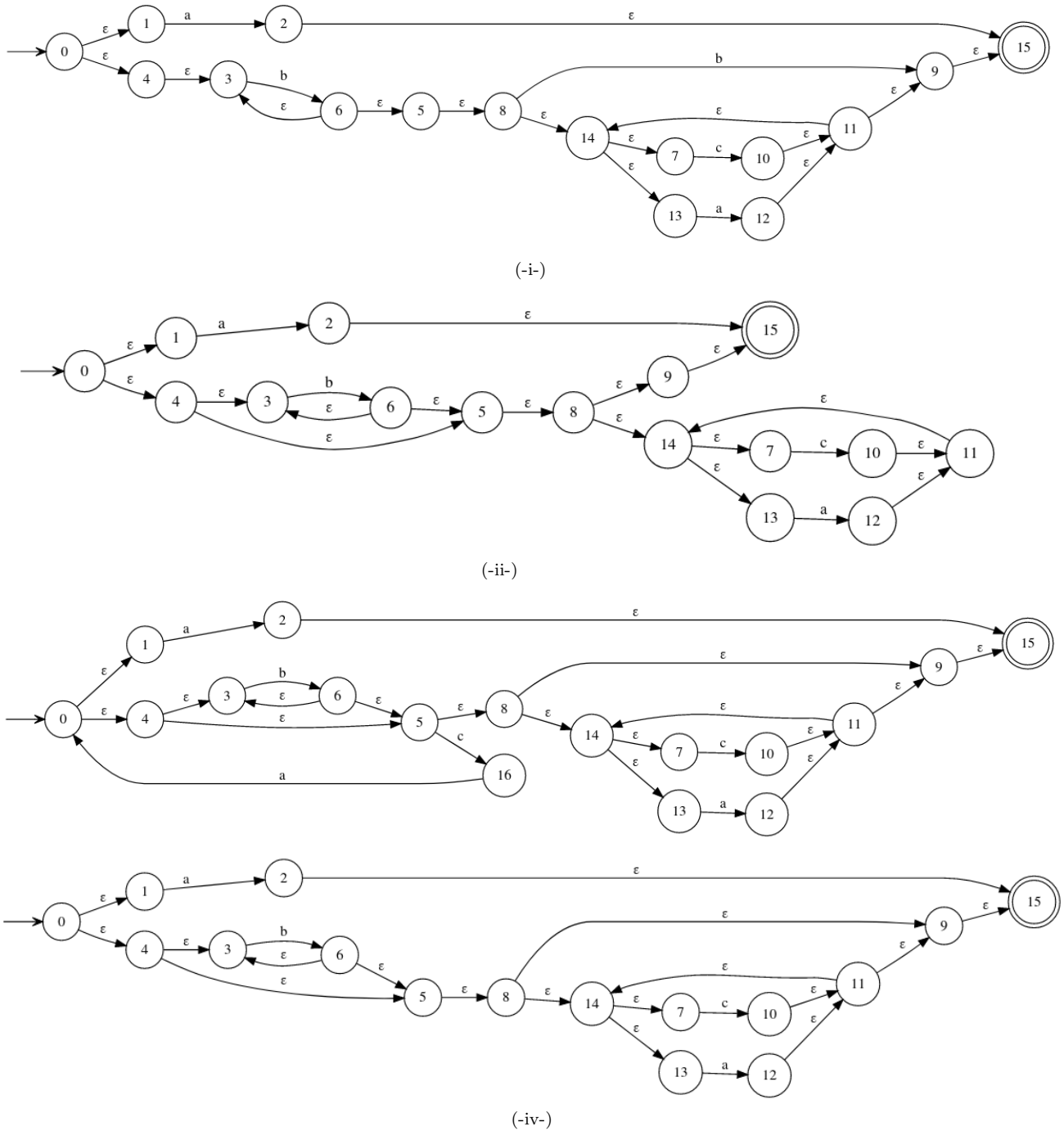


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d   g  i j k

Question 3 : a  c     j  l m n

Question 4 :  b  d e

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :  b  d e   h i j

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a b c d e   h i

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a b c d  f   j k l m

Question 12 : a b  d e f g h

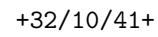
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐ Un mot est une application.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot est une fonction.	☐ Un mot peut être infini.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.	☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ est fermé par préfixe.	☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.	☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur.	☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.	

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- | |
|--|
| ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même. |
| ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage. |
| ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ. |
| ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes. |
| ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte. |

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ A accepte le langage universel.	☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ nécessairement $ Q \geq 2$.	☐ $ \delta = Q \times \Sigma $.
	☐ $ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.

- ☐ f A possède un état puits
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c A a des états accepteurs. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ b A a au moins un état co-accessible. ☒ A n'est pas complet.
- ☐ d A n'a pas d'état accepteur. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☒ A a au moins un état accessible. ☐ i A a au moins un état non accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

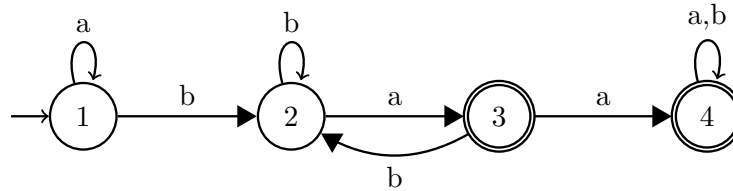
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 6 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

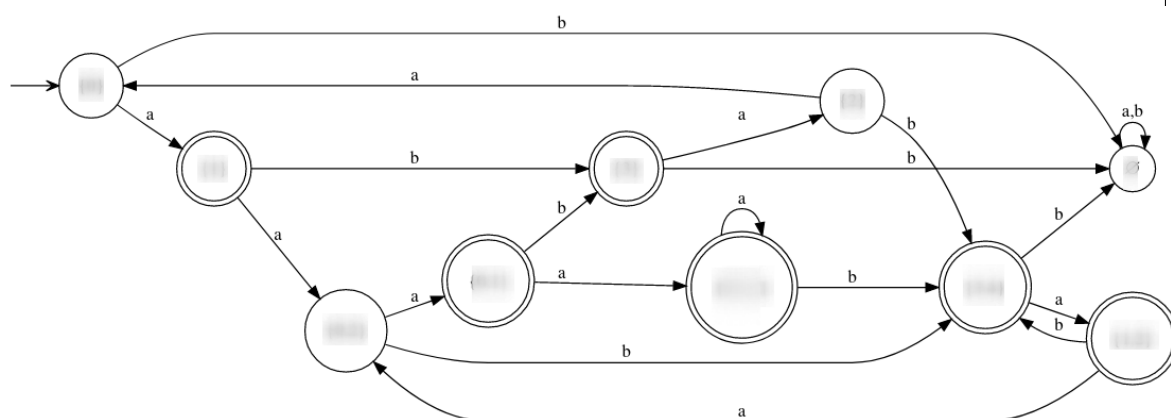


(-iii-)

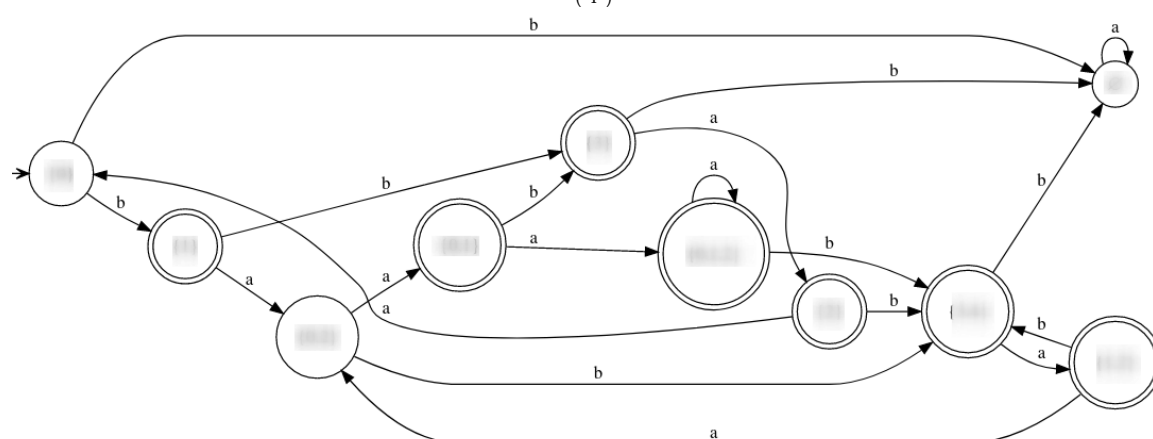


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

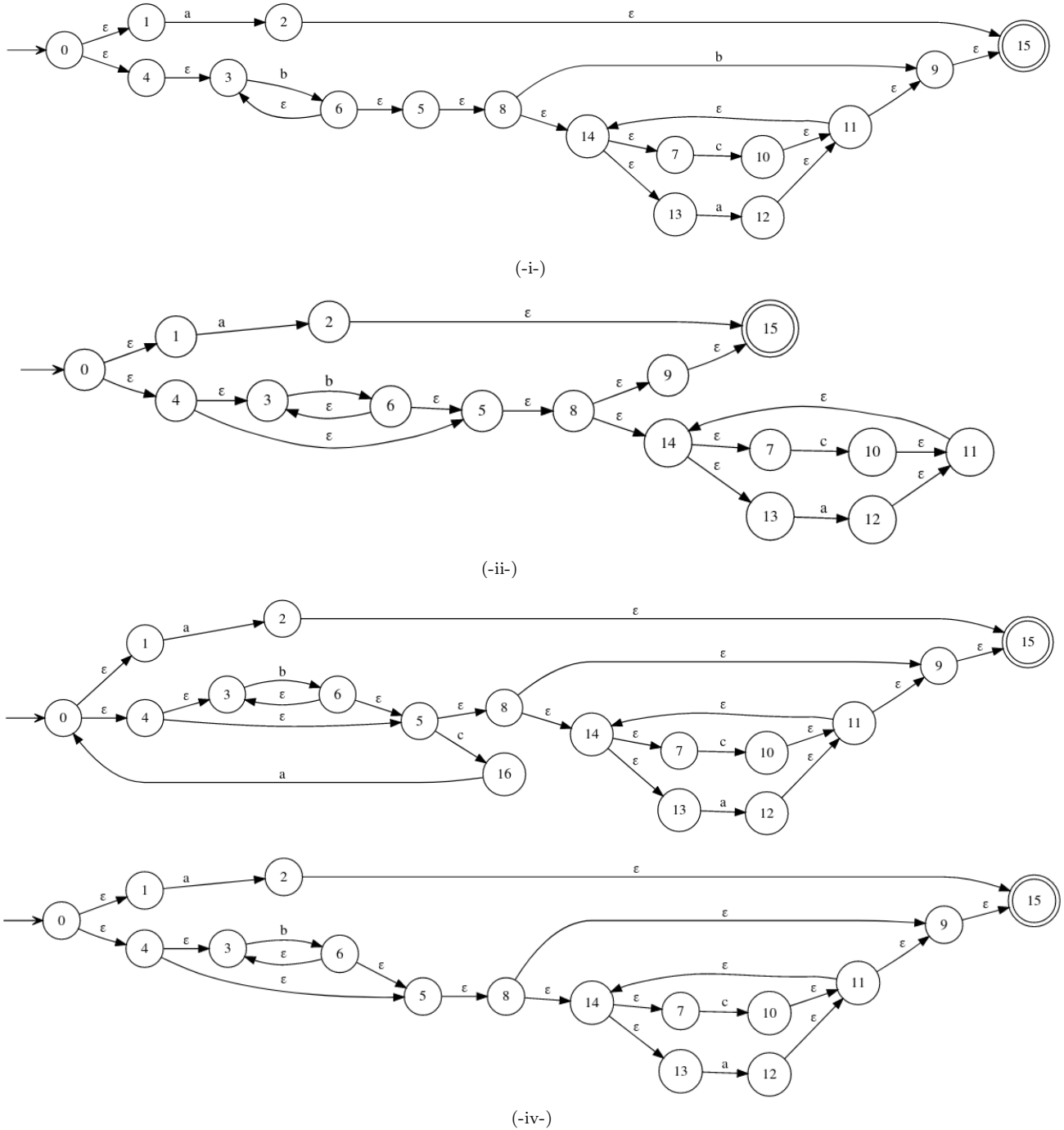


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b   e   h  j   m n

Question 3 :   c d  f g  i j

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d  f  h i

Question 6 :  b  d e

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 :  b  d  f   i j k

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c d e f g    k l 

Question 12 : a b c  e f g h

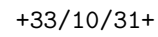
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A a des états accepteurs.

☐ u est accepté par A .

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.

☐ Un mot est une application. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A .
 ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ c A a au moins un état non accessible.
 ☐ d A a au moins un état co-accessible.
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
 ☐ f A a au moins un état non co-accessible.
 ☐ A n'est pas complet.
- ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
 ☐ b A accepte le langage universel.
 ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f A possède un état puits
 ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-.
 ☐ b la Figure 3-ii-.
 ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-.
 ☐ b la Figure 4-iii-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 5

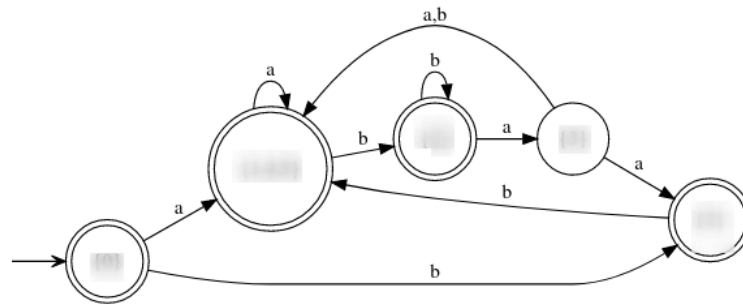
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



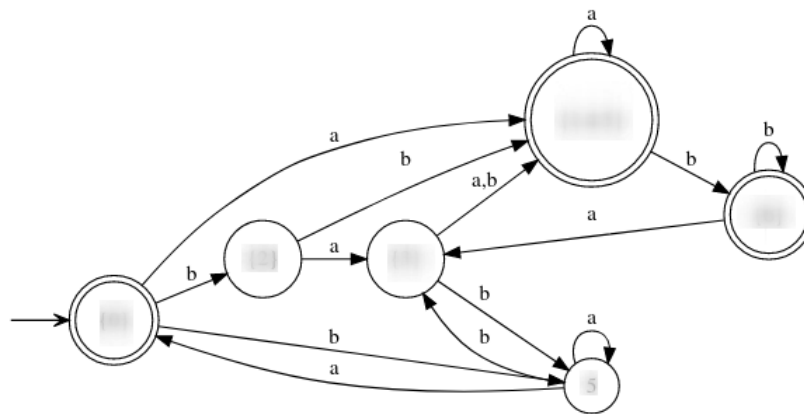
(-i-)



(-ii-)

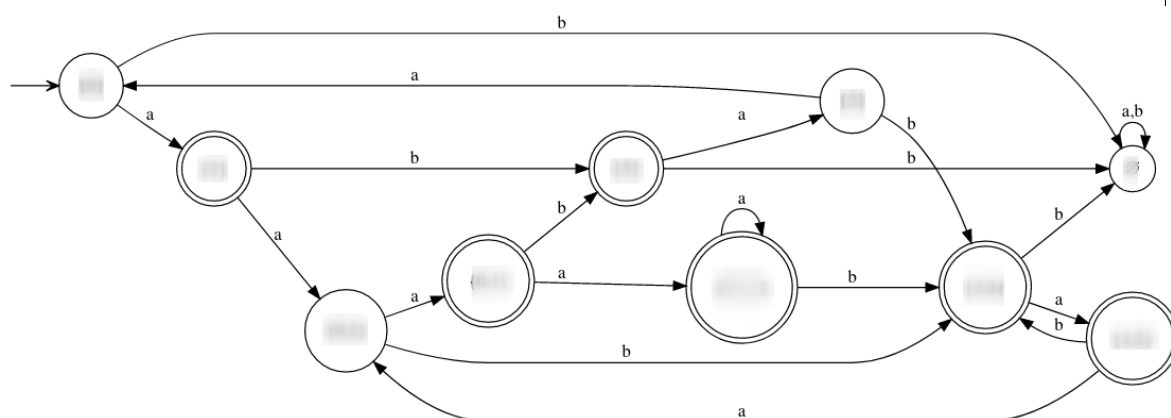


(-iii-)

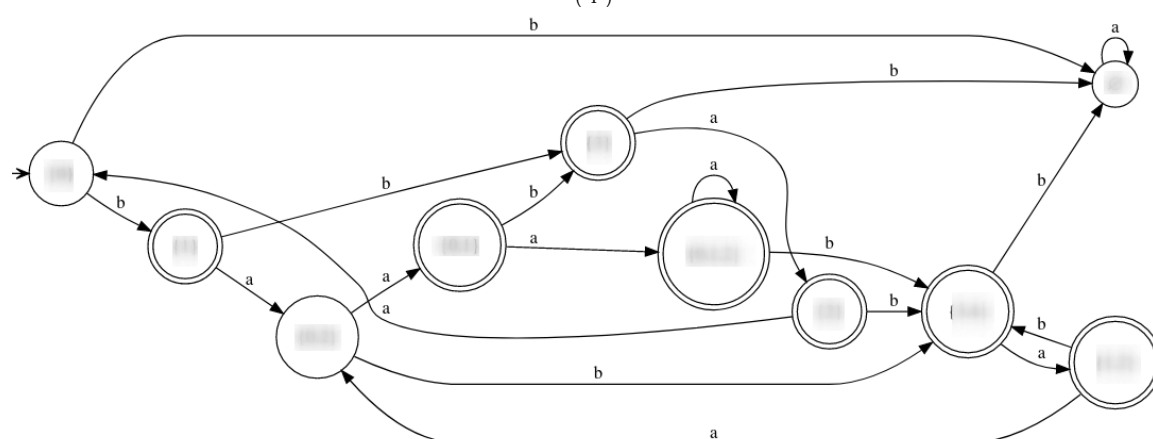


(-iv-)

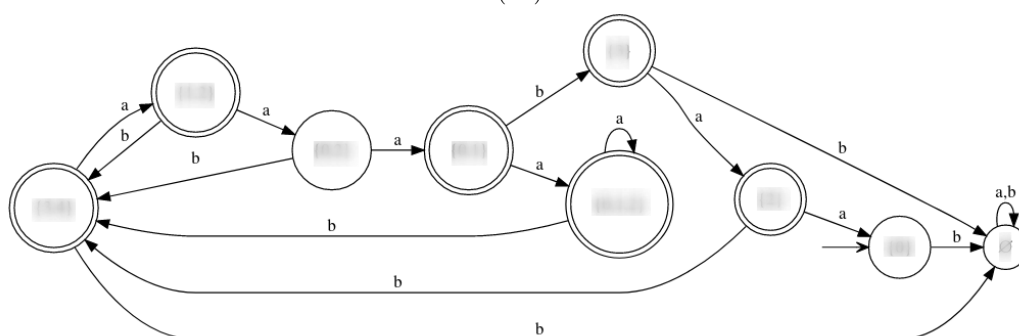
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

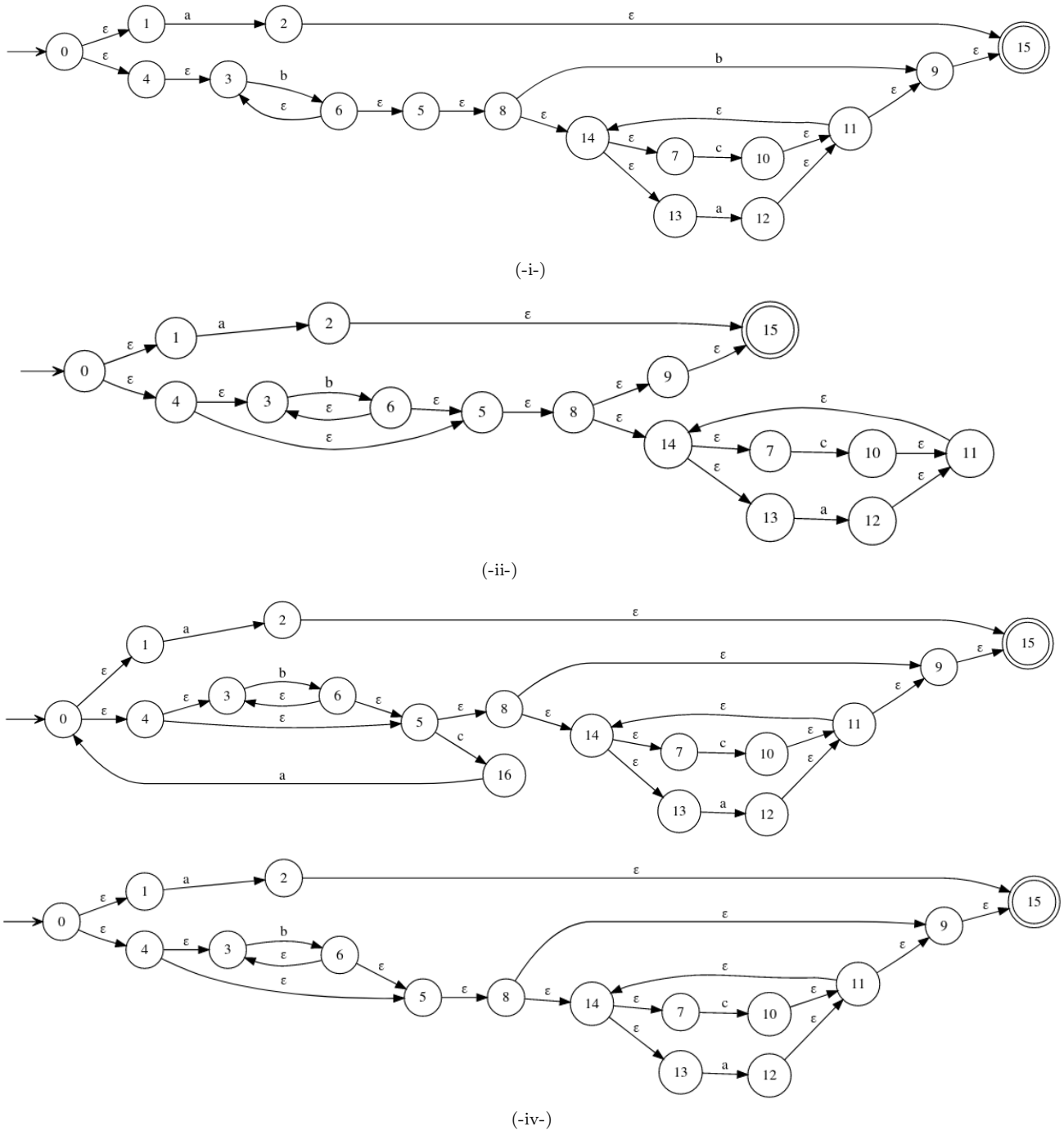


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :  b  d e   h i j

Question 5 :   c   f  h   k  m n

Question 6 :   c d  f  h  j k

Question 7 : a b c d 

Question 8 :  b c d  f g h i

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a   d   g h i j k l m

Question 12 : a b  d e f g h

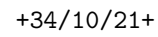
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ b P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ b u n'est pas accepté par A .
☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A a au moins un état co-accessible.
☒ e A a au moins un état accessible. ☐ f A a au moins un état non accessible.
☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☒ h A n'est pas complet.
☒ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e A possède un état puits ☐ f A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-.
- ☐ b la Figure 3-ii-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-.
- ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-.
- ☐ b la Figure 4-iii-.
- ☐ c la Figure 4-iv-.
- ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a+b)^*$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^+aX_3$	☐ $X_2 = b^+aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

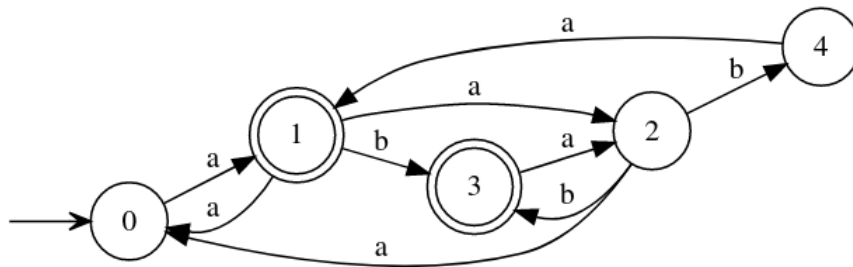
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

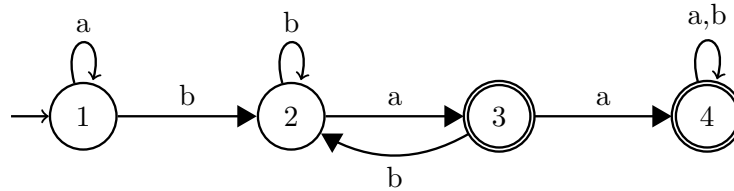
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ 4 ☐ c 0 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 6 ☐ g 5

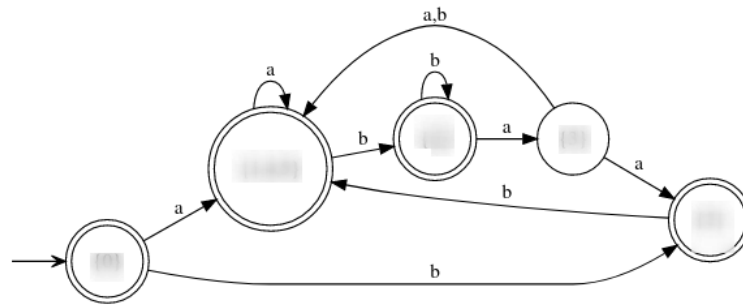
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

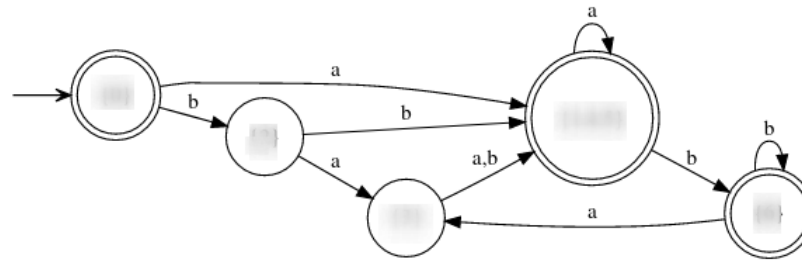
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



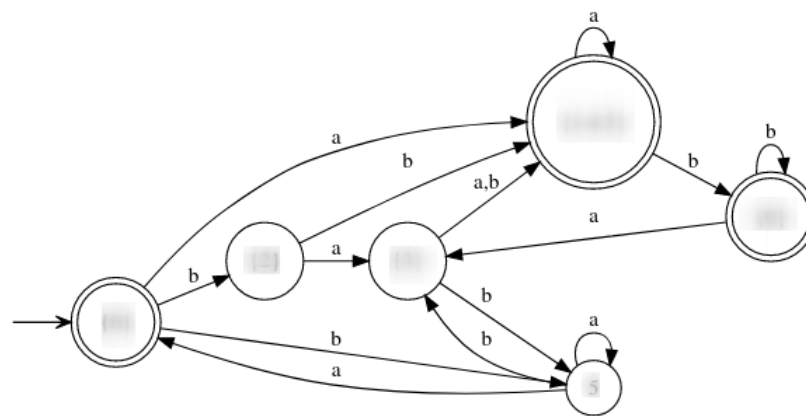
(-i-)



(-ii-)

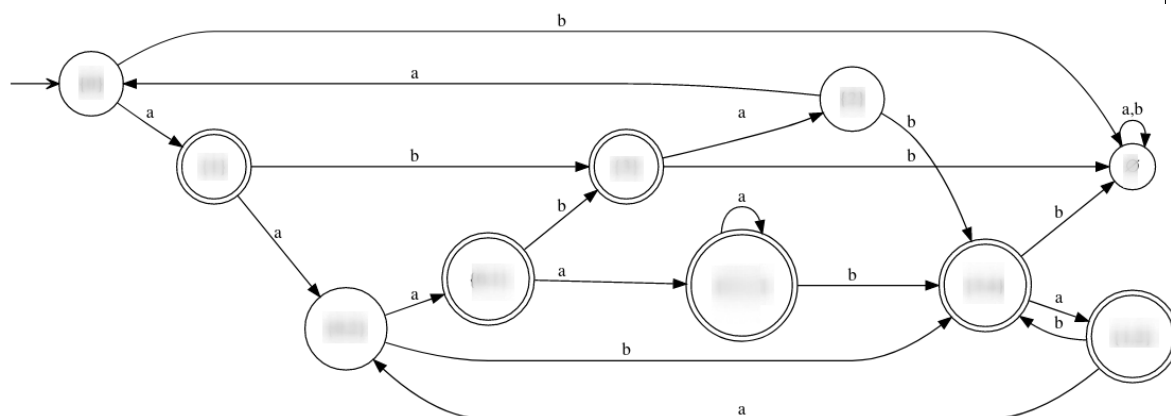


(-iii-)

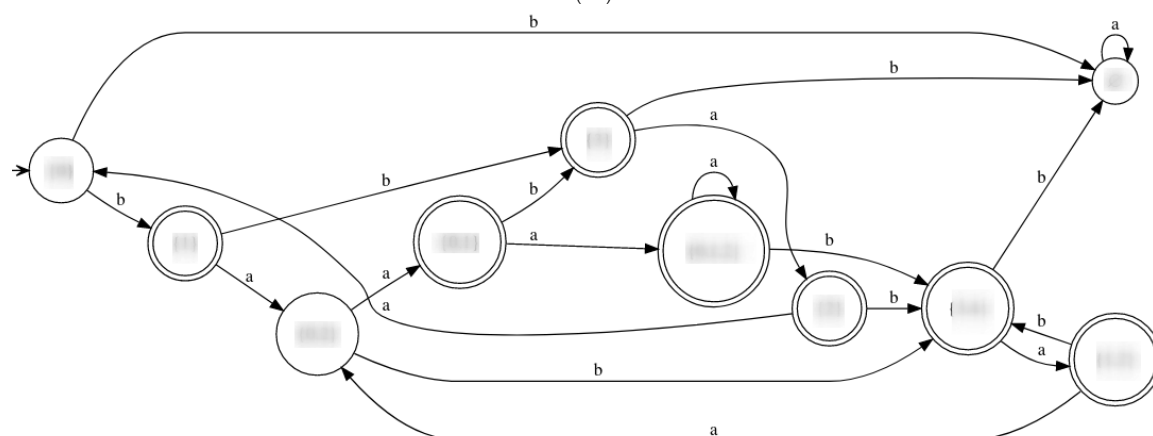


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



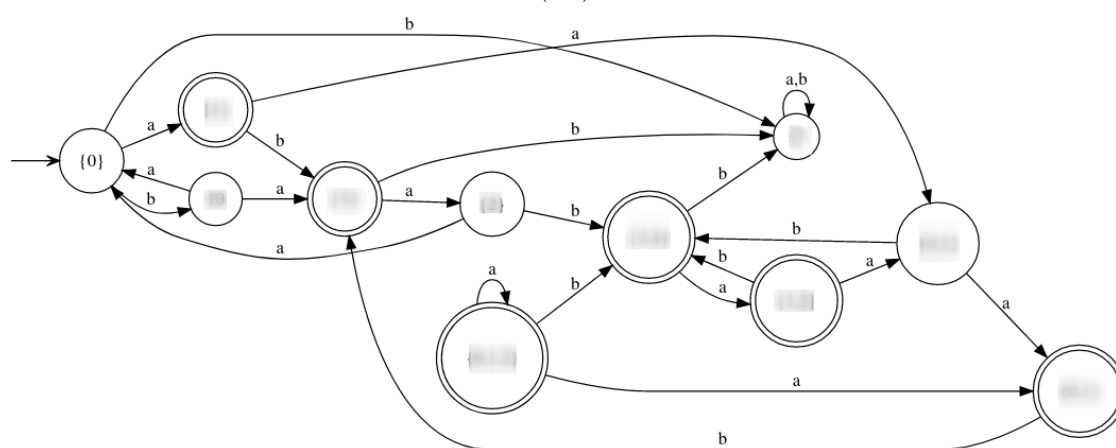
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

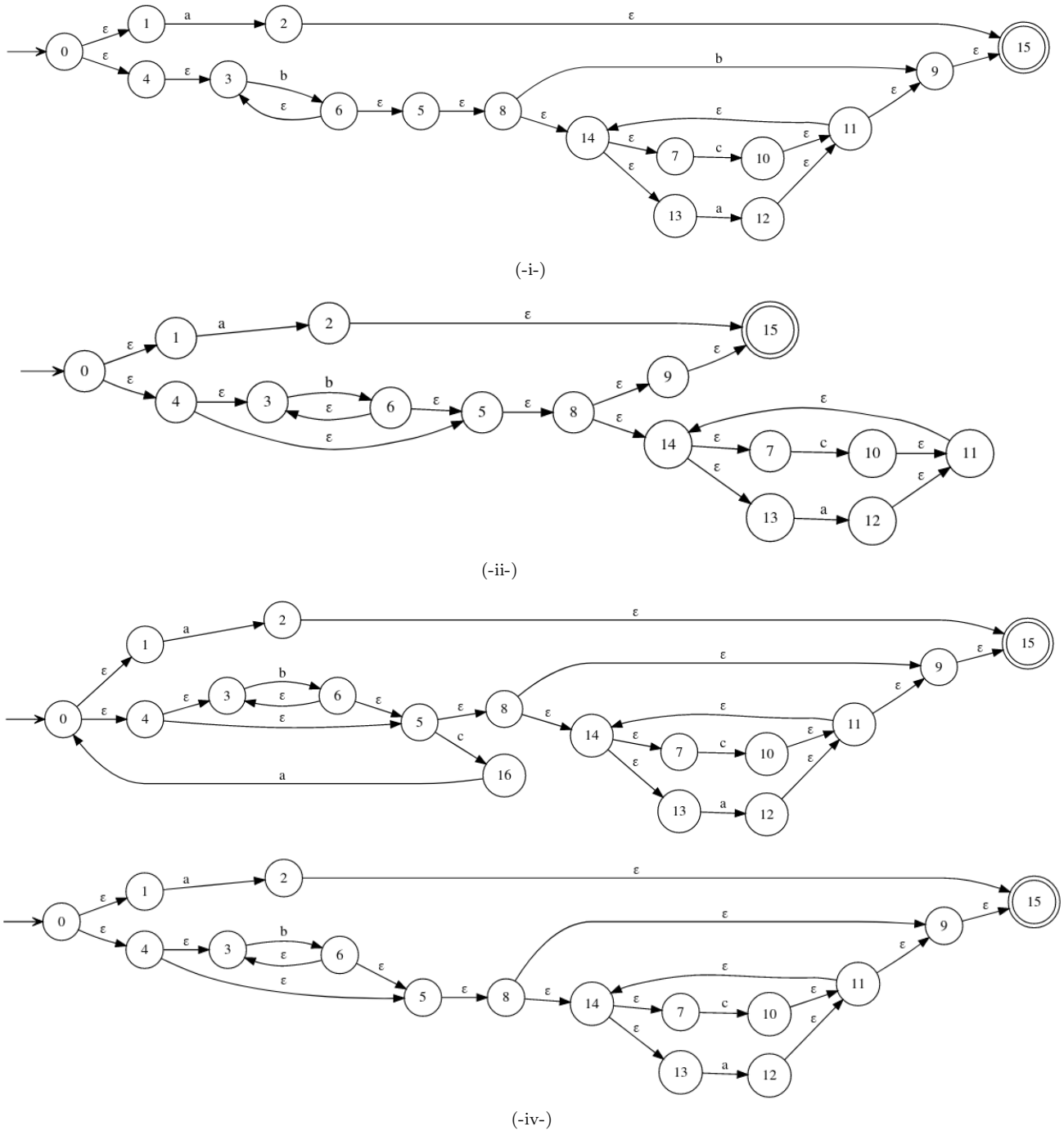


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

		c	d		f	g			j	k

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a					f		h				l	m	n

Question 7 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 8 :

		c			f	g	h	i	j

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

		c	d	e	f	g	h		j		l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

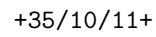
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e u est accepté par A . ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d A possède un état puits ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ d A n'a pas d'état accepteur. ☒ A a au moins un état accessible.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

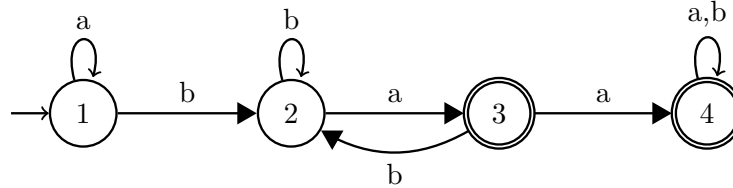
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 6 ☐ c 0 ☐ d 3 ☐ e 5 ☒ f 4 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

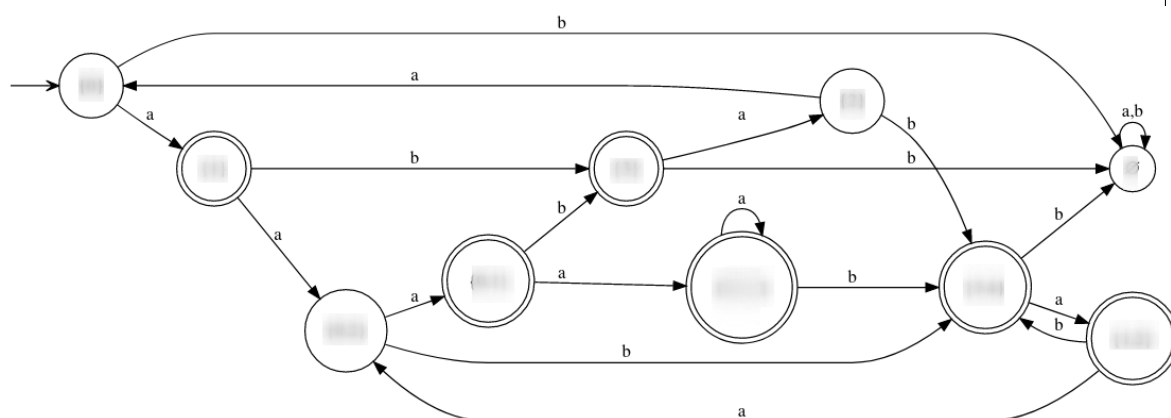


(-iii-)

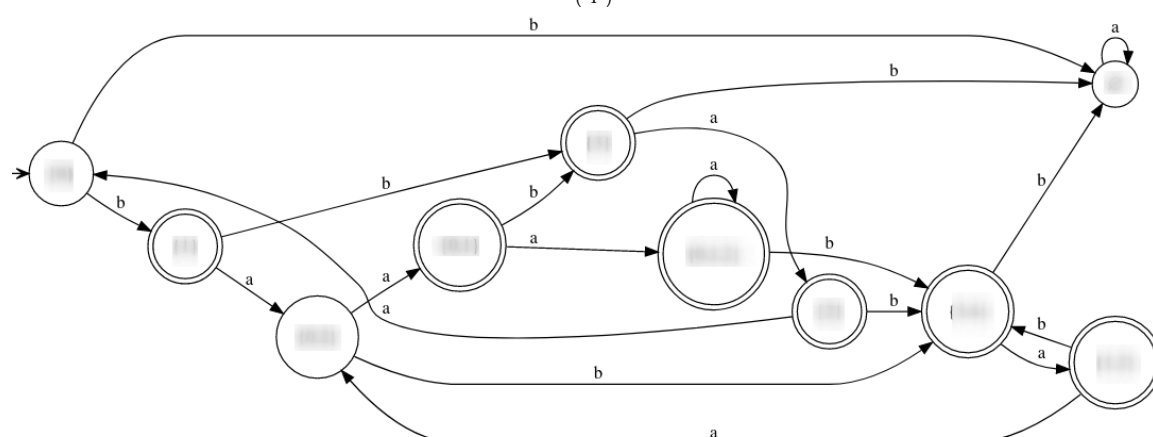


(-iv-)

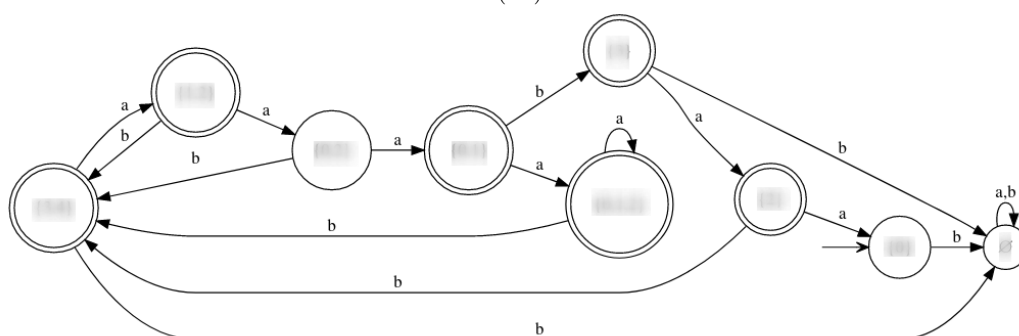
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



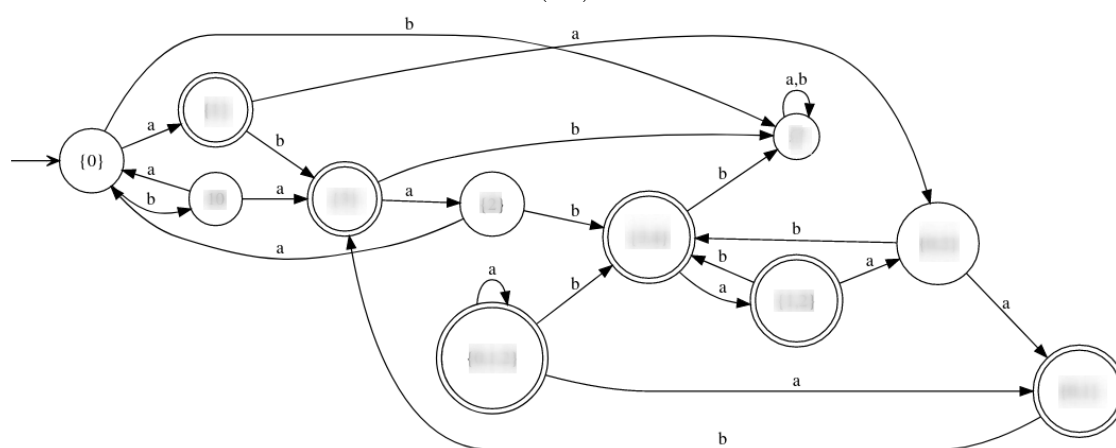
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

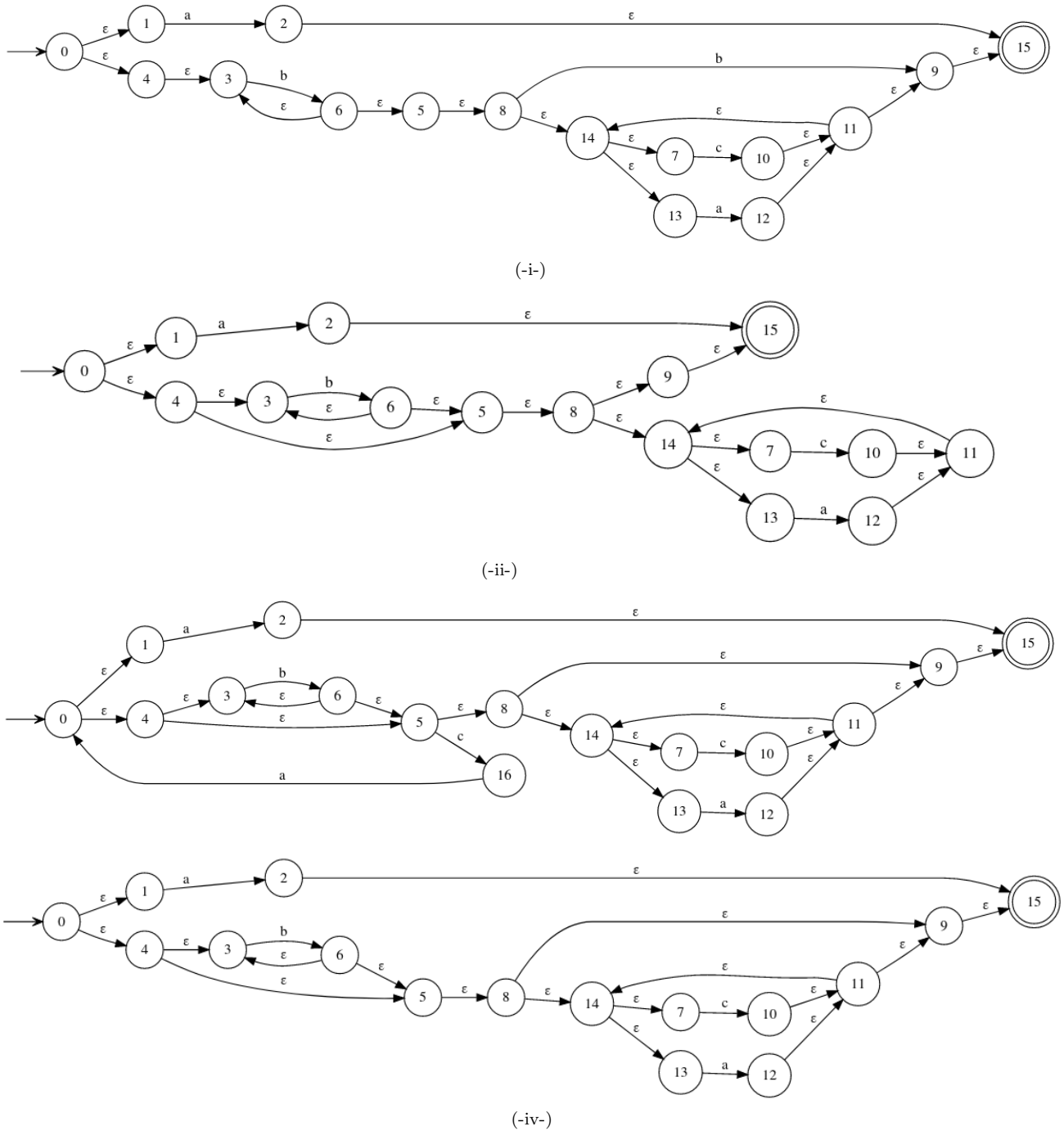


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 5 :

a			d			g		i	j	k

Question 6 :

a							h		j		l	m	n

Question 7 :

a	b		d			g		i	j

Question 8 :

	b		d	e

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d	e			h	i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

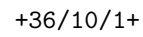
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ e Σ est fermé par facteur.
- ☐ f Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c A est complet.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f u est accepté par A .

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b A accepte le langage universel. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☒ Un mot est une application.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Un mot peut être vide. ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ A a au moins un état accessible. ☒ A n'est pas complet.
☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ e A a au moins un état co-accessible. ☐ f A a au moins un état non co-accessible.
☐ g A a au moins un état non accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

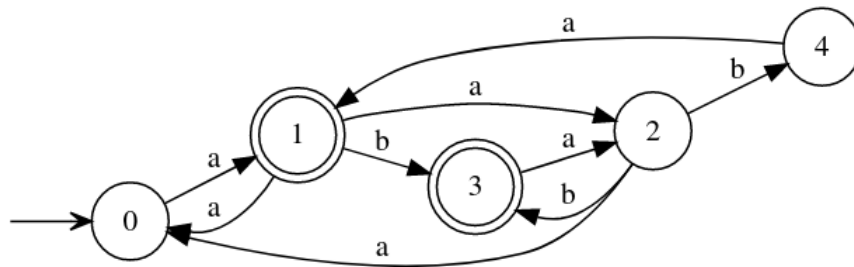
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

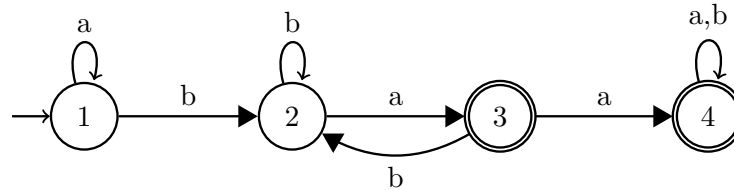
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 5 ☐ d 0 ☐ e 1 ☐ f 6 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

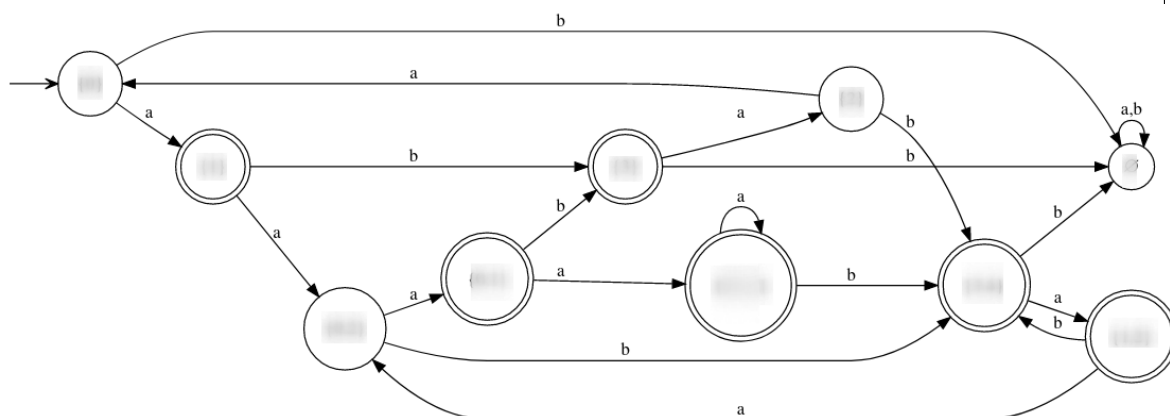


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

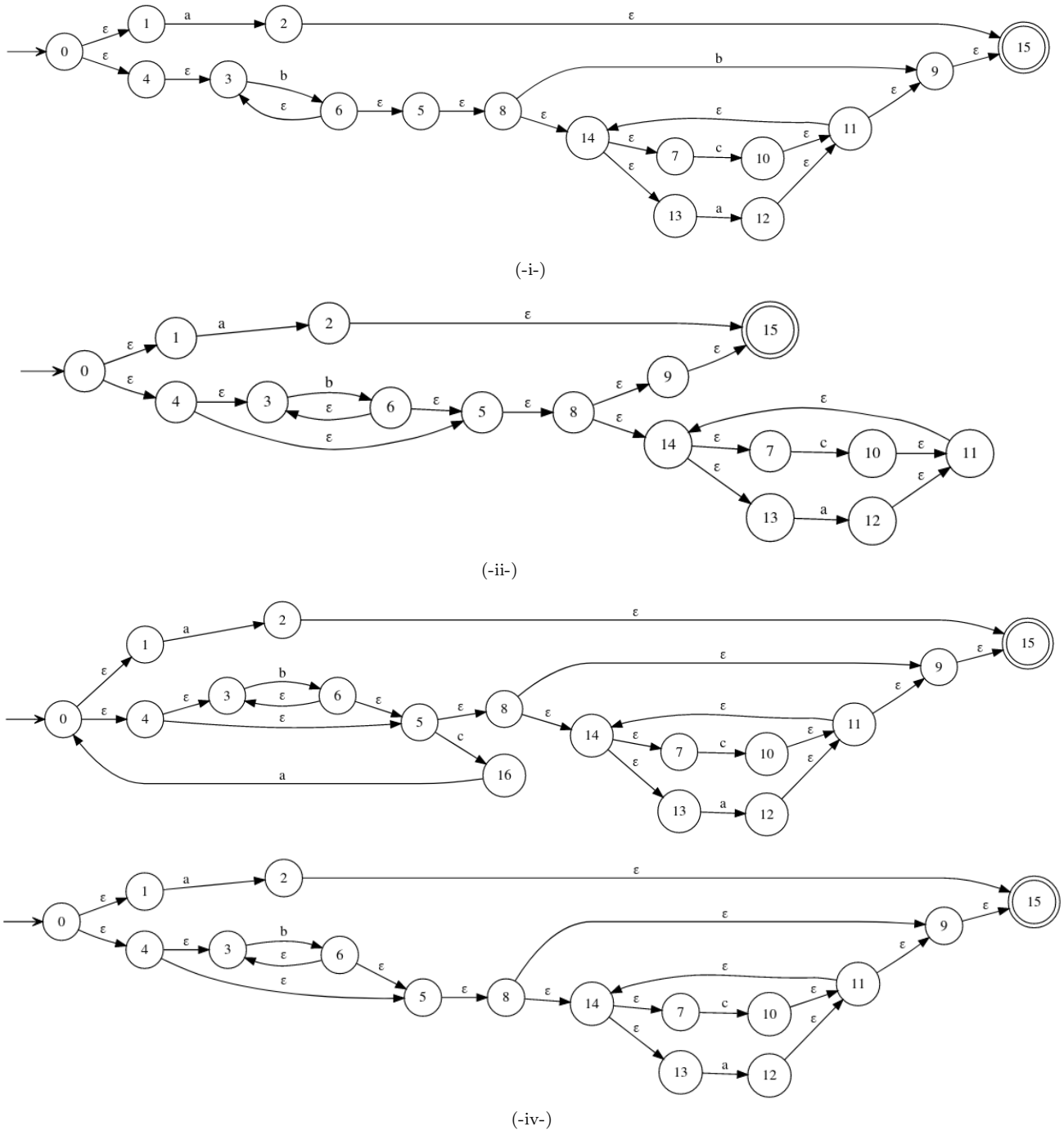


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

		c		e	f		h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 7 :

a					f				j		l	m	n

Question 8 :

		c		e	f	g			j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c		e	f			i	j	k		m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

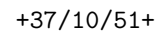
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c A possède un état puits
- ☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A n'est pas complet.
- ☐ c Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d A a au moins un état accessible. ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ h u n'est pas accepté par A . ☐ i A a au moins un état co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Σ est fermé par suffixe.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a des états accepteurs.

☐ u est accepté par A .

☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ A est complet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot est une application.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut être infini.

☐ Un mot peut être vide.

☐ Un mot est une fonction.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iii-.

☐ la Figure 3-i-.

☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-iv-.

☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-ii-.

☐ la Figure 4-iv-.

☐ la Figure 4-iii-.

☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_4 = a + b$
	☐	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐	Aucune des équations proposées.					
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ e	Aucune des équations proposées.					
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

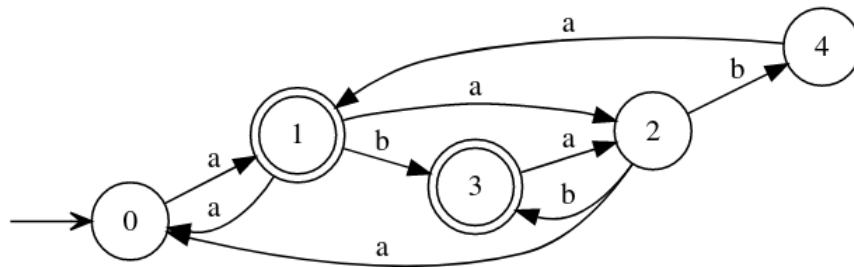
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

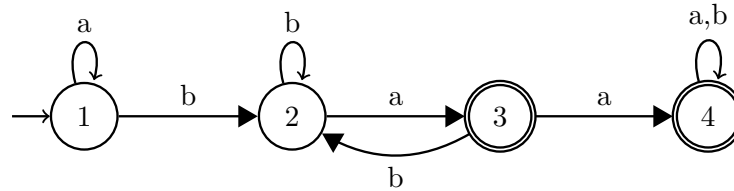
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 5 ☐ f 3 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



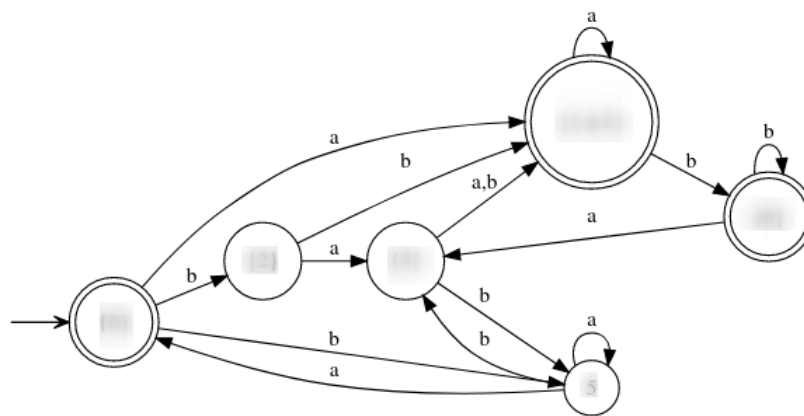
(-i-)



(-ii-)

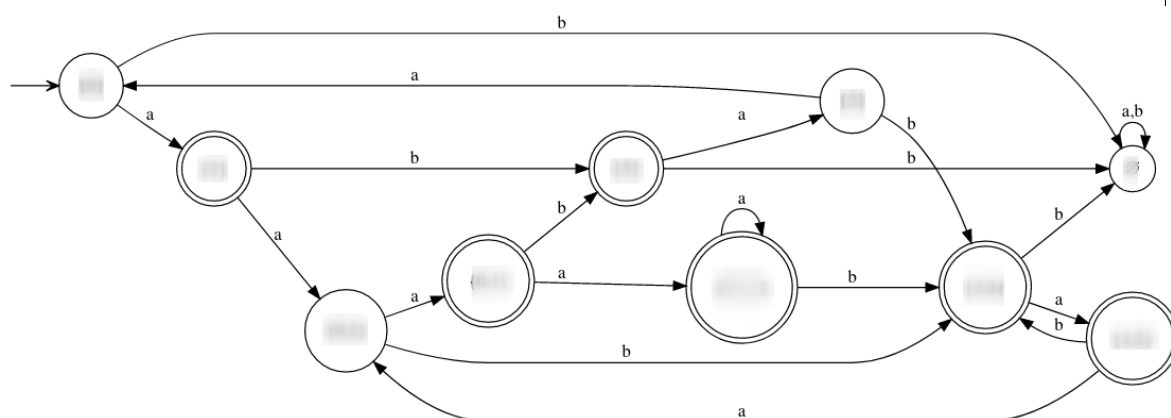


(-iii-)

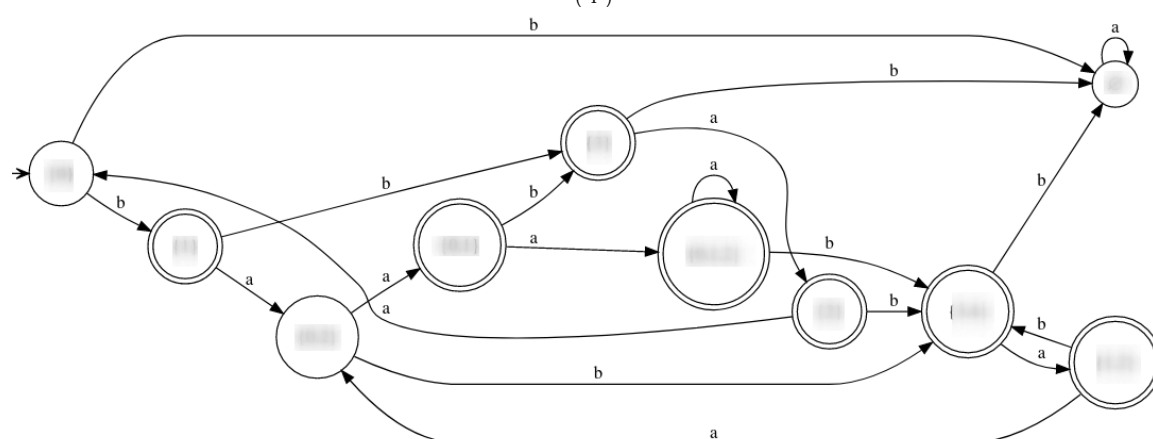


(-iv-)

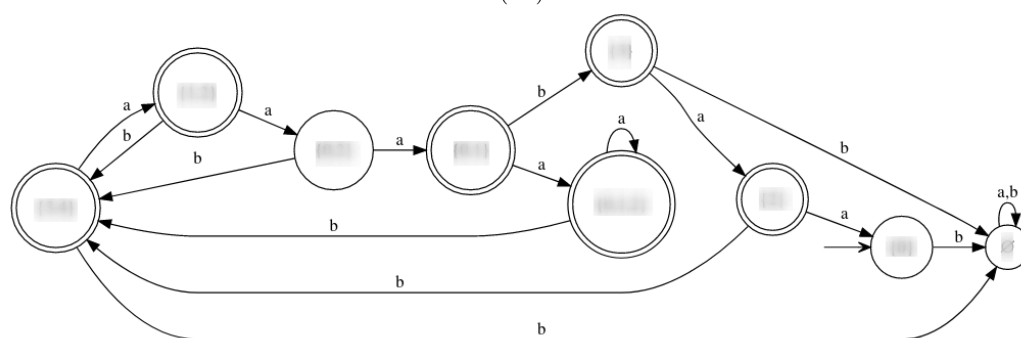
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

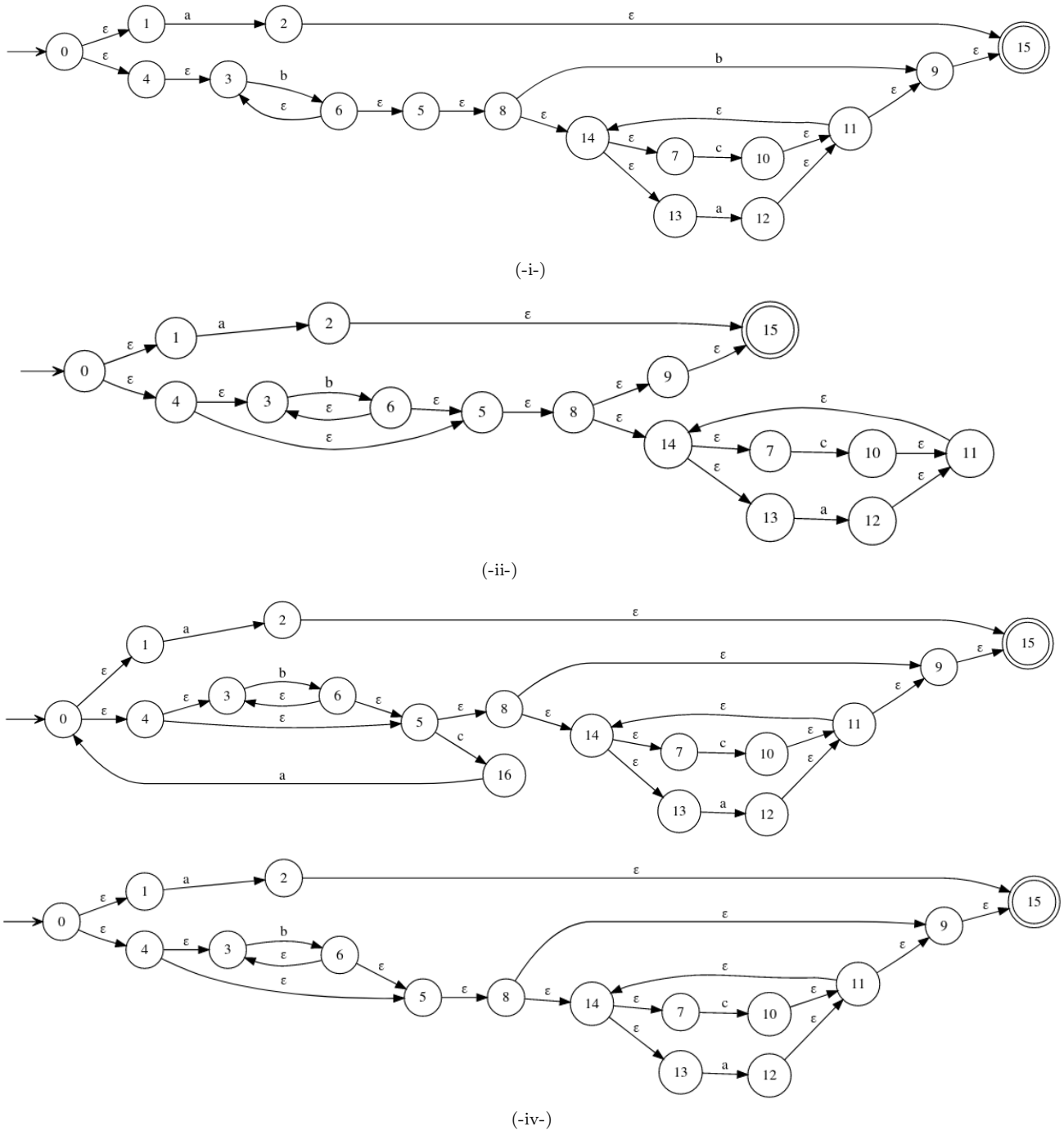


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

				e	f	g		i	j	k

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a	b	c	d					i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

	b	c				g		i				m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d	e	f		h		j	k	l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

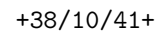
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☒ b Un mot est une fonction.
- ☒ c Un mot est une application.
- ☒ d Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☒ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ f Un mot peut être vide.
- ☐ g Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ i Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☒ j Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ k Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe.
- ☒ b Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe.
- ☒ e Σ^* est fermé par préfixe.
- ☒ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ g Σ est fermé par facteur.
- ☒ h Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d A est complet.
- ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ f Les états de A sont tous accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.

☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ g A possède un état puits

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A a au moins un état accessible.

☐ d A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.

☐ f A a au moins un état co-accessible. ☐ g A a au moins un état non co-accessible.

☒ u n'est pas accepté par A .

☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☒ P est forcément déterministe.

☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

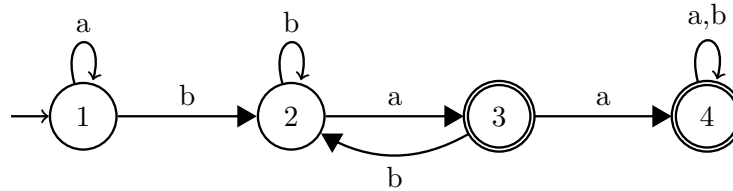
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 3 ☐ c 5 ☐ d 0 ☐ e 2 ☐ f 6 ☐ g 1

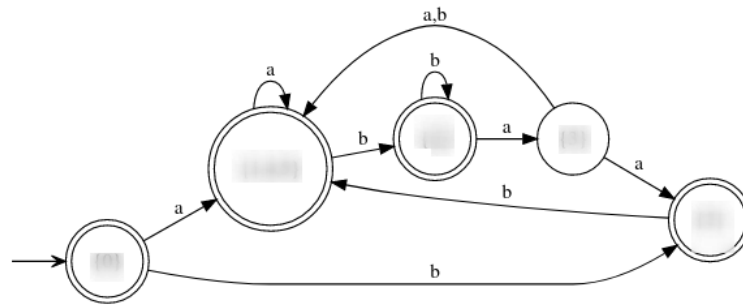
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



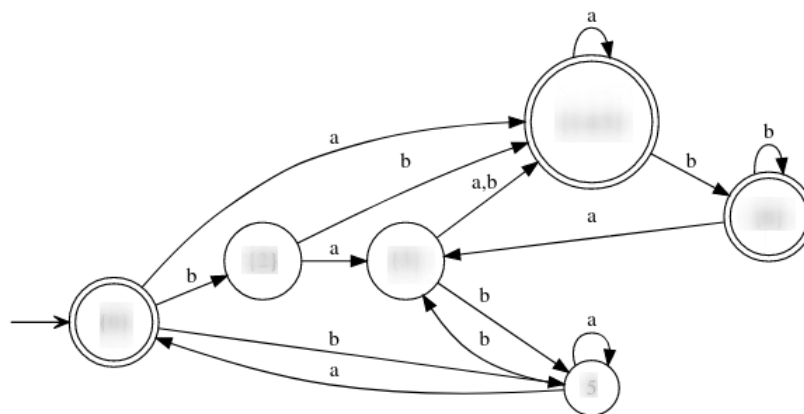
(-i-)



(-ii-)

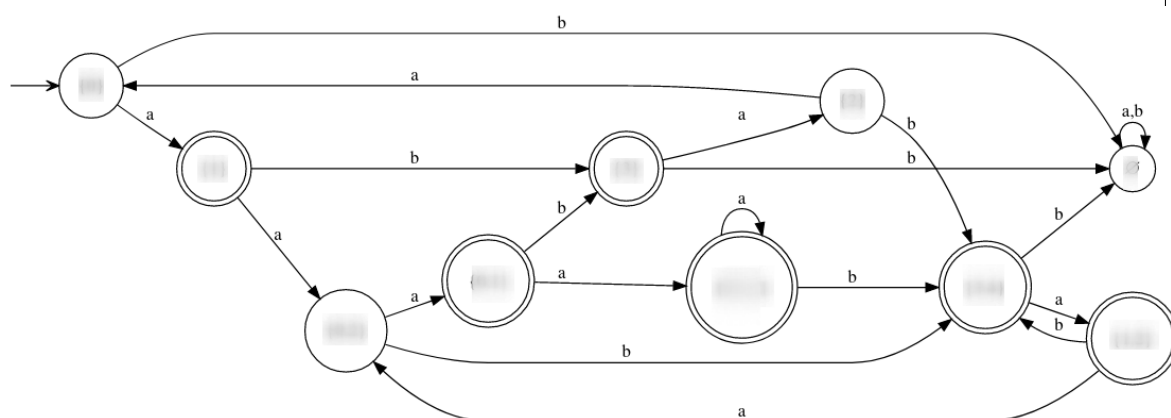


(-iii-)

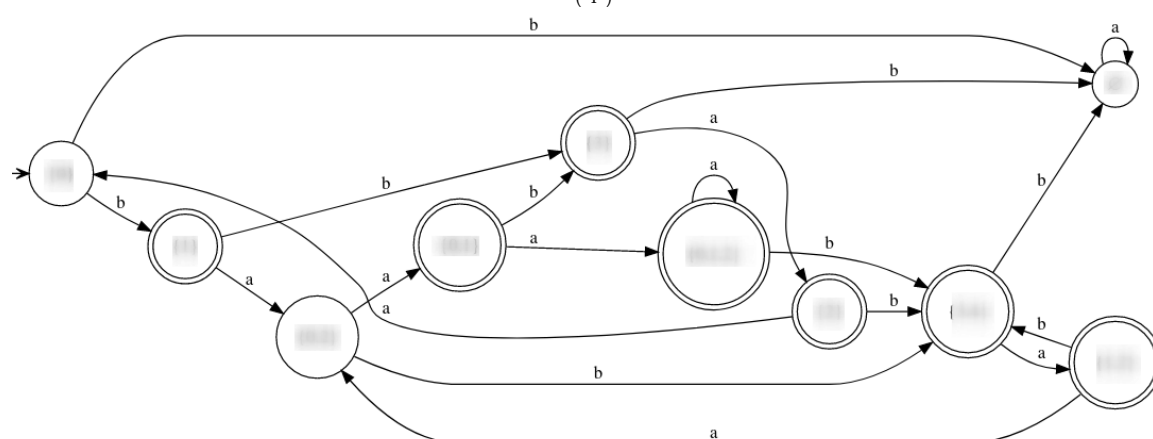


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



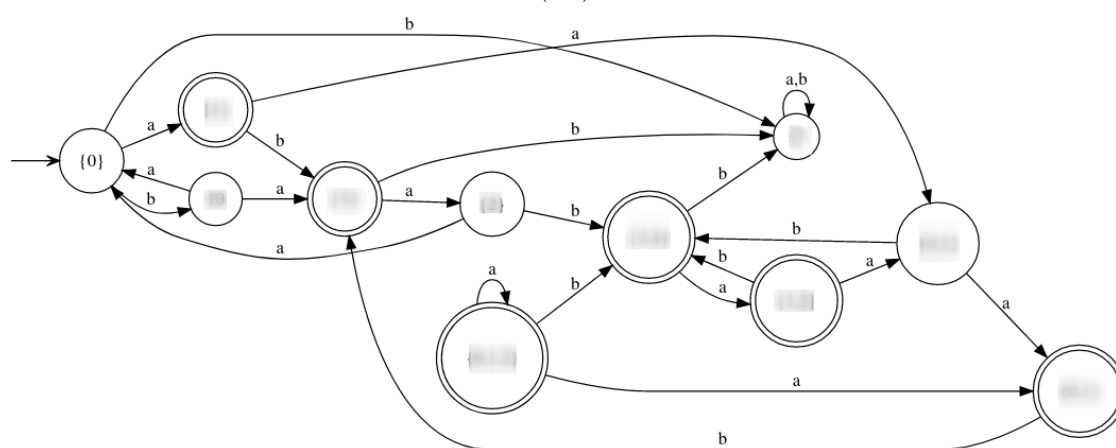
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

						g	h	i			l	m	n

Question 4 :

a		c	d			g		i	j

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a	b		d	e		g	h	i

Question 7 :

a			d		f	g			j	k

Question 8 :

a			d	e

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d	e			h	i		k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

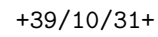
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d A accepte le langage universel.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ k Un mot peut être infini. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

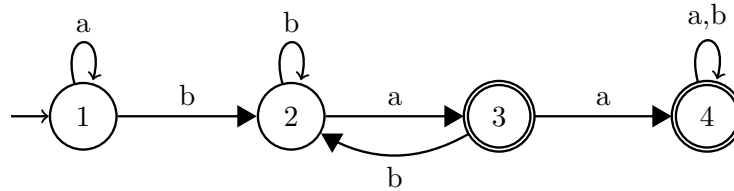
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 3 ☐ e 0 ☐ f 5 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

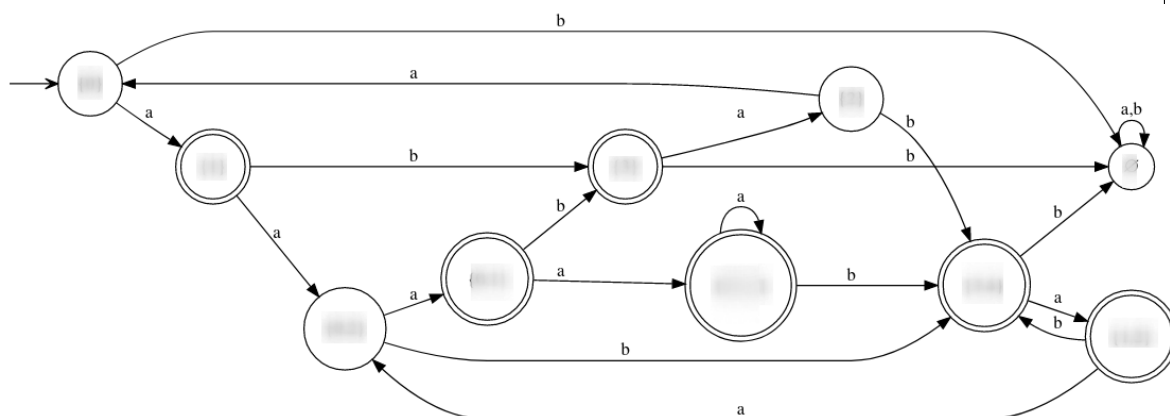


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



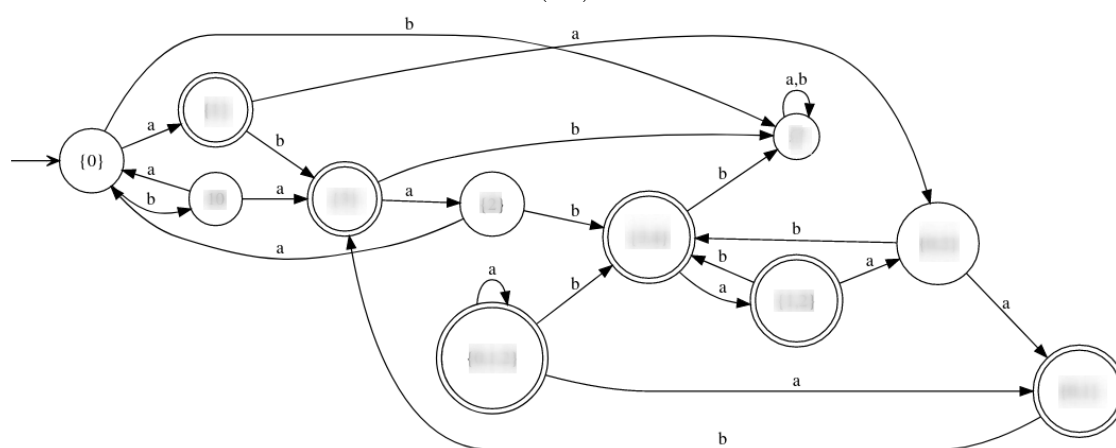
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c					h	i	j	k

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a	b							j	k		m	n

Question 7 :

a	b			e	f			i	j

Question 8 :

a			d	e

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

	b		d	e	f		h		j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

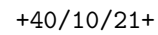
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	
☐ b	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ d	Un mot peut être infini.
☐ c	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐ f	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ g	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐ i	Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ h	Un mot est une fonction.	☐ j	Un mot est une application.
☐ l	Un mot peut être vide.	☐ k	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .	☐ c	A a au moins un état non accessible.	☐ e	u n'est pas accepté par A .
☐ b	$u \notin \mathcal{L}(A)$.	☐ d	A a au moins un état non co-accessible.	☐ f	A n'a pas d'état accepteur.
☐ g	A a au moins un état accessible.	☐ h	A a au moins un état co-accessible.	☐ i	A n'est pas complet.
☐ j	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.				
☐ k	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.				

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a	L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b	Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c	Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d	Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c A est complet. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
- ☒ c Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ d Σ^* est fermé par facteur.
- ☒ e Σ^* est fermé par suffixe. ☐ f Σ est fermé par facteur.
- ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☒ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f A possède un état puits
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

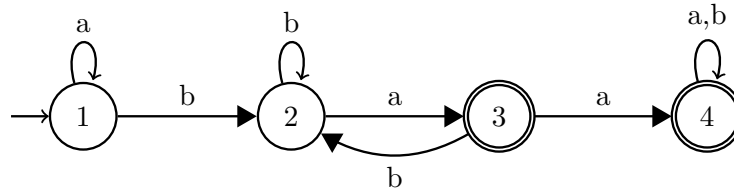
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 1 ☐ d 6 ☐ e 3 ☐ f 0 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

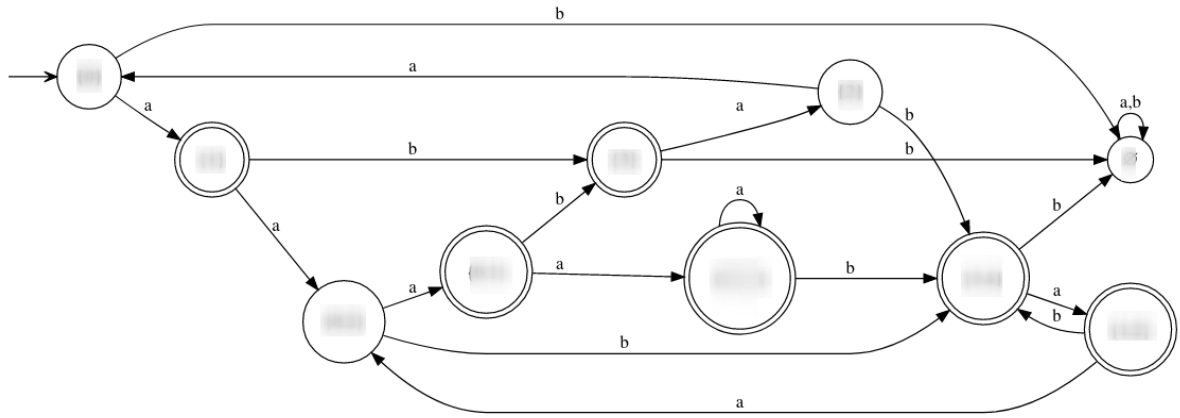


(-iii-)

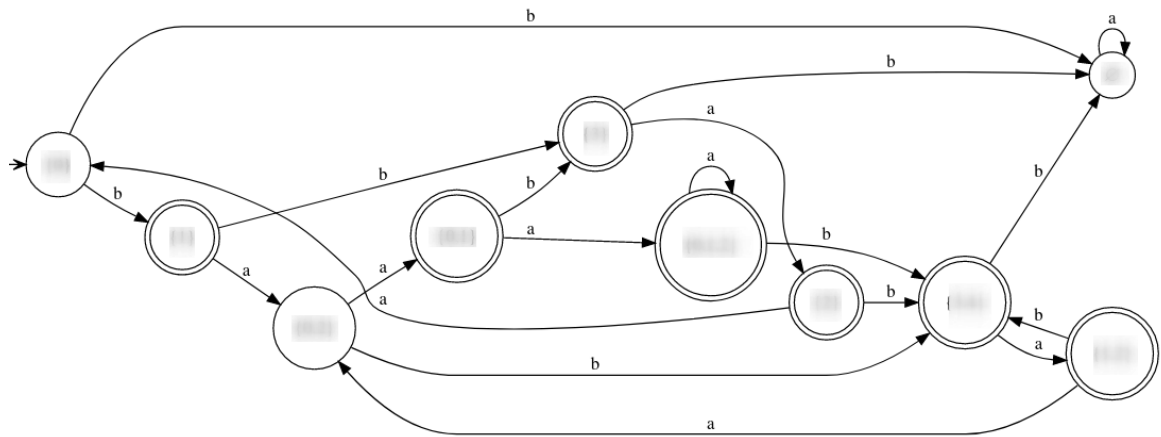


(-iv-)

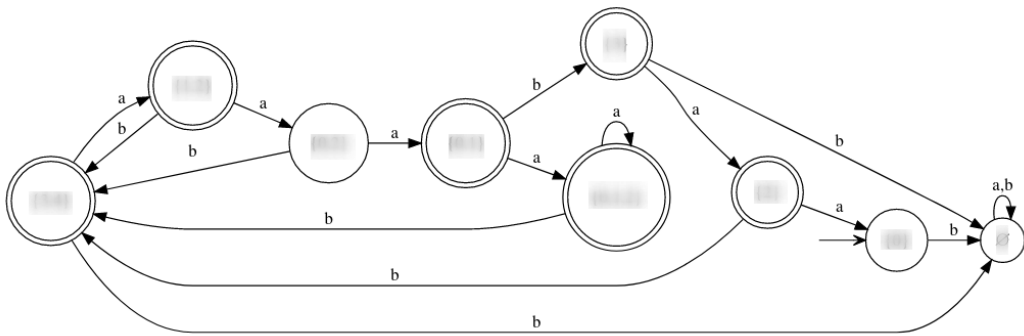
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



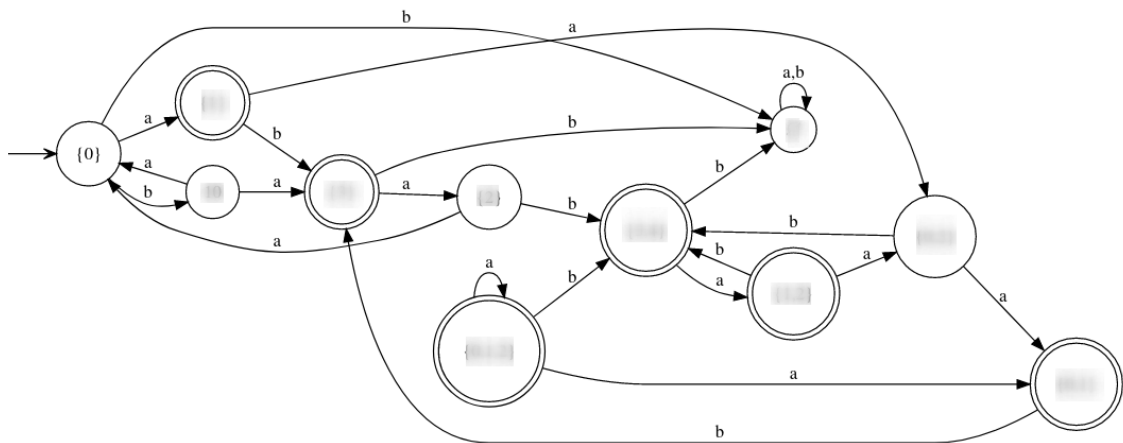
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d		f	g						m	n

Question 3 :

		c		e	f		h		j	k

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

	b				f	g	h	i	j

Question 8 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

	b	c		e	f	g	h		j	k	l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

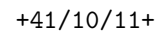
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur.
 ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
 ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible.
 ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non accessible.
 ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A n'est pas complet.
 ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ A accepte le langage universel.
 ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ Un mot peut être vide.

- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ h Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A est complet.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii- ☐ b la Figure 3-iv- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i- ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii- ☐ la Figure 4-i- ☐ c la Figure 4-ii- ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

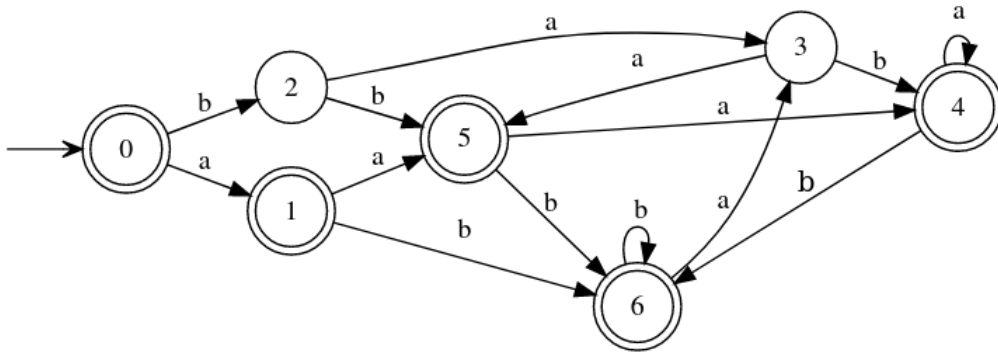
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ b 4 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 0 ☐ f 1 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

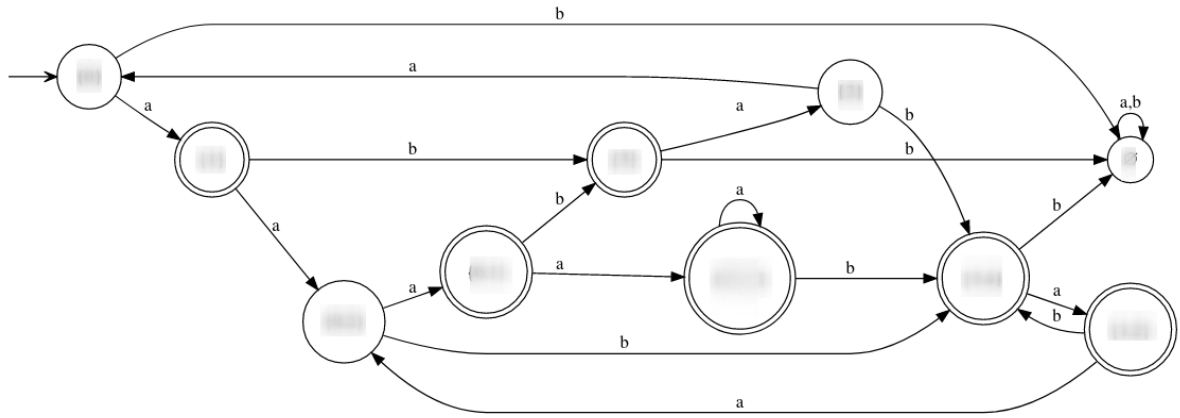


(-iii-)

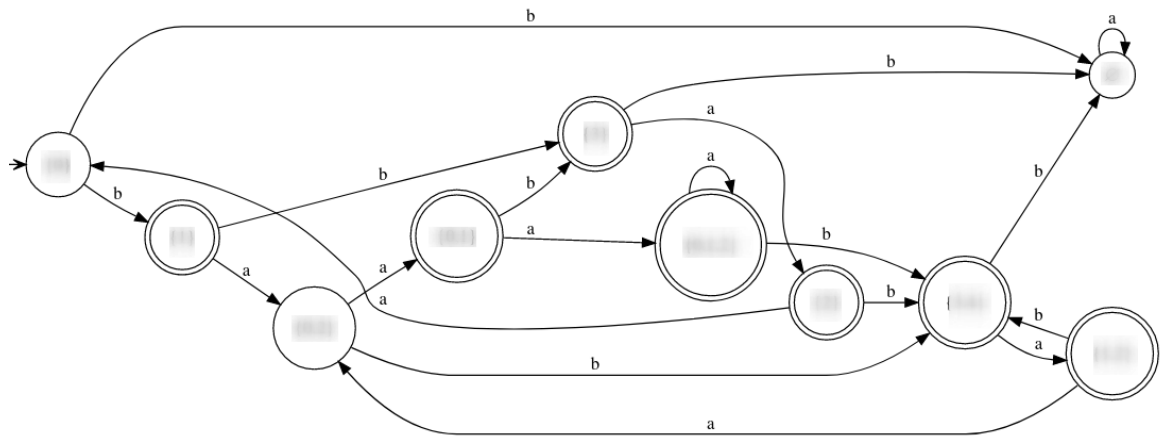


(-iv-)

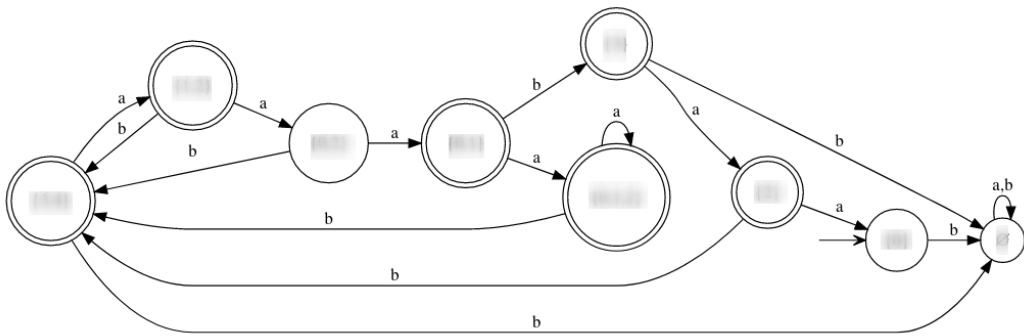
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



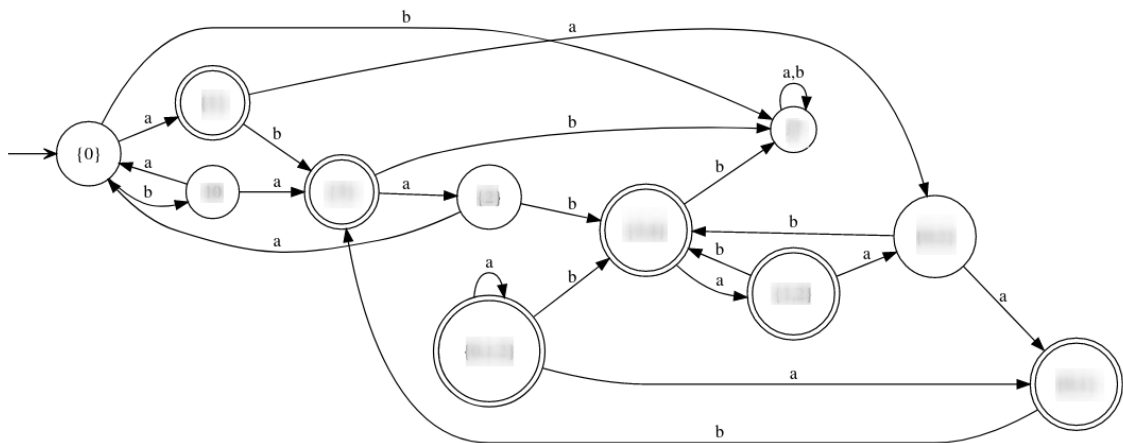
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d  f g h i j

Question 3 :  b  d  f g   j k

Question 4 : a b c  e f  h i

Question 5 :  b   e   h    l m n

Question 6 : a b c d 

Question 7 :   c d e

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c  e f g h  j k  

Question 12 : a b  d e f g h

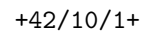
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The rest of the page is filled with the dotted lines, providing a guide for letter height and placement. There are no margins, text, or other markings on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten evenly spaced horizontal dotted lines across its width. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d A possède un état puits ☐ e A accepte le langage universel.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut être vide.
☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot peut être infini.
☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet. ☐ u est accepté par A .
- ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

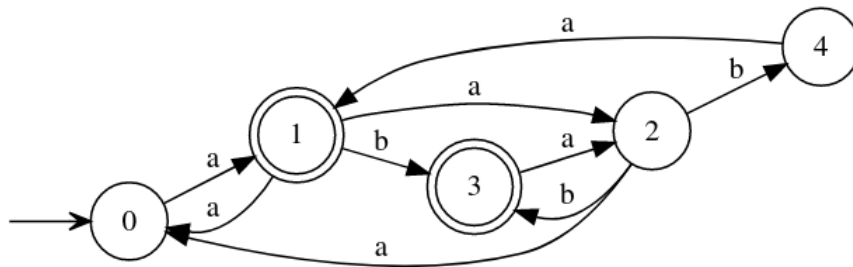
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

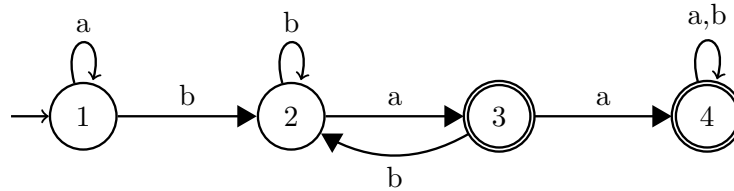
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 6 ☐ f 0 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

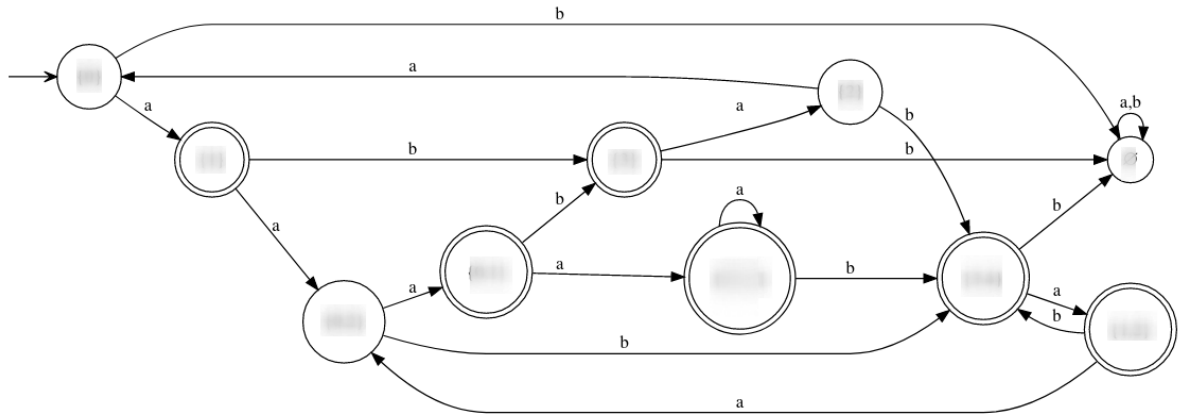


(-iii-)

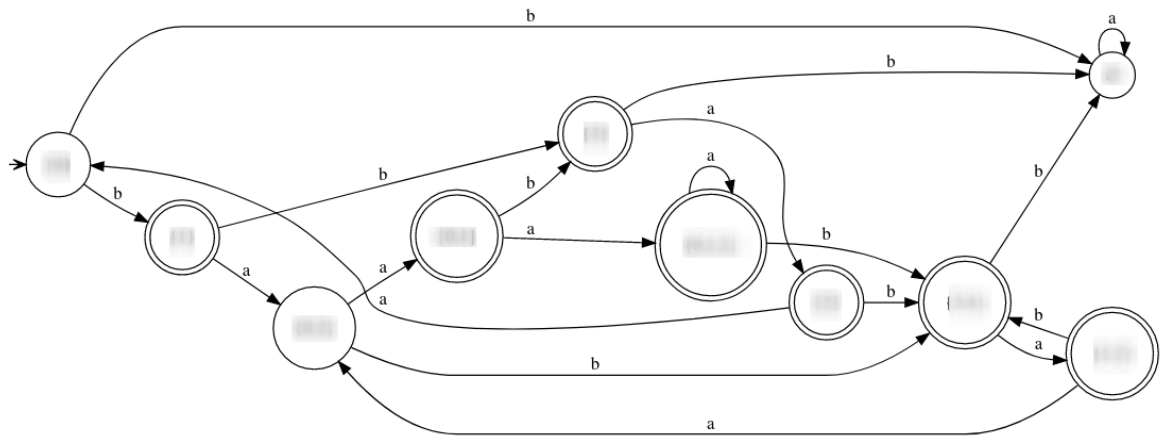


(-iv-)

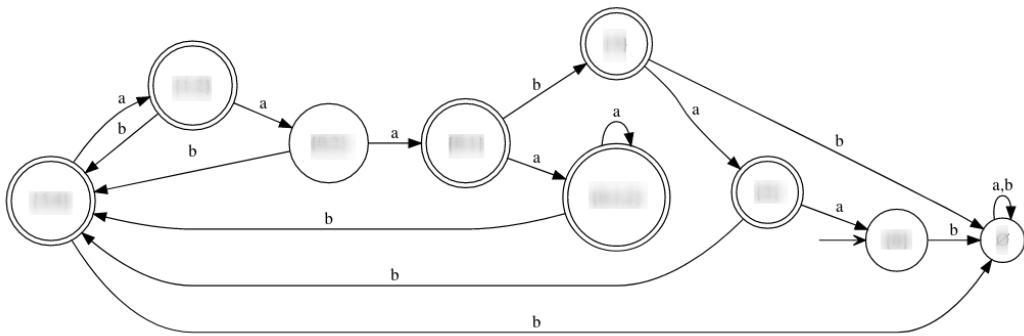
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



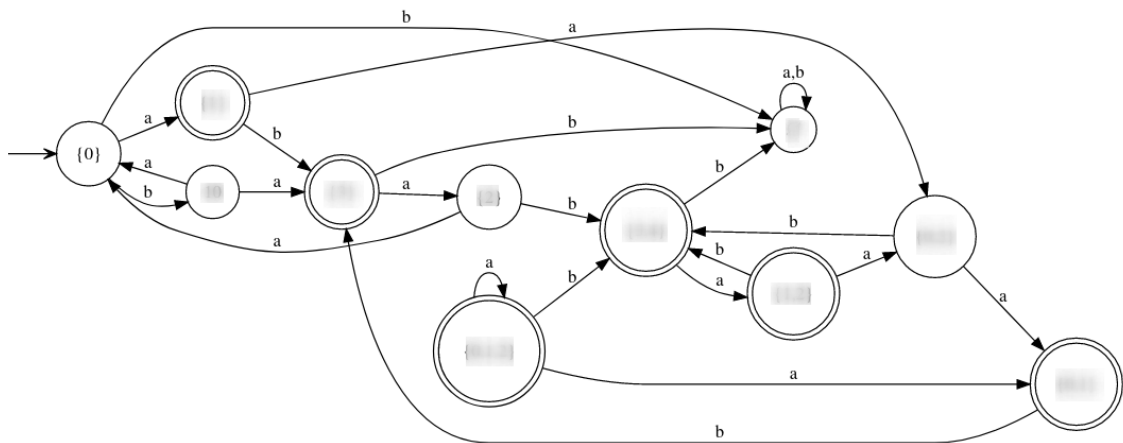
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b				f	g		i	j

Question 3 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 4 :

	b			e					j	k		m	n

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b				f			i	j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c			f		h	i	j		l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

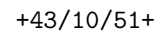
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot peut être vide.	☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Un mot peut être infini.	☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Un mot possède une infinité d'extensions.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ A a au moins un état co-accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ A a au moins un état accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A accepte le langage universel.
☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ A possède un état puits
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

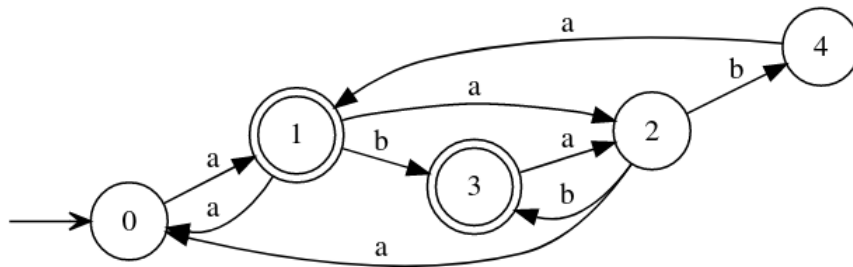
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

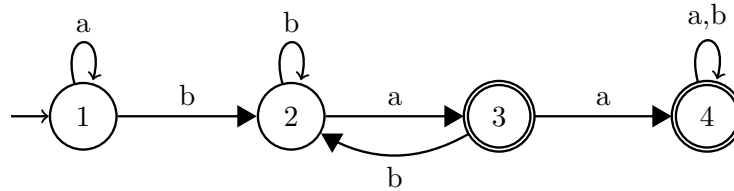
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

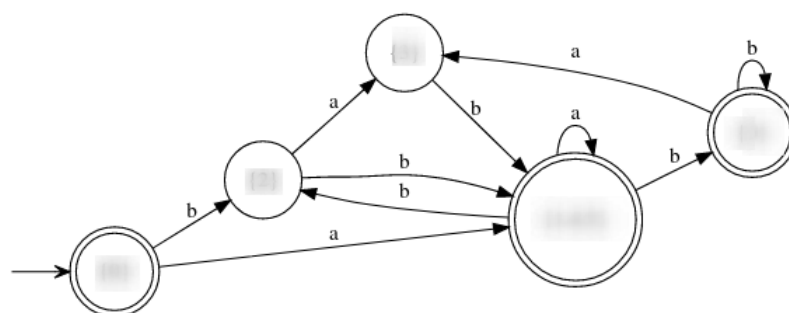
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 3 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 6 ☐ g 2

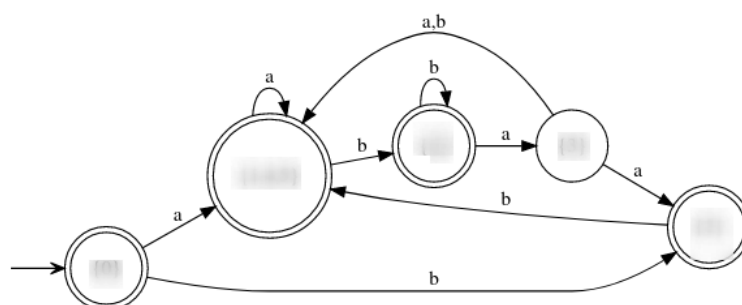
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

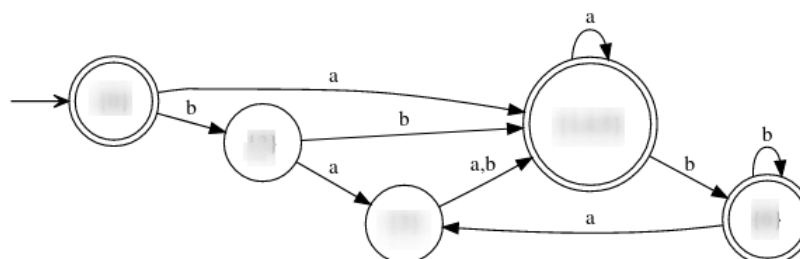
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



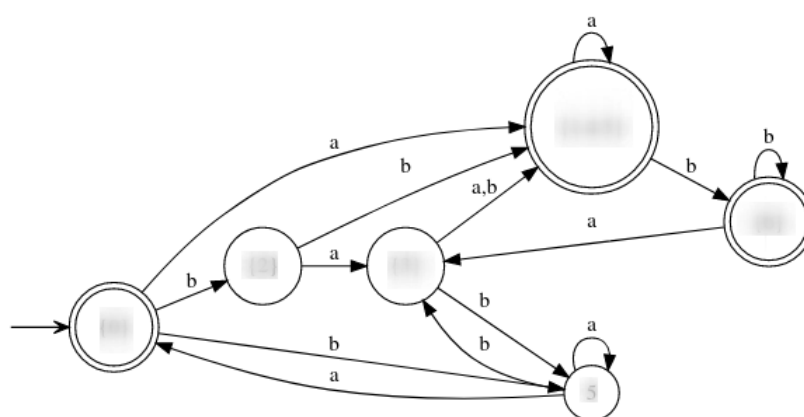
(-i-)



(-ii-)

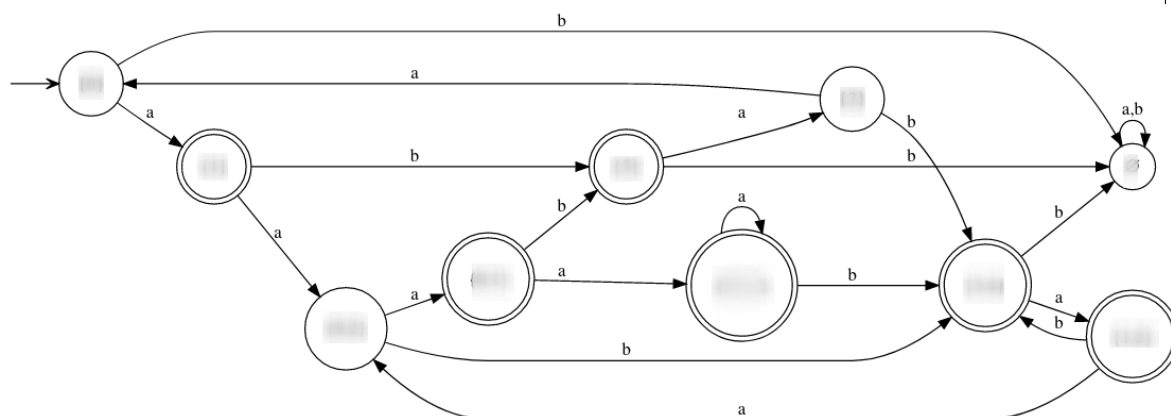


(-iii-)

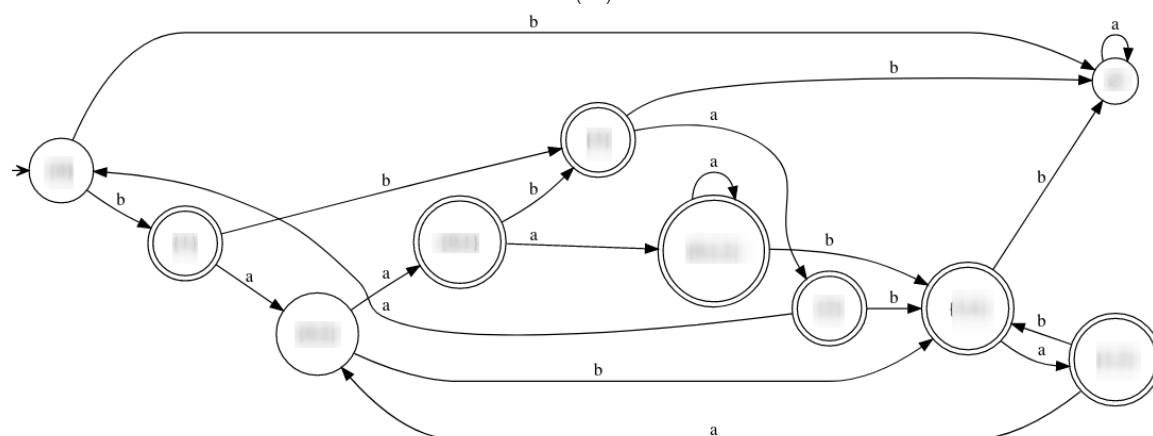


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



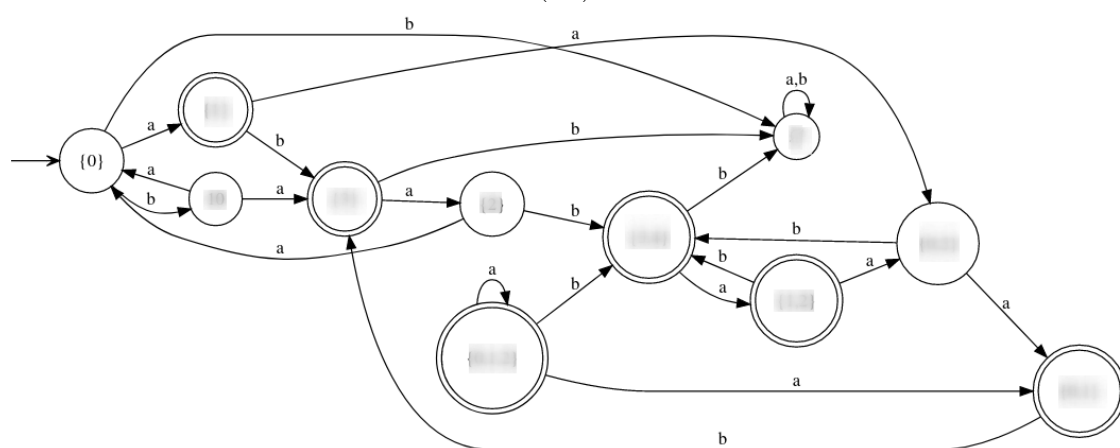
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

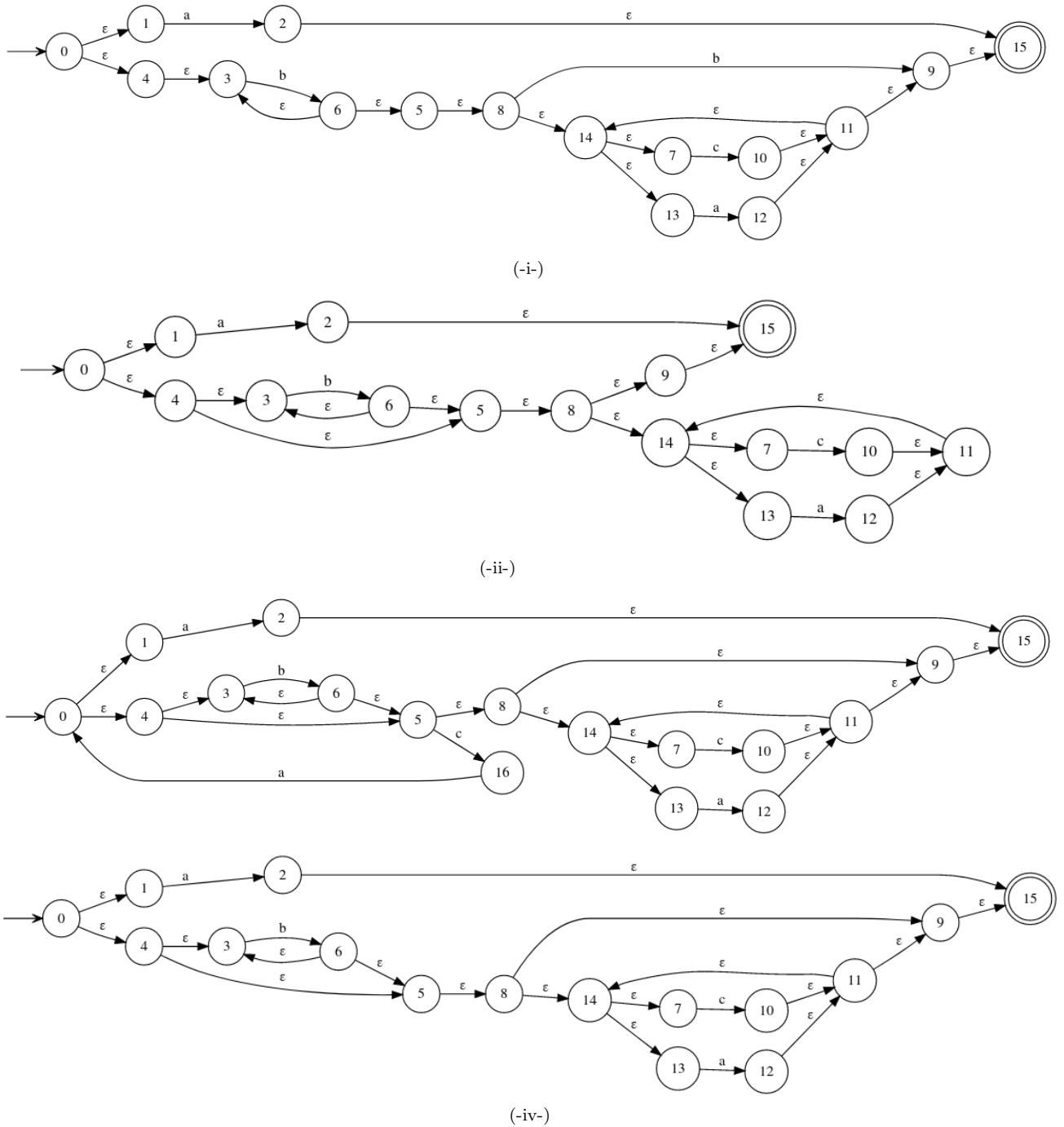


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :       g  i j k  m n

Question 3 : a b c d 

Question 4 :  b  d e

Question 5 :  b c     h i j k

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b c  e f  h i

Question 8 : a b   e  g  i j

Question 9 : a  c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d e  g  i j   m

Question 12 :  b c d e f g h

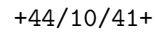
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.

- ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f A possède un état puits
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b u n'est pas accepté par A .
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ e A a au moins un état non accessible. ☐ f A n'est pas complet.
- ☐ g A a au moins un état co-accessible. ☐ h $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ i A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A est complet.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

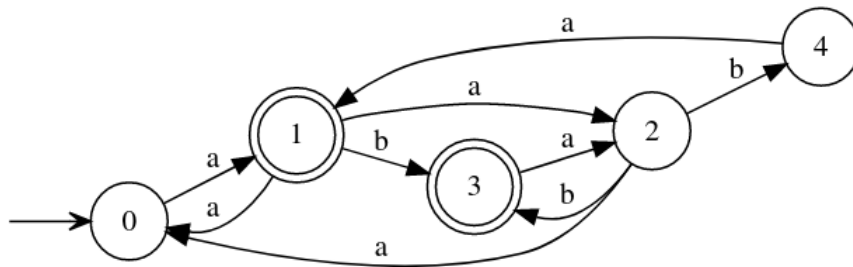
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

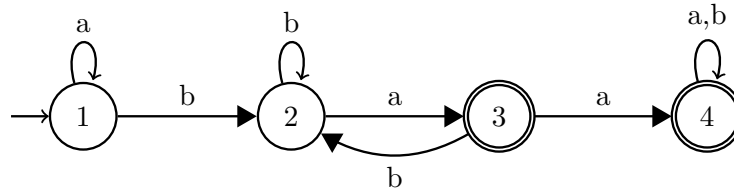
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 1 ☐ f 6 ☒ 4

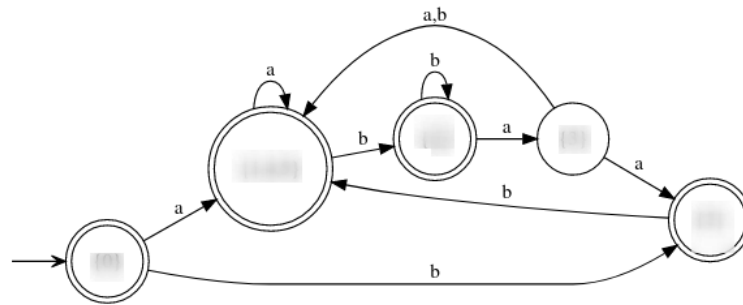
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



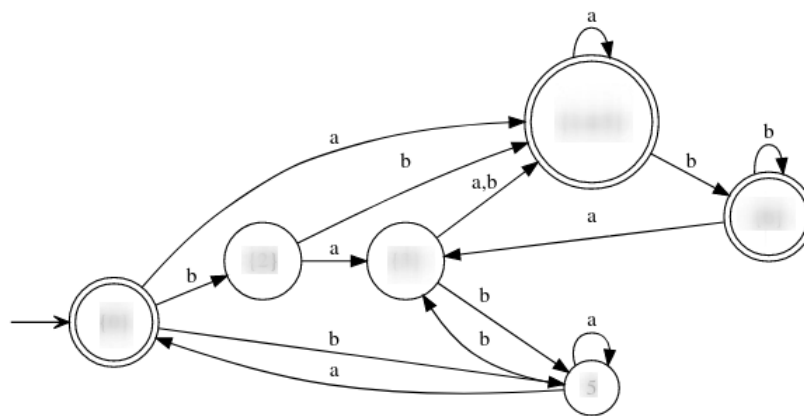
(-i-)



(-ii-)

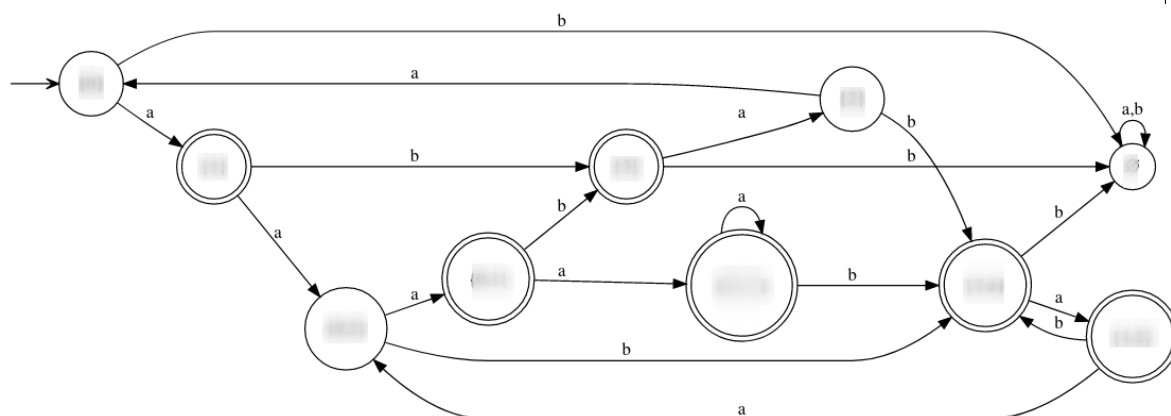


(-iii-)

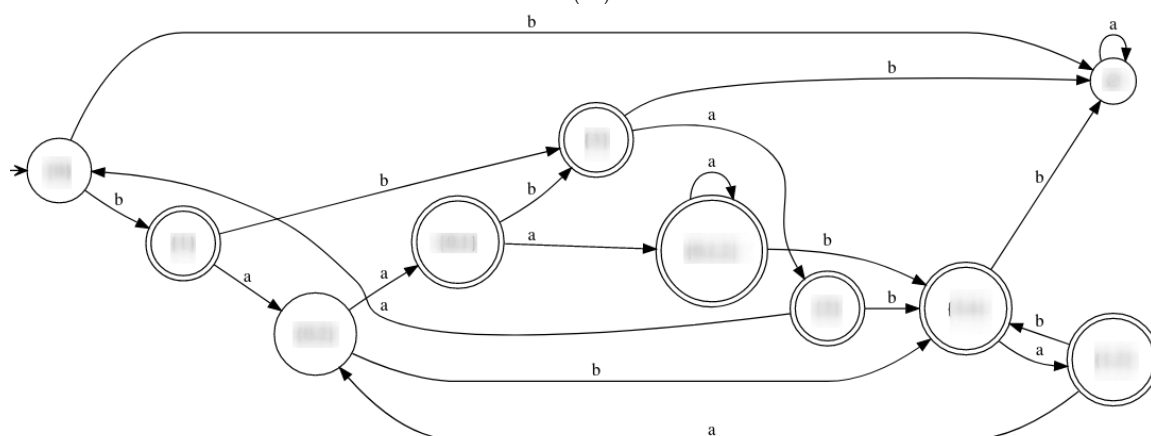


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b   e f   i   m n

Question 3 : a b c d 

Question 4 :   c d  f  h i j

Question 5 :   c d e f g h i

Question 6 : a  c  e  g   j k

Question 7 : a   d e

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a b c d e  g  i j k  

Question 12 : a b c d  f g h

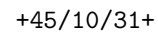
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ b Σ est fermé par suffixe.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d u est accepté par A . ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☒ A n'est pas complet. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ A a au moins un état accessible. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d A accepte le langage universel.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f A possède un état puits ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

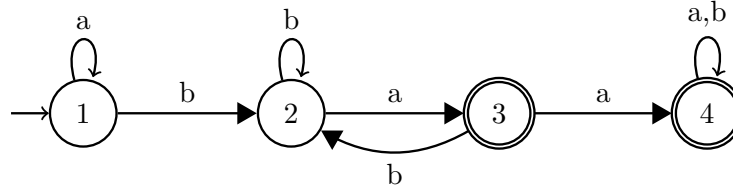
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

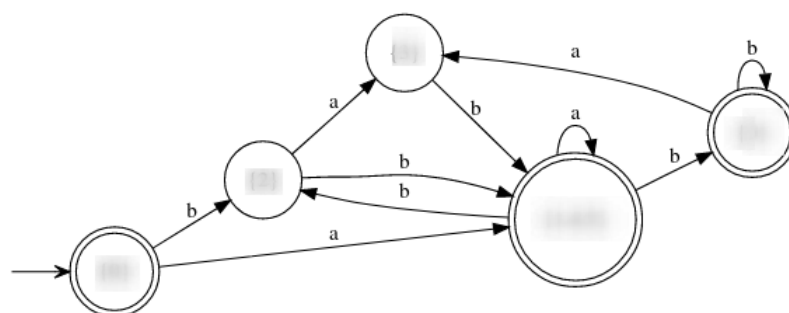
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 6 ☒ 4 ☐ f 2 ☐ g 0

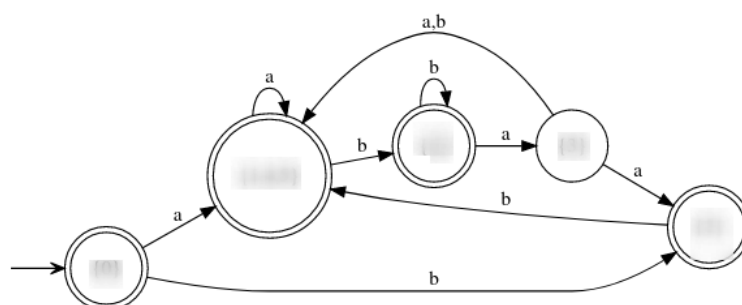
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

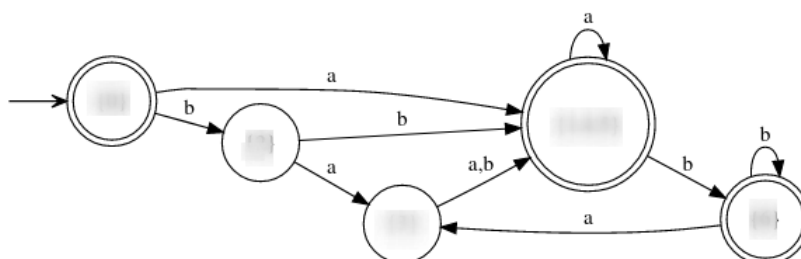
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



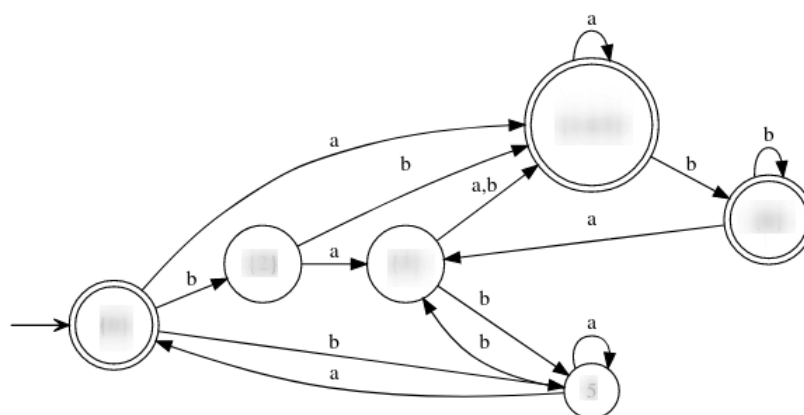
(-i-)



(-ii-)

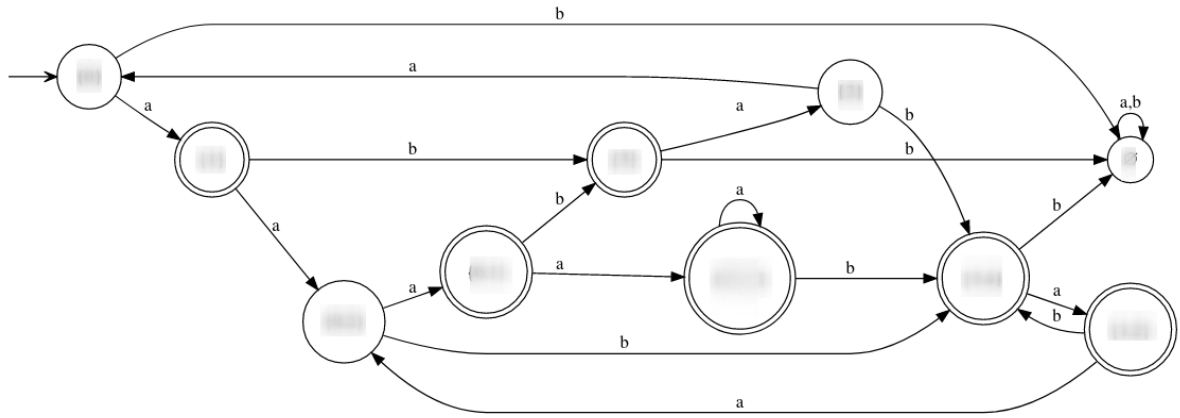


(-iii-)

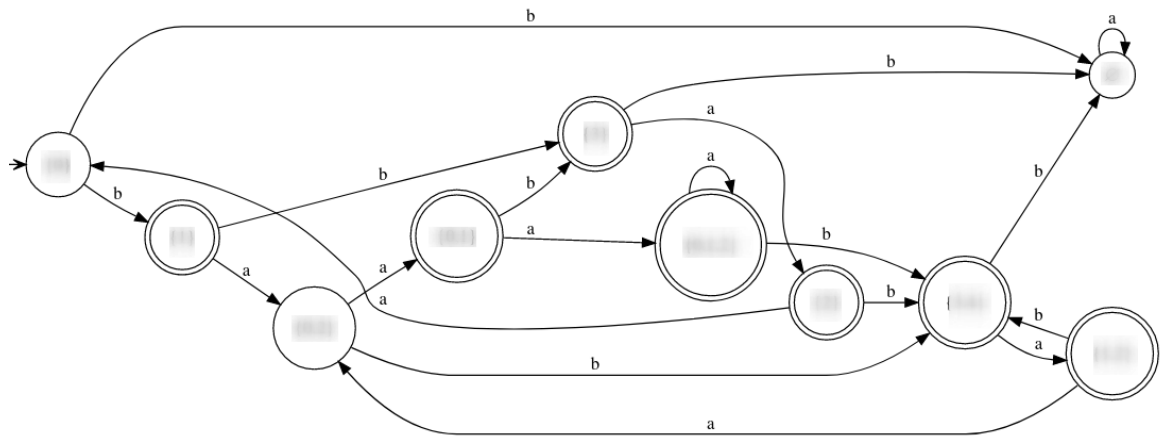


(-iv-)

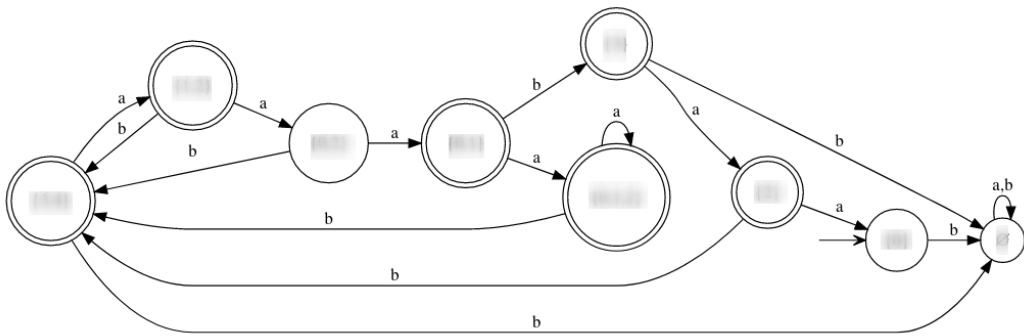
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



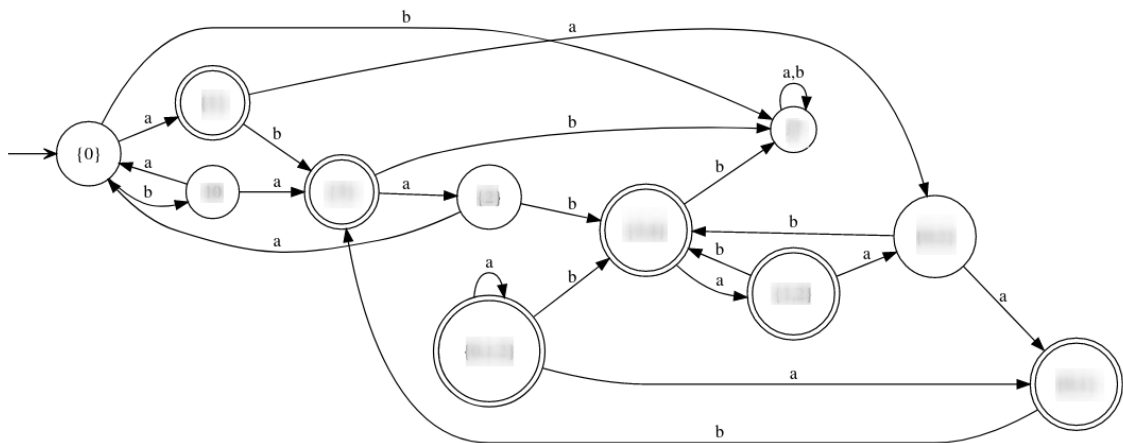
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

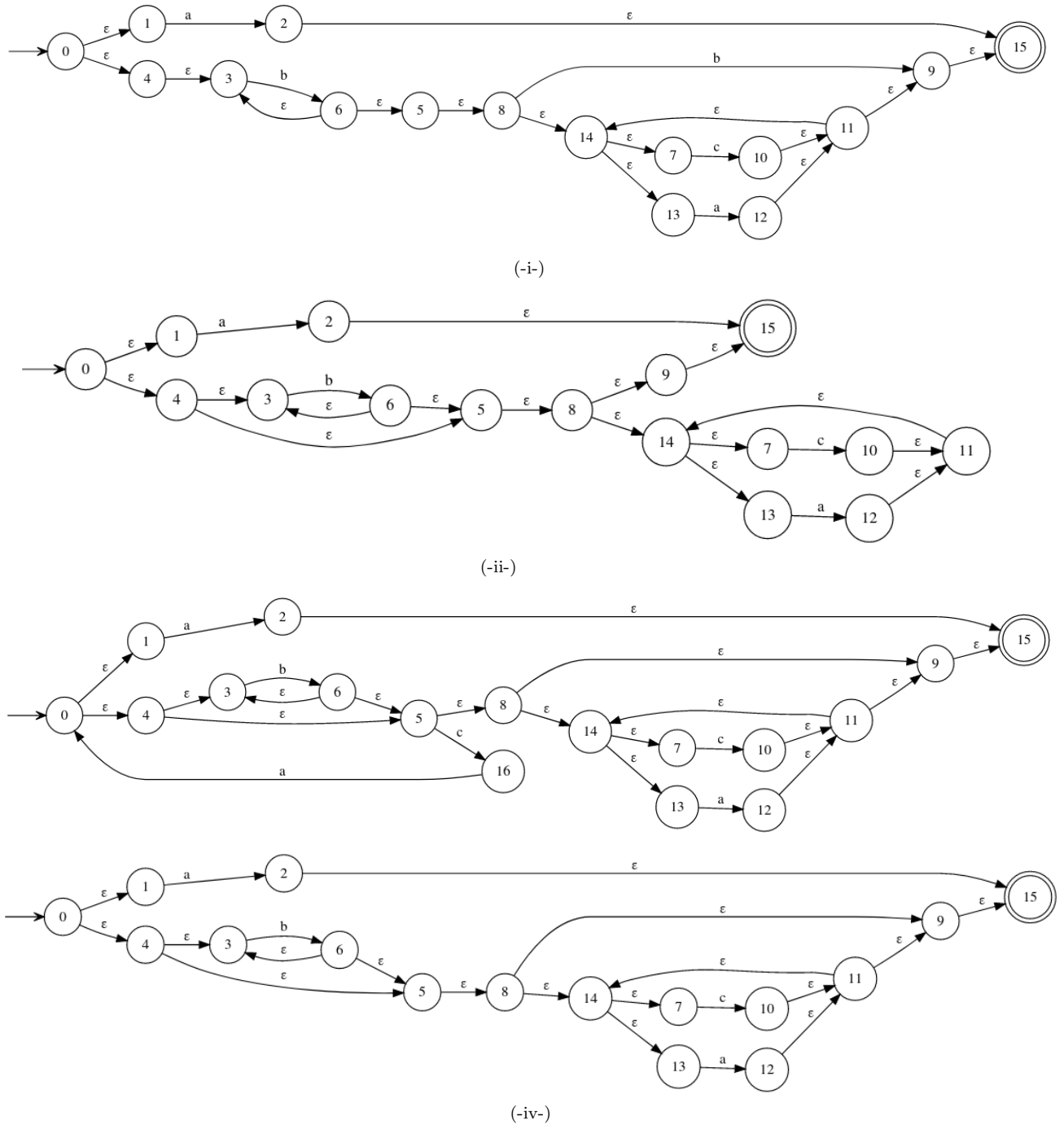


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

		c			f				j		l	m	n

Question 5 :

	b	c		e		g		i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a		c	d					i	j	k

Question 8 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d		f		h	i			l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

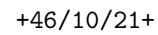
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐ b	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot peut être vide.	☐ d	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ f	Un mot peut être infini.
☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐	Un mot est une fonction.	☐	Un mot possède une infinité d'extensions.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot est une application.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a	A possède un état puits	☐ b	$ \delta = Q \times \Sigma $.	☐ c	A accepte le langage universel.
☐	$ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.	☐ e	nécessairement $ Q \geq 2$.		
☐	L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.				
☐	☐ g Tous les états de A sont accepteurs.				
☐ h	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.				
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.				

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐	Σ^* est fermé par suffixe.	☐ b	Σ est fermé par suffixe.	☐ c	Σ est fermé par facteur.
☐	Σ est fermé par préfixe.	☐	Σ^* est fermé par préfixe.		
☐	Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.				
☐ g	Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.		☐	Σ^* est fermé par facteur.	
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.				
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.				

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ u est accepté par A .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

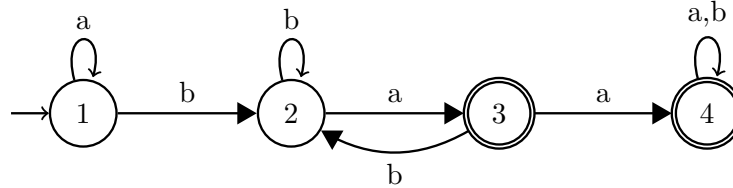
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 1 ☐ c 6 ☐ d 3 ☒ 4 ☐ f 2 ☐ g 5

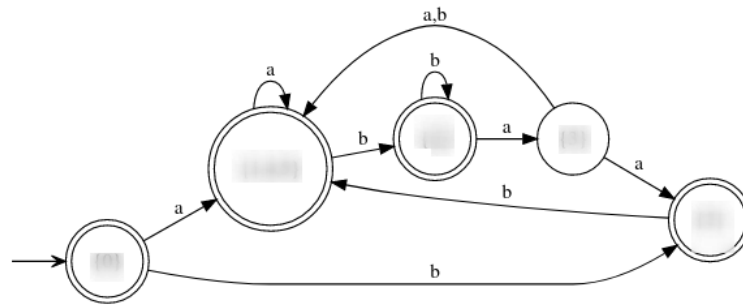
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

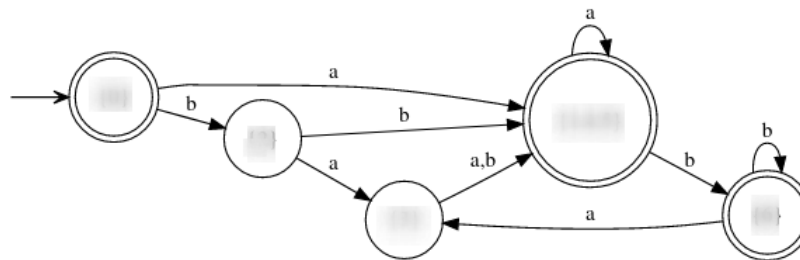
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



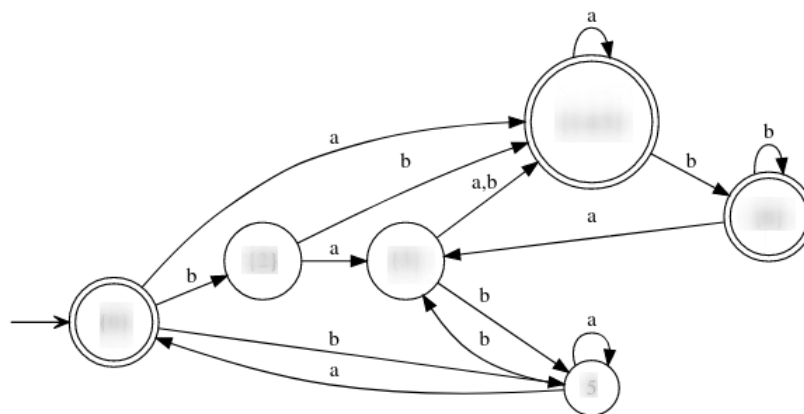
(-i-)



(-ii-)

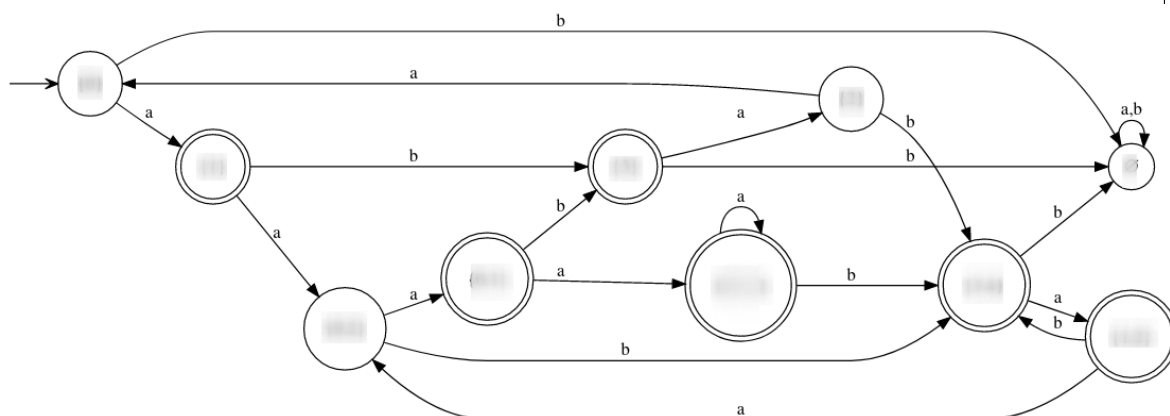


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d		f							m	n

Question 3 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 4 :

	b	c	d			g		i	j

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a					f		h	i	j	k

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f		h	i	j			m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

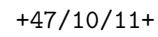
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
 ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ u n'est pas accepté par A .
 ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état non accessible.
 ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état accessible.
 ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c u est accepté par A . ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A possède un état puits
☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f A accepte le langage universel.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ c Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ e Un mot est une application. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ g Un mot peut être infini. ☒ h Un mot est une fonction. ☒ i Un mot peut être vide.
☒ j Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

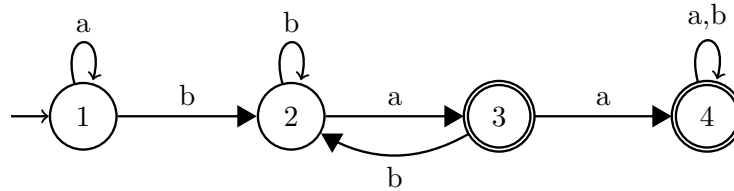
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 2 ☐ c 5 ☐ d 3 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

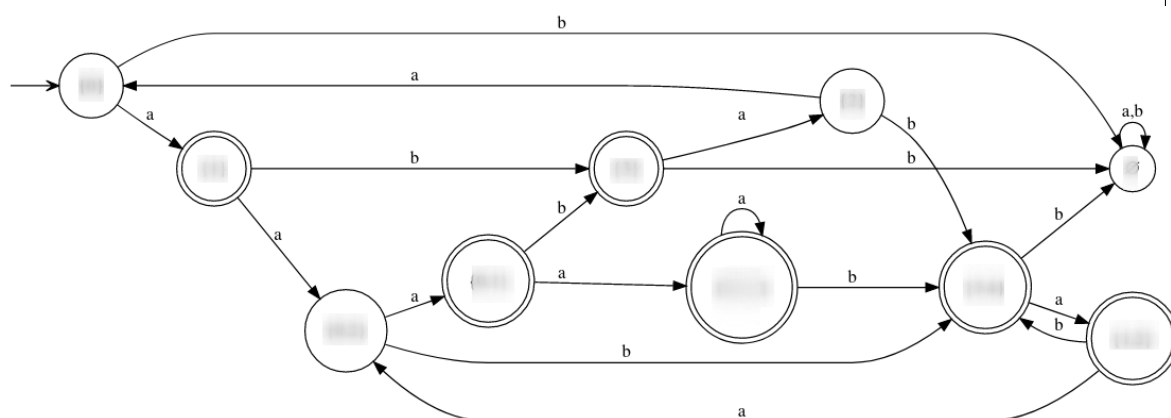


(-iii-)

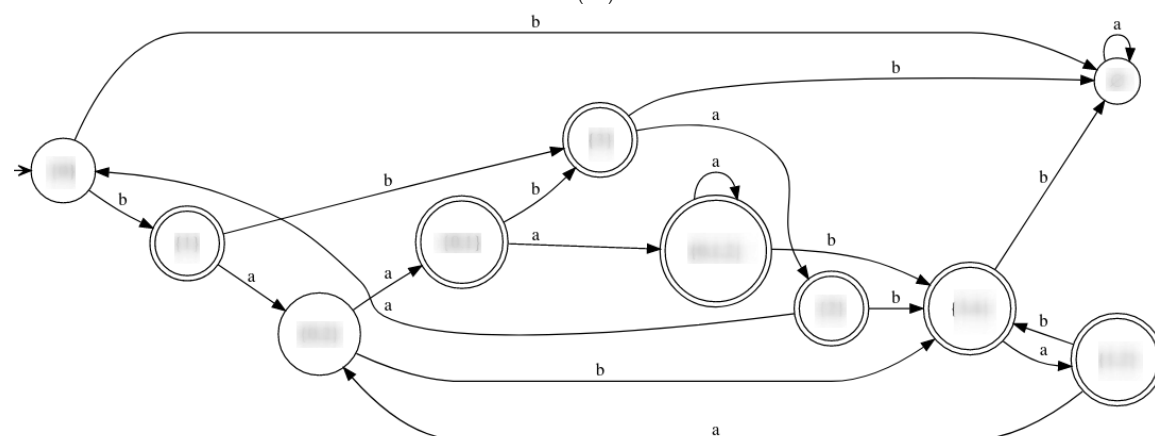


(-iv-)

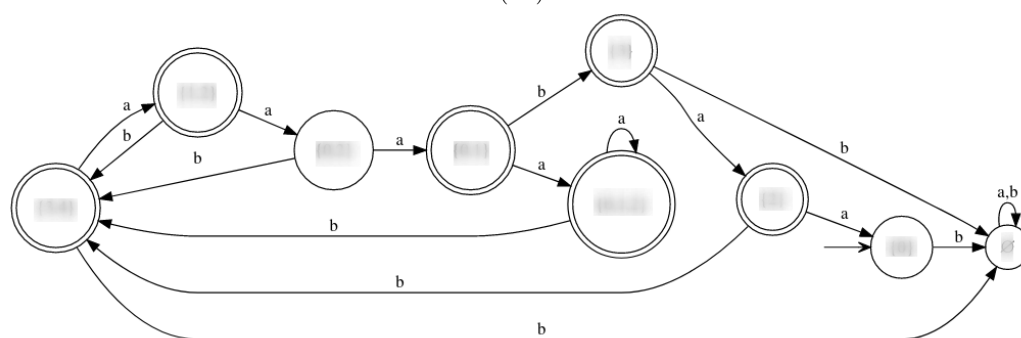
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



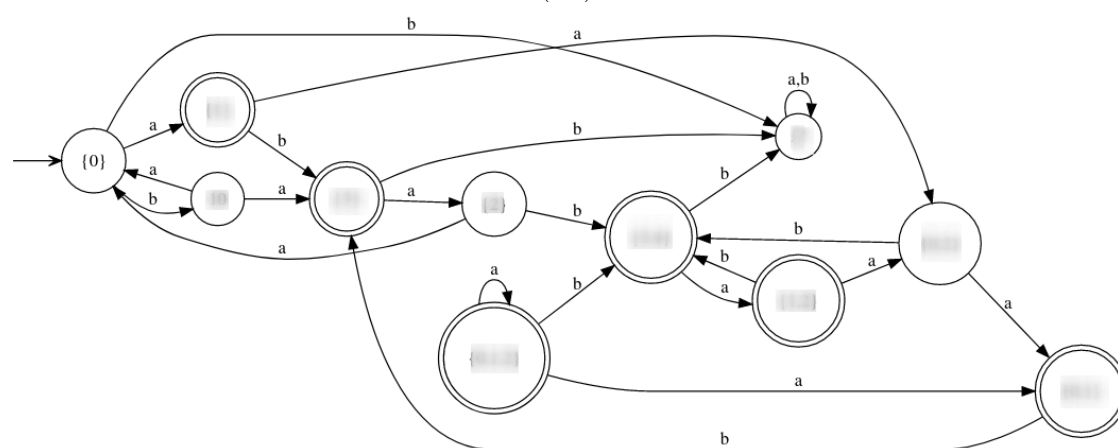
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e  g  i j

Question 3 : a    e   h i j k

Question 4 :  b  d e

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a b  d  f g h i

Question 8 :  b  d  f g      m n

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a b  d e f g  i j  l 

Question 12 : a b c d e  g h

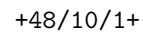
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ A possède un état puits

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .

- ☐g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐a Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐d Σ est fermé par facteur. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐g Σ est fermé par suffixe.
☐h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐a A n'a pas d'état accepteur. ☐b A a au moins un état co-accessible.
☒ A a au moins un état accessible. ☐d A a au moins un état non accessible.
☒ u n'est pas accepté par A . ☒ A n'est pas complet.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐h A a au moins un état non co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐b Un mot peut être infini.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une application.
☐g Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐b la Figure 3-i-. ☐e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐c la Figure 3-iv-. ☐d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐c la Figure 4-ii-. ☐d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_4 = a + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

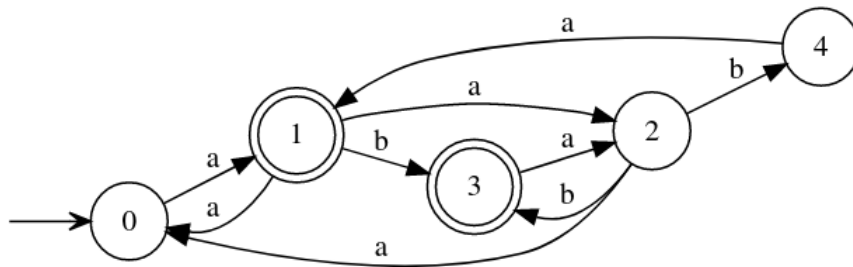
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

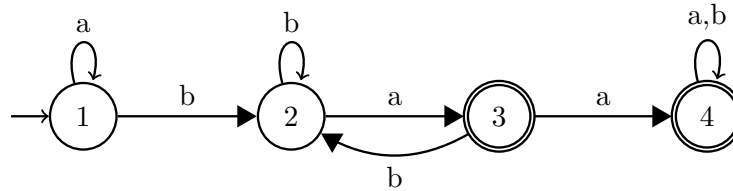
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☒ b 4 ☐ c 1 ☐ d 2 ☐ e 3 ☐ f 5 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

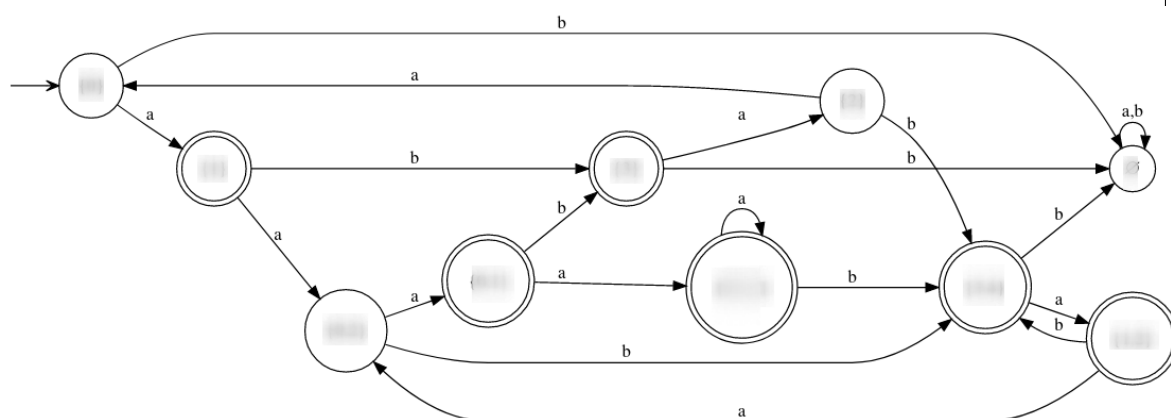


(-iii-)

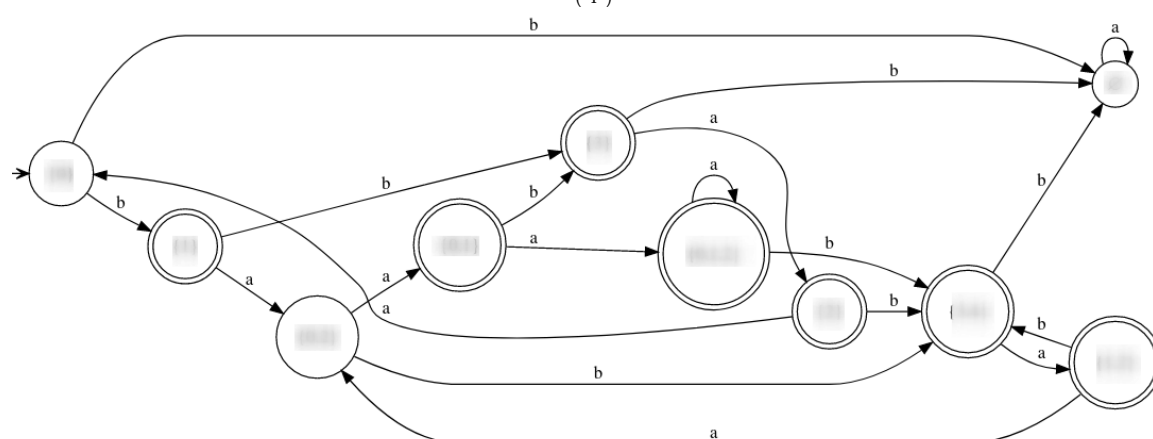


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservez enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 :  b c d e f  h i

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a   d   g h i j

Question 7 : a b  d    h  j k

Question 8 : a b     g   j   m n

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 :  b  d e f  h i  k l m

Question 12 :  b c d e f g h

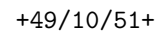
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ g Σ est fermé par suffixe. ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c A a des états accepteurs. ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ i Un mot peut être infini. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c A possède un état puits
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.

$$\boxed{\text{f}} \quad |\delta| = |Q| \times |\Sigma|.$$

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.

☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état non co-accessible.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

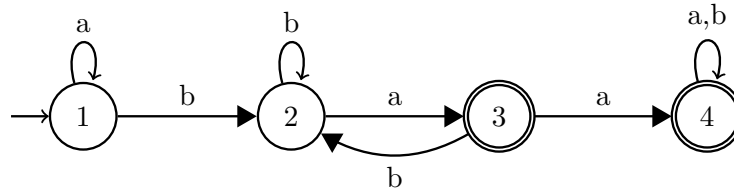
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 6 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 5 ☐ f 1 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

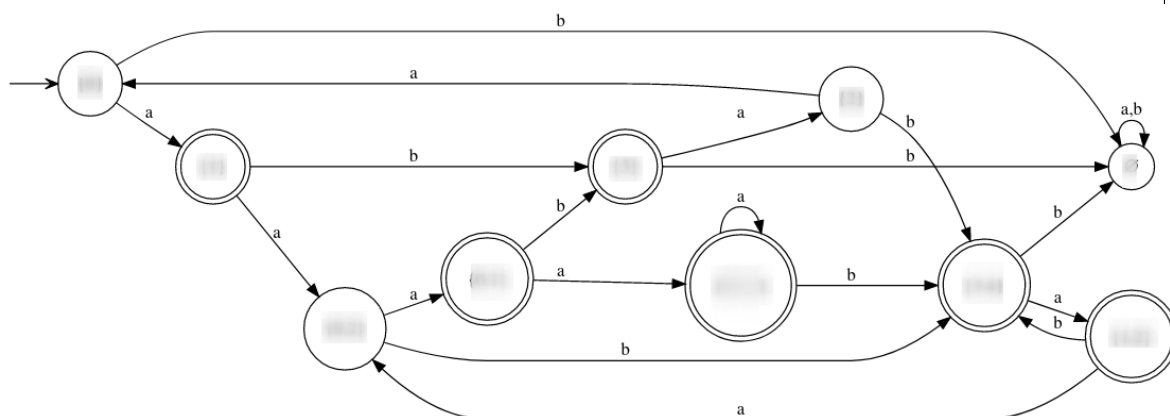


(-iii-)



(-iv-)

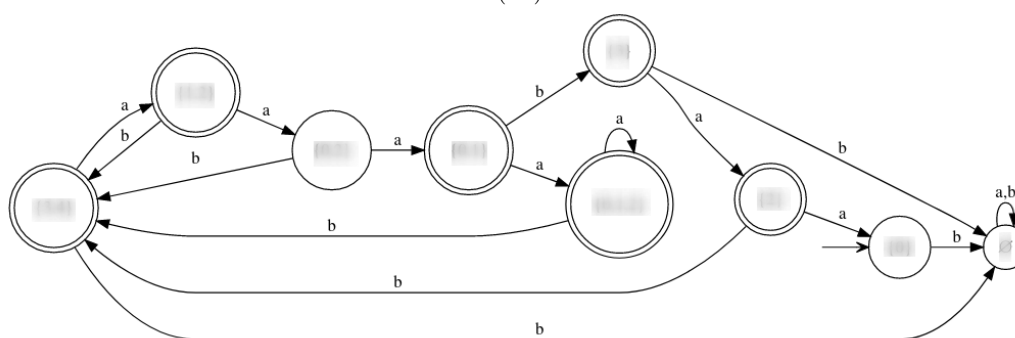
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



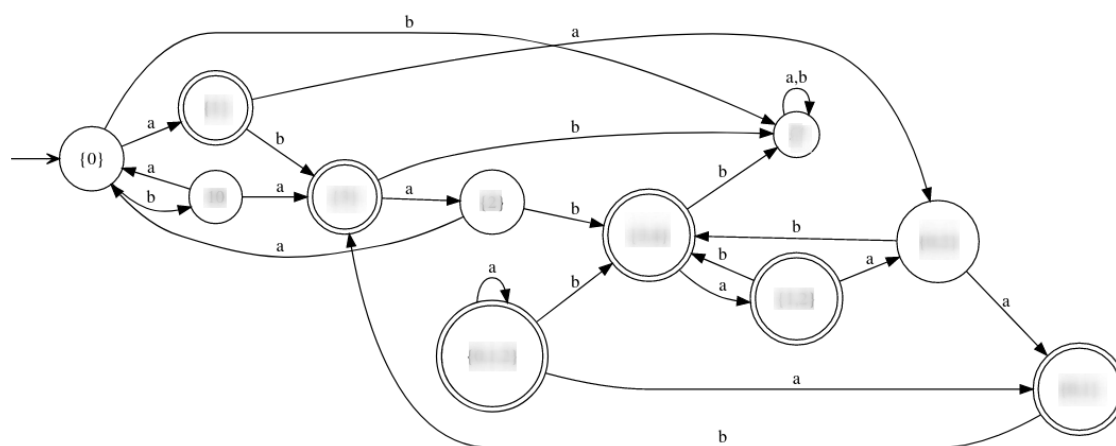
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

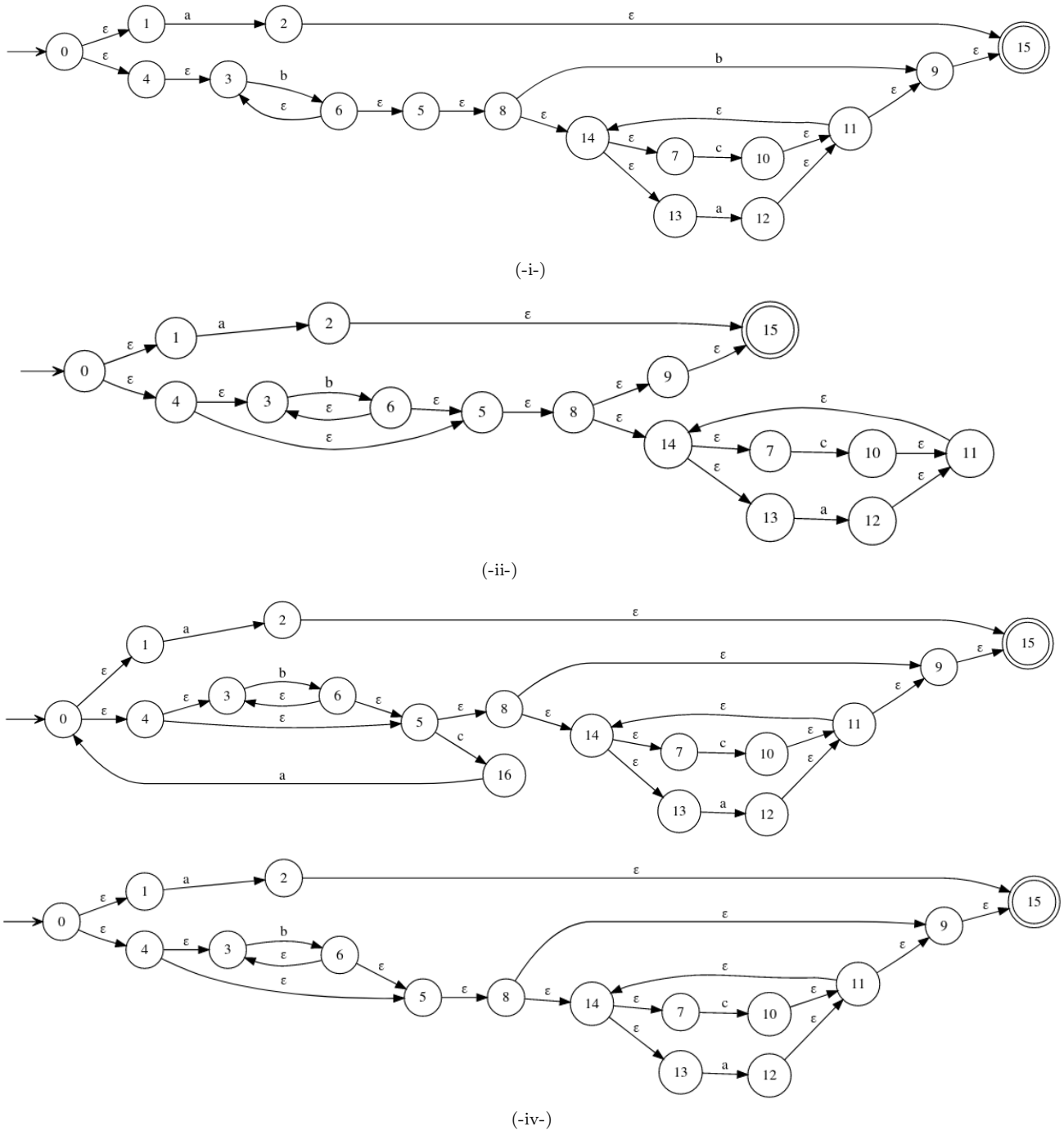


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c				g	h	i	j

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

		c		e		g		i				m	n

Question 5 :

	b	c	d	e	f		h	i

Question 6 :

a		c	d					i	j	k

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e				i	j	k	l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

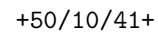
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f A accepte le langage universel.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ u n'est pas accepté par A . ☐ e A a au moins un état non accessible.

- ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ g A a au moins un état co-accessible.
☐ h A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ f Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot peut être infini. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

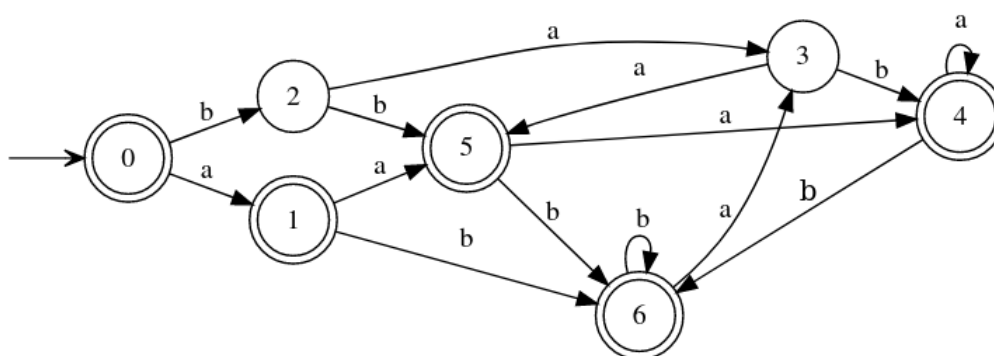
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

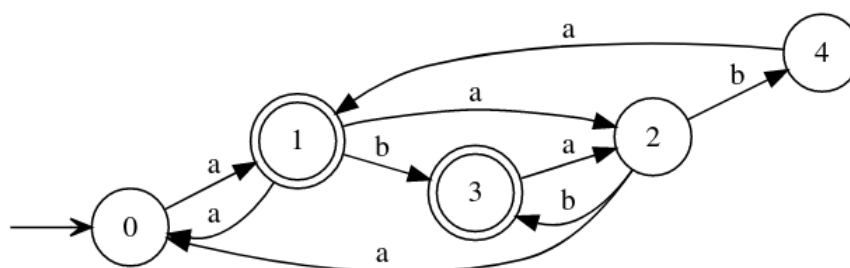
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

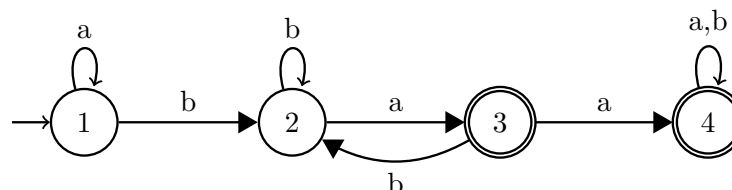
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 3 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 5 ☐ f 2 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

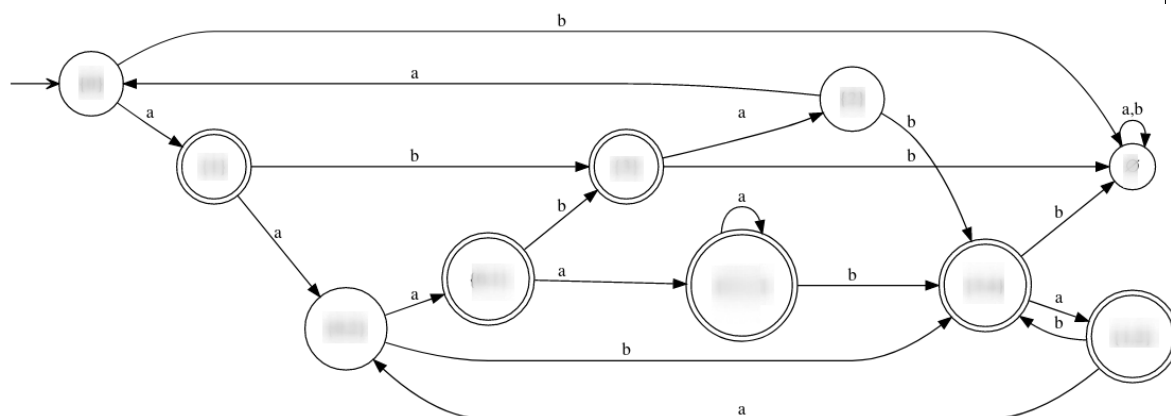


(-iii-)

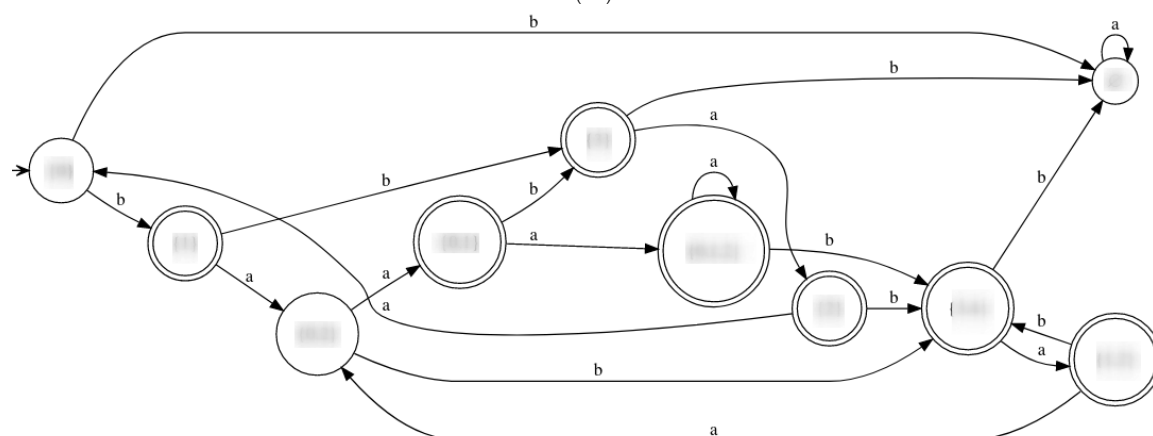


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

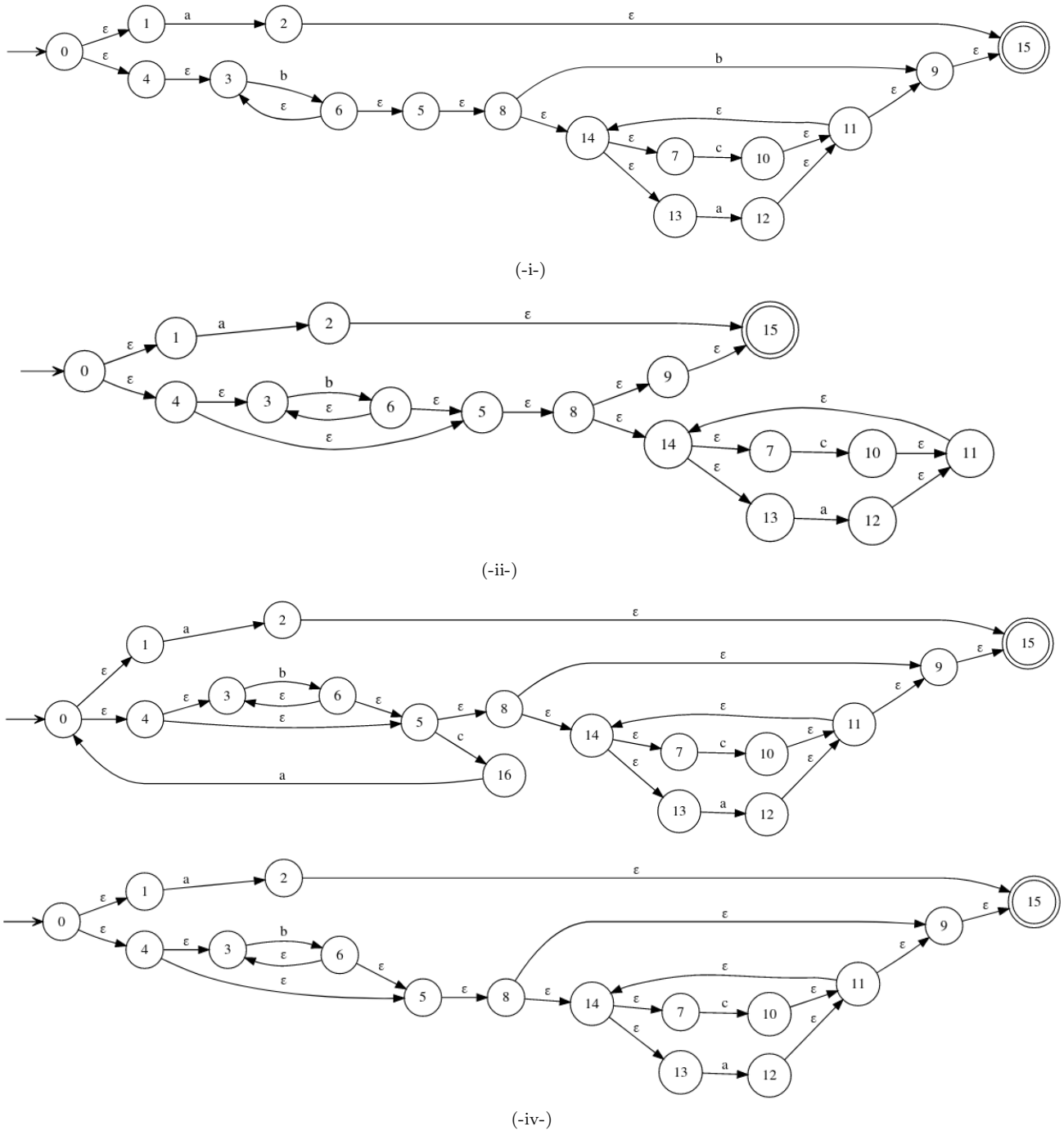


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

				e	f	g	h		j	k

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

	b	c	d		f			i	j

Question 8 :

				e	f	g				k		m	n

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f		h	i		k	l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

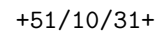
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f A possède un état puits ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ f Les états de A sont tous accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.

☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.

☐ u n'est pas accepté par A . ☐ f A a au moins un état co-accessible.

☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ A n'est pas complet.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ c Un mot peut être infini. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.

☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une fonction.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par facteur.

☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

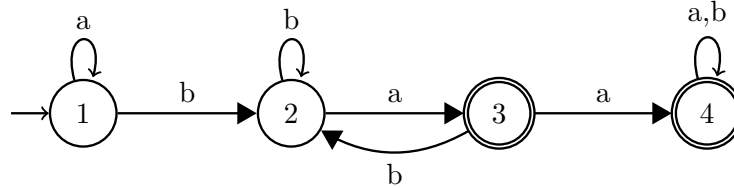
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 6 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 3 ☐ f 2 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

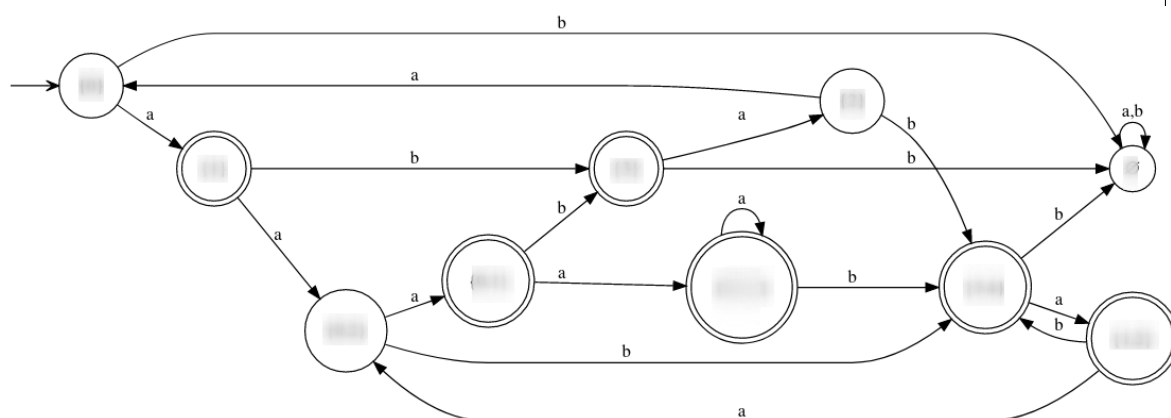


(-iii-)

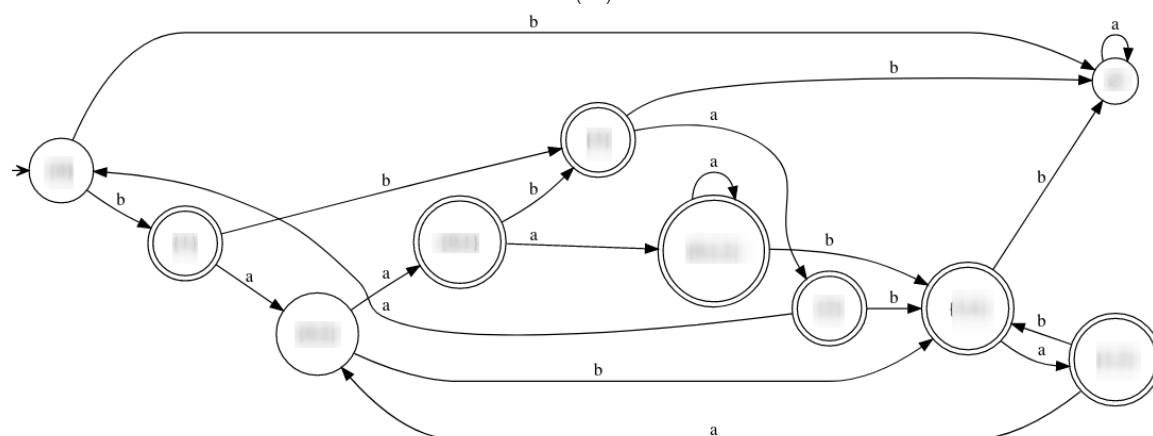


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



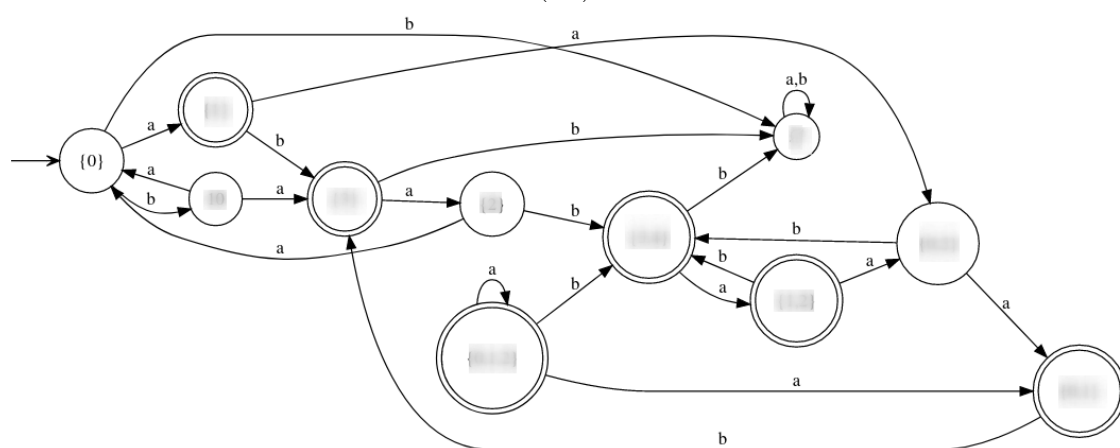
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

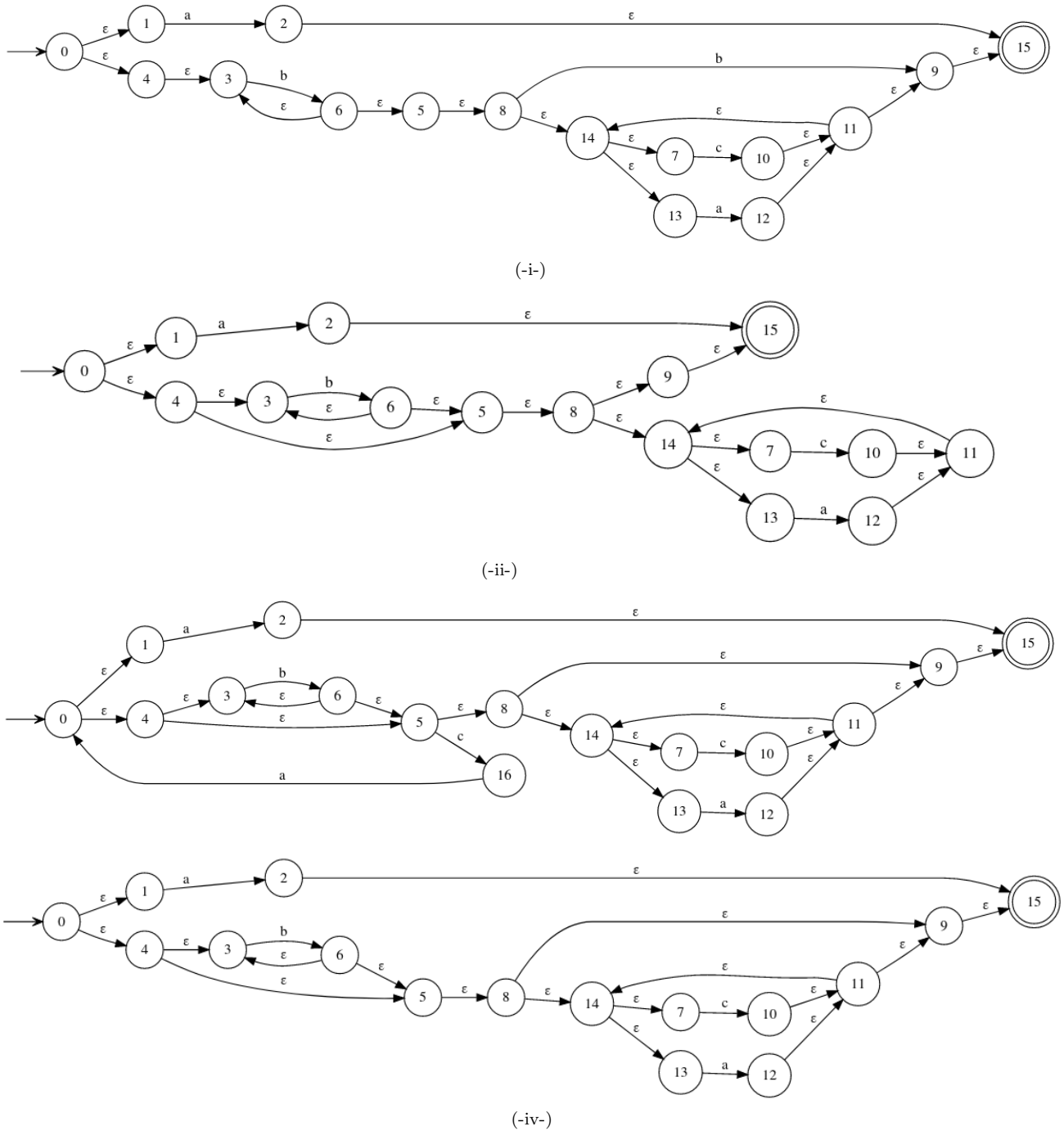


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

		c	d		f	g			j	k

Question 7 :

		c				g	h			k		m	n

Question 8 :

a		c	d				h	i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

		c	d		f	g	h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

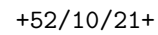
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut être infini.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot est une application.	☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une fonction.	☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☐ g Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

- ☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☐ d A a au moins un état co-accessible.
☐ e A a au moins un état non accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☒ A n'est pas complet. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c u est accepté par A .
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ b P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c A accepte le langage universel. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f A possède un état puits ☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		
☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		
☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

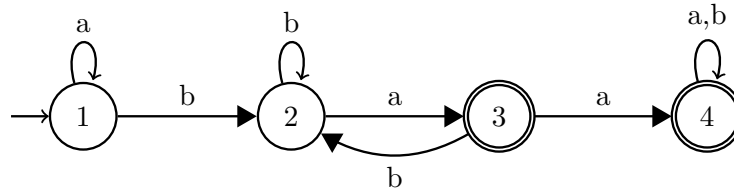
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 5 ☐ f 1 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

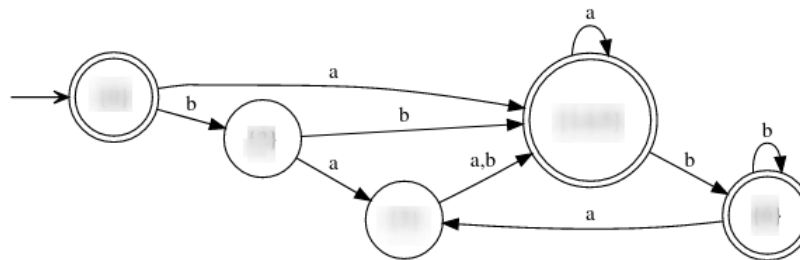
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



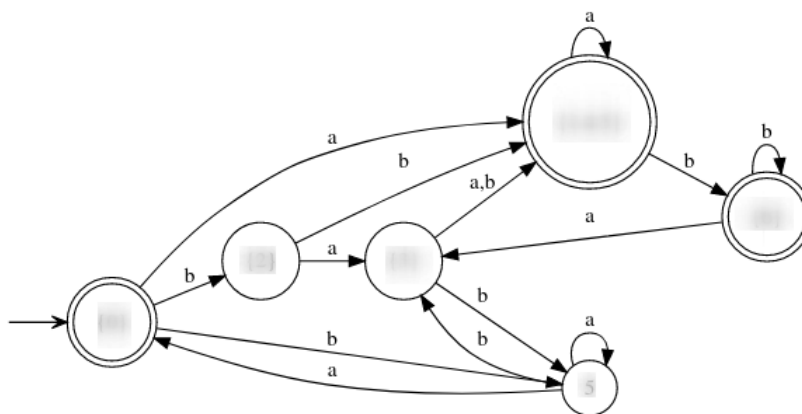
(-i-)



(-ii-)

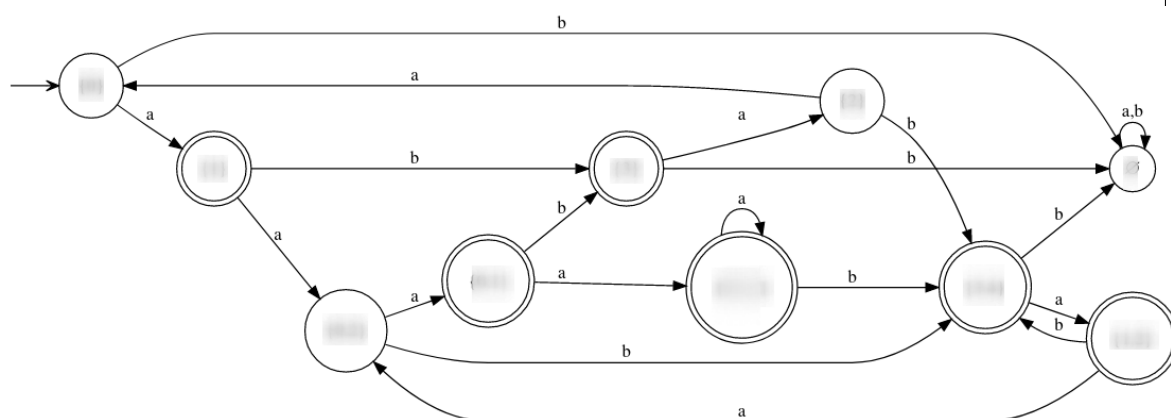


(-iii-)

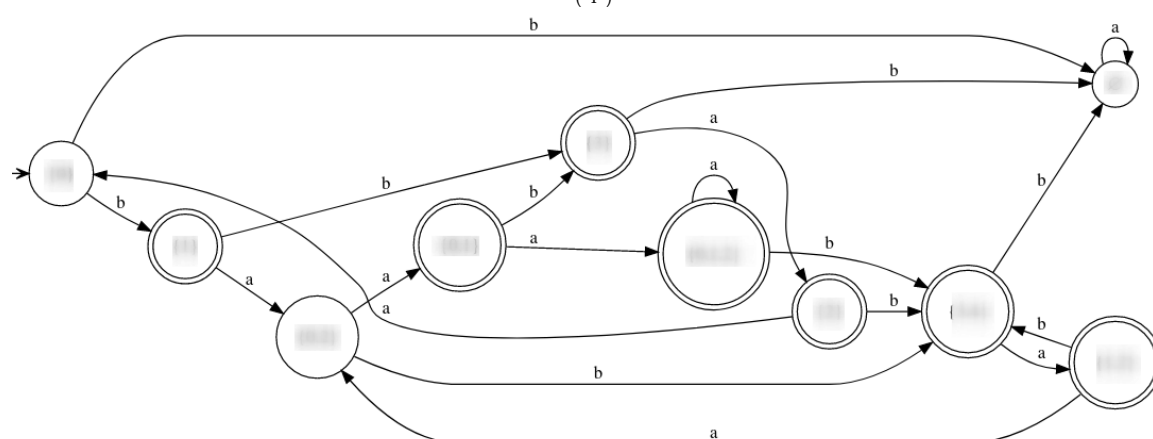


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e      l m n

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a    e f g  i j

Question 5 :   c d e  g   j k

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :   c d e

Question 8 : a b c d  f  h i

Question 9 : a  c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d e   h i j k  

Question 12 : a  c d e f g h

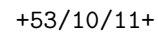
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.
☐ e u est accepté par A . ☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a u n'est pas accepté par A . ☒ b A n'est pas complet.
☒ c A a au moins un état accessible. ☒ d $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☐ f A a au moins un état co-accessible. ☐ g A a au moins un état non accessible.
☒ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ b Σ^* est fermé par préfixe.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☒ d Σ^* est fermé par facteur.
☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ f Σ est fermé par facteur.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ $X_1 = aX_1 + b$ ☐ $X_4 = (a+b)X_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ $X_4 = a + b$ ☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$ ☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ $X_4 = a^* + b^*$ ☐ $X_4 = (a+b)^*$ ☐ $X_4 = (a+b)X_4$
☐ $X_4 = a + b$ ☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ $X_1 = a^*b$ ☐ $X_1 = a^+bX_2$ ☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*aX_3$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ $X_3 = a(a+b)^*$ ☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

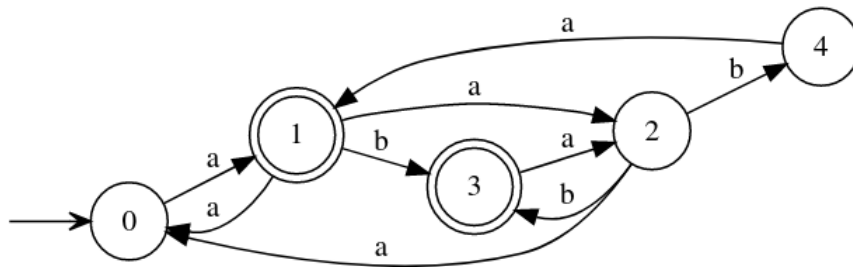
- ☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

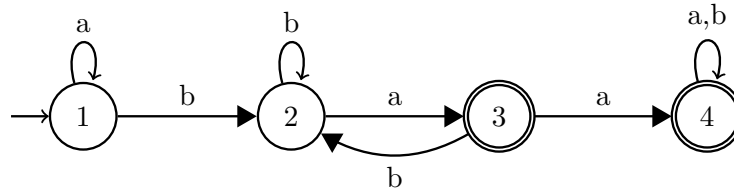
- ☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$ ☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 6 ☐ d 5 ☐ e 0 ☐ f 2 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

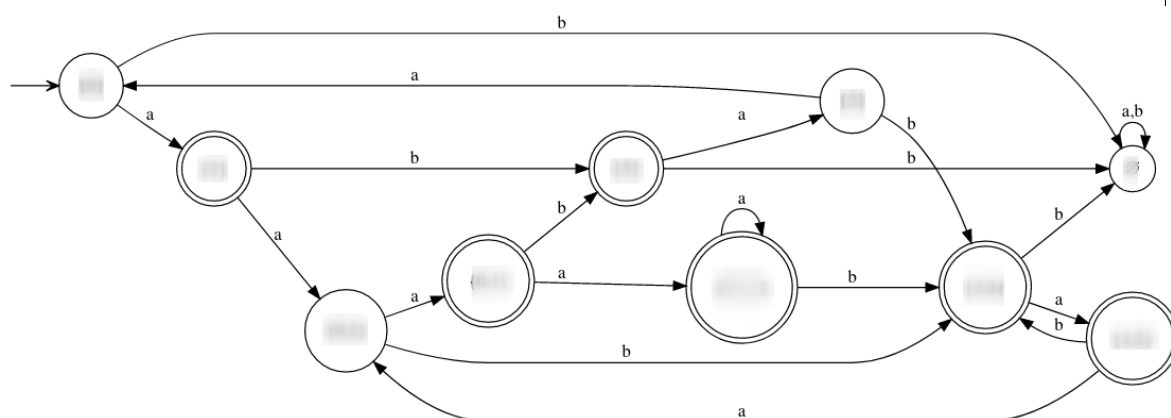


(-iii-)

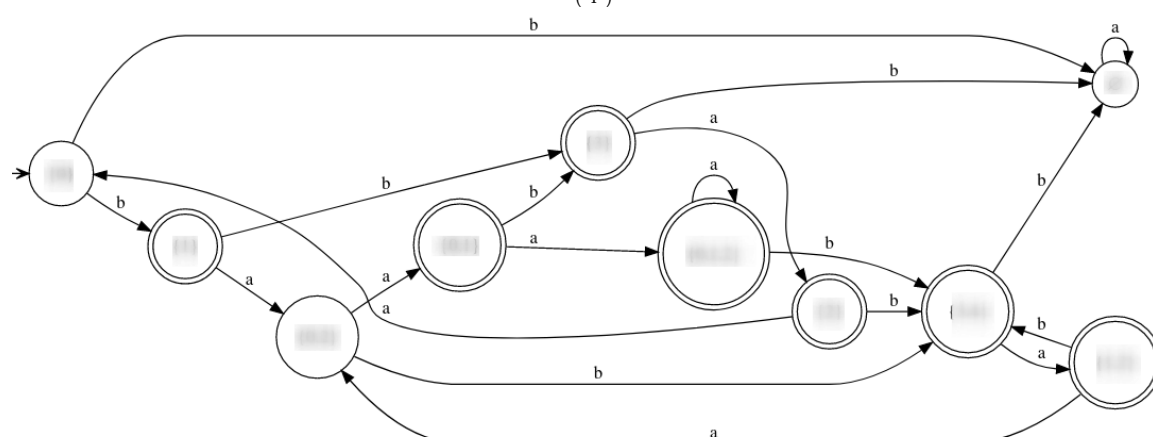


(-iv-)

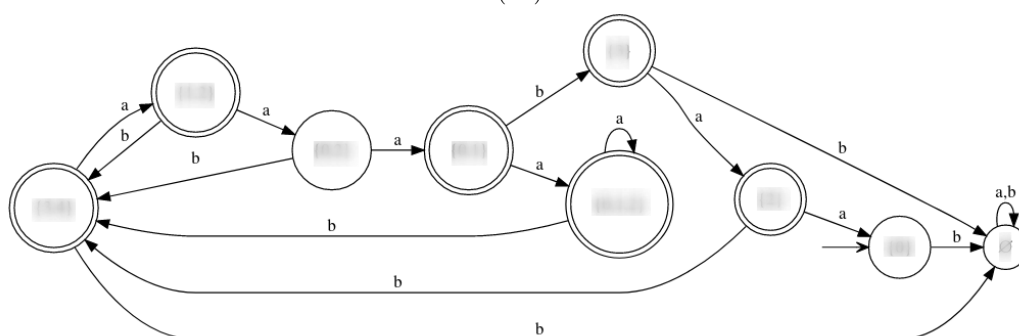
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

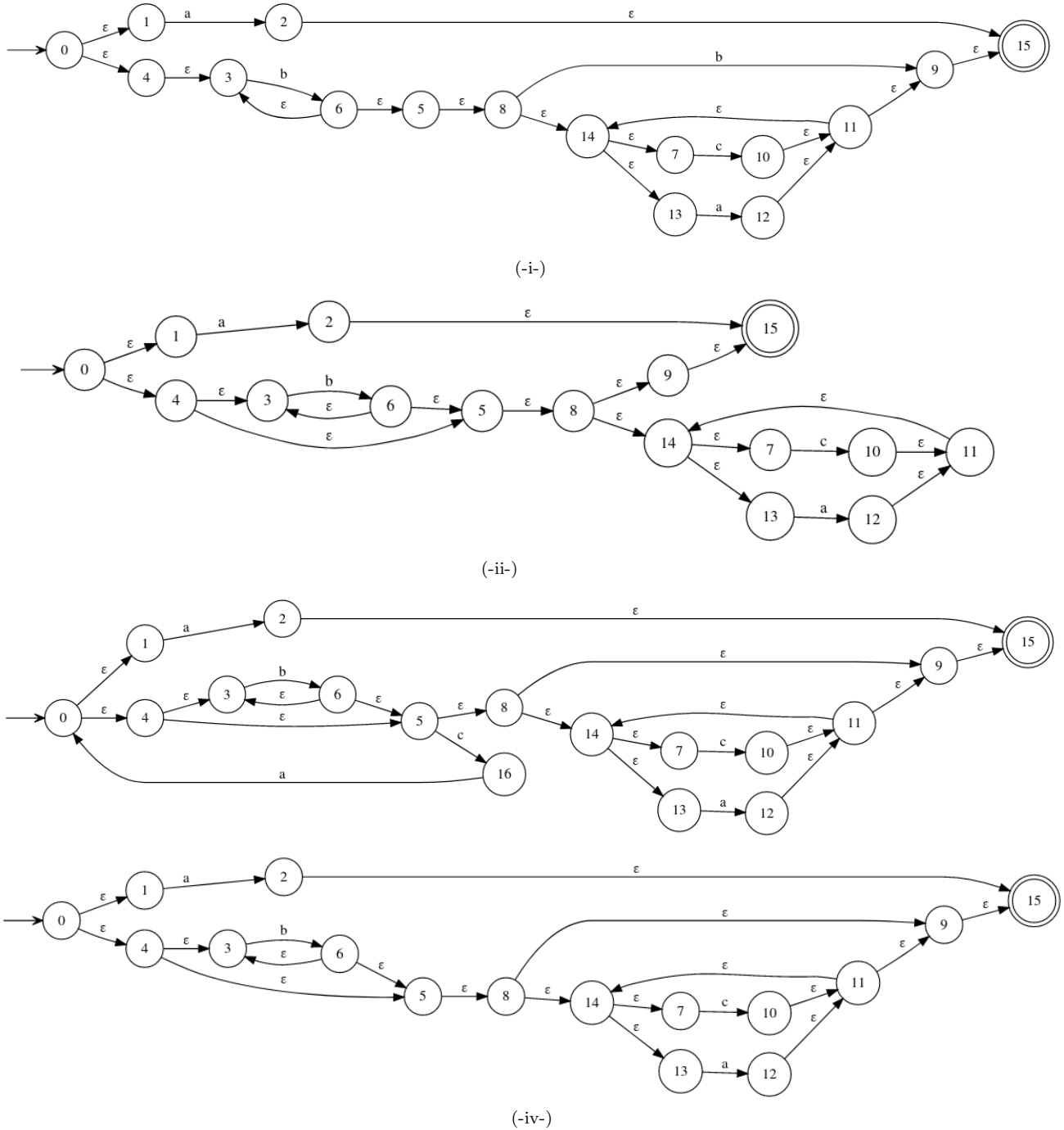


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

				e	f	g		i	j	k

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

		c		e	f		h	i	j

Question 6 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 7 :

		c	d			g				k		m	n

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c	d		f		h	i			l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

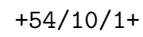
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ i Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A .
 ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ A n'est pas complet.
 ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a au moins un état non accessible.
 ☐ g A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ b A accepte le langage universel.
 ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
 ☐ e A possède un état puits
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A a des états accepteurs.
☐ A est complet. ☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

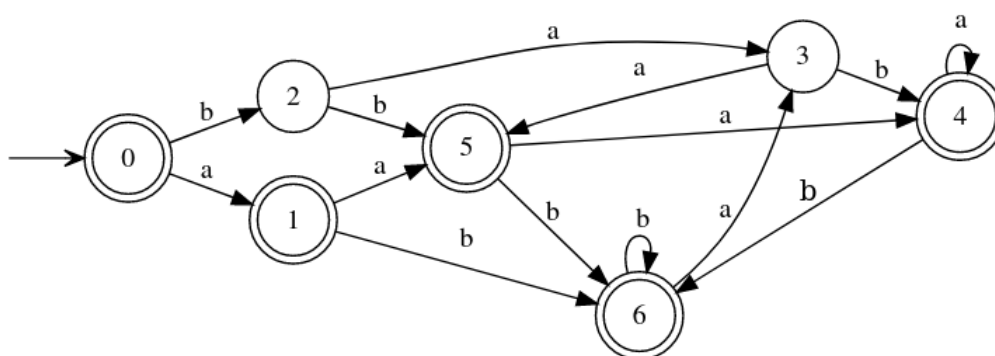
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

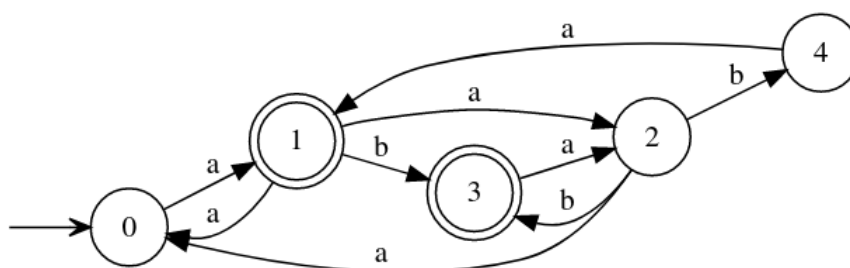
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

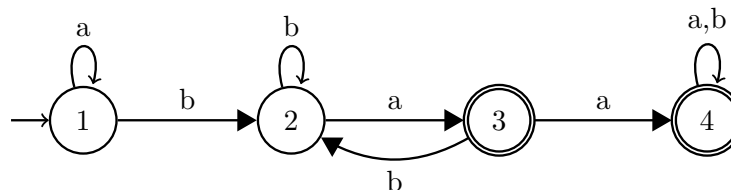
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 1 ☐ f 3 ☐ g 0

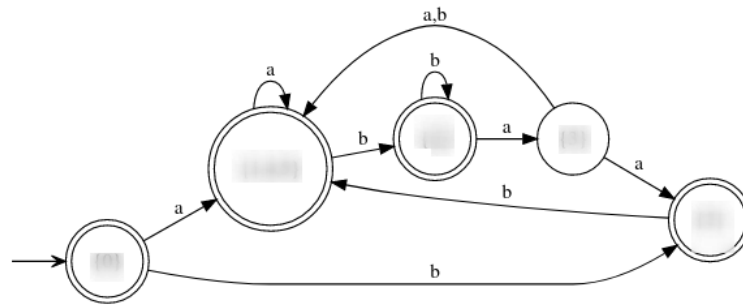
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

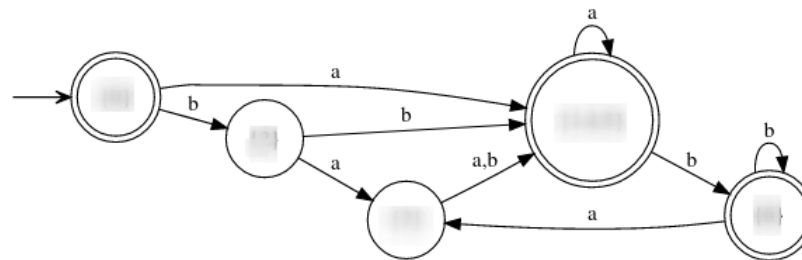
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



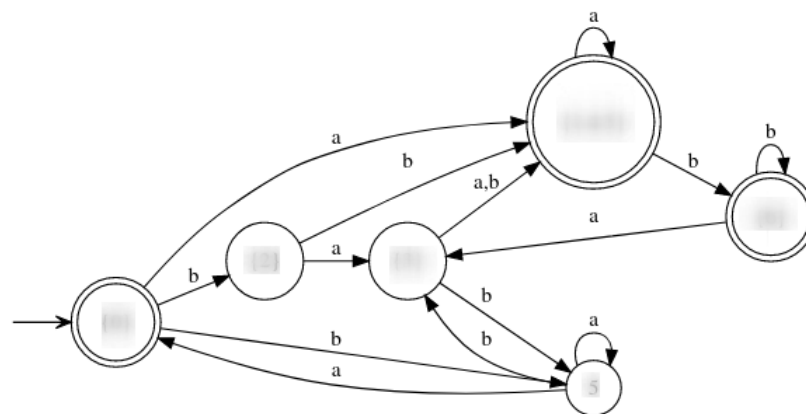
(-i-)



(-ii-)

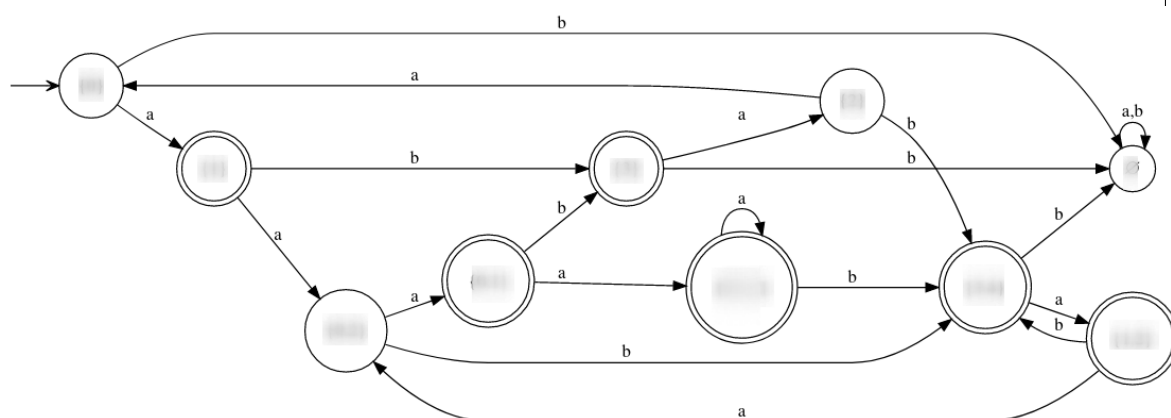


(-iii-)

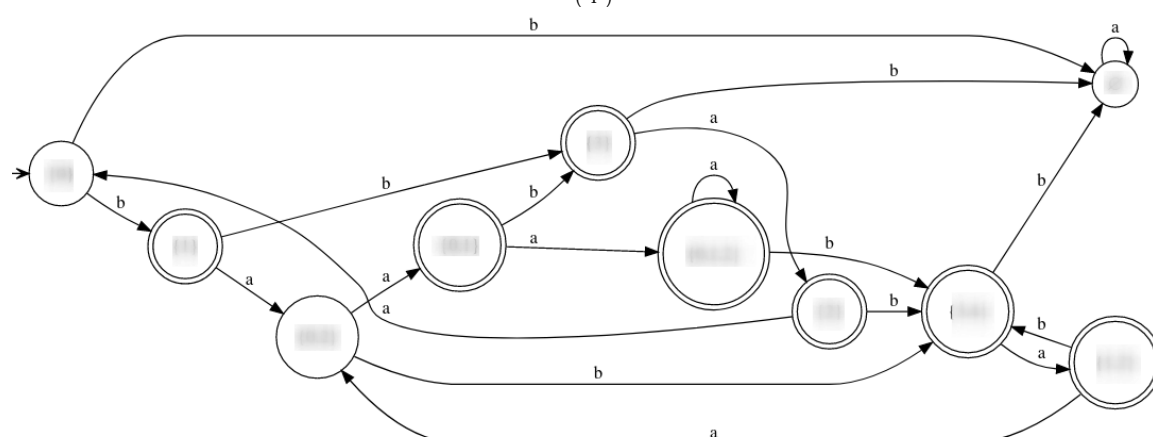


(-iv-)

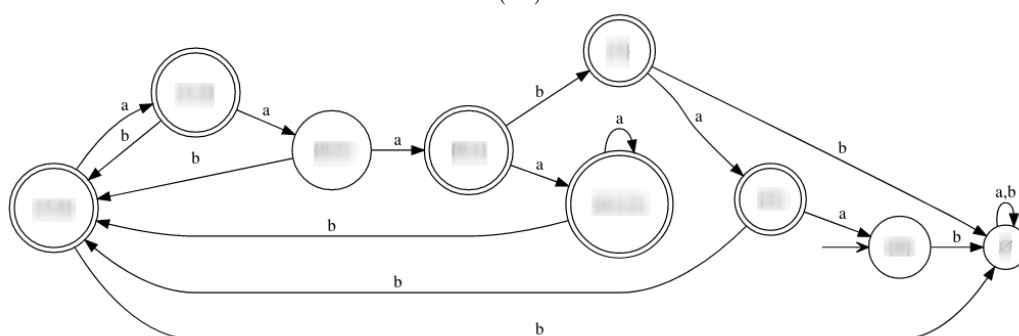
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



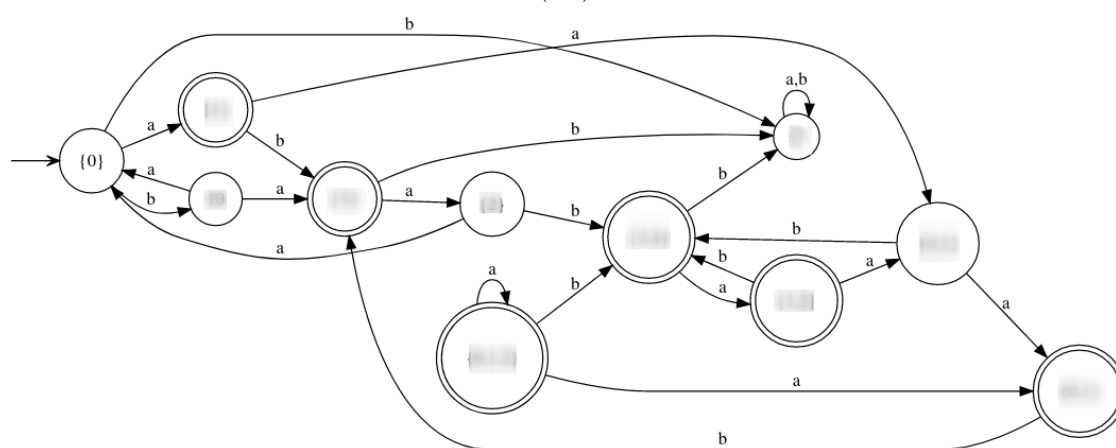
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

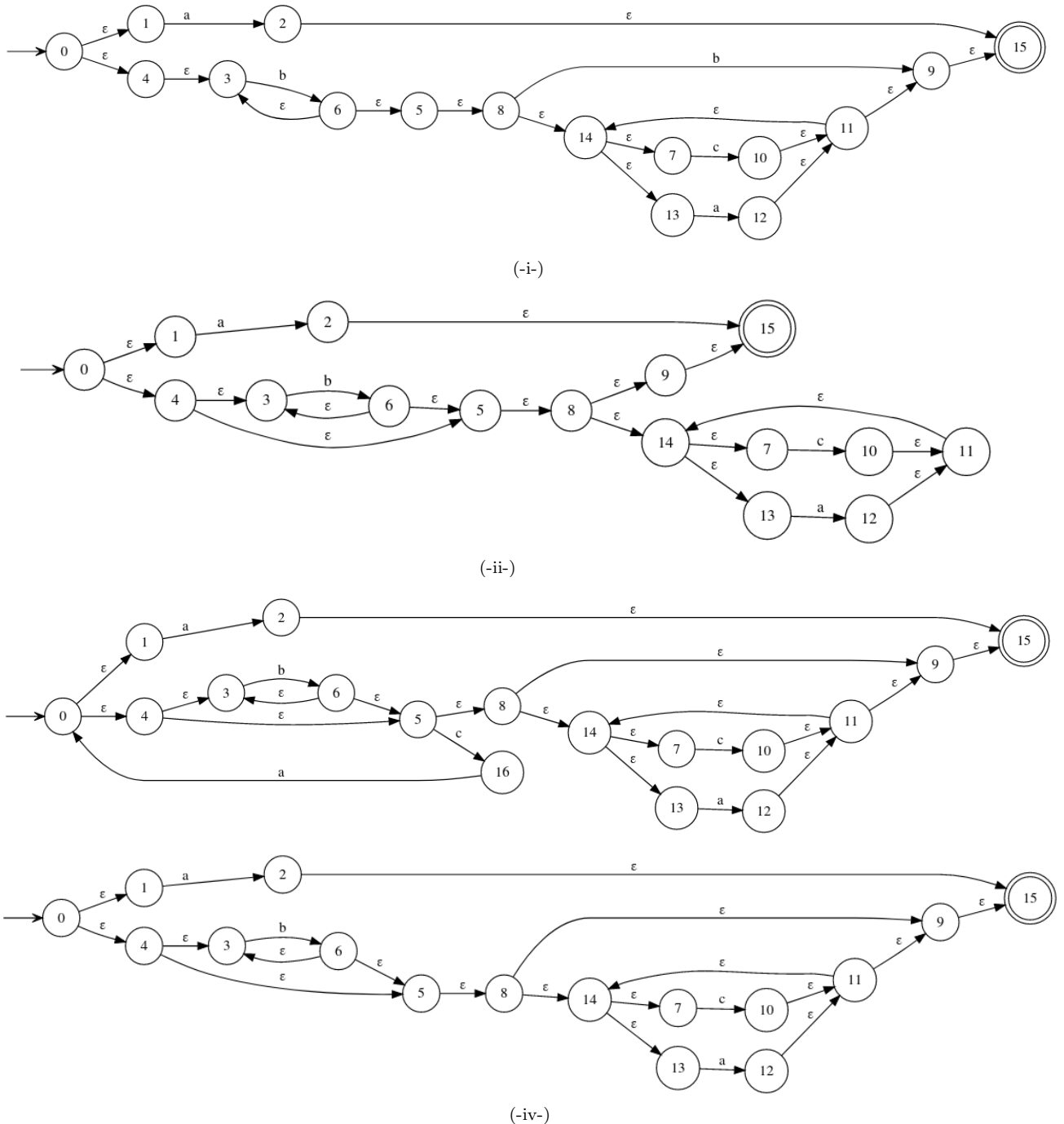


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e    i   l m n

Question 3 :  b c   f g   j k

Question 4 :  b c d e f  h i

Question 5 :  b   e f  h i j

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a   d e

Question 8 : a b c d 

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c d e  g  i  k  m

Question 12 : a b c  e f g h

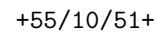
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
- ☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b u est accepté par A . ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

- ☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$		
☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		
☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

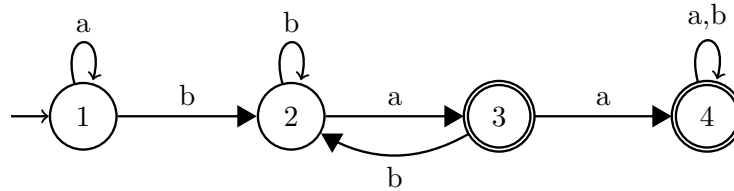
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

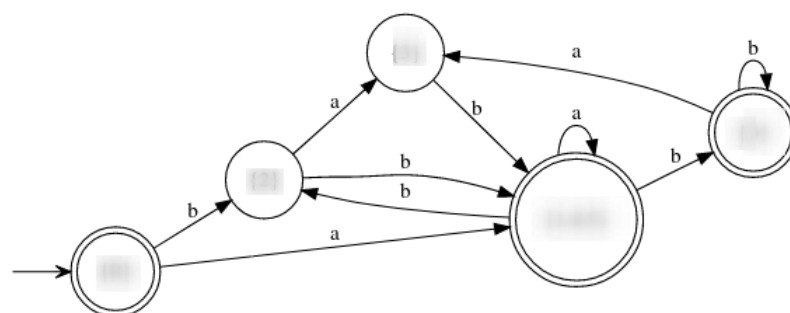
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 0

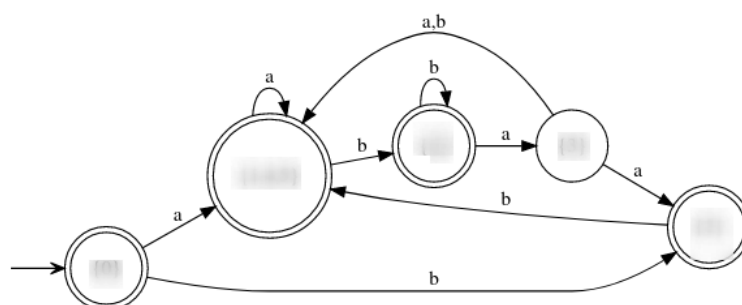
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

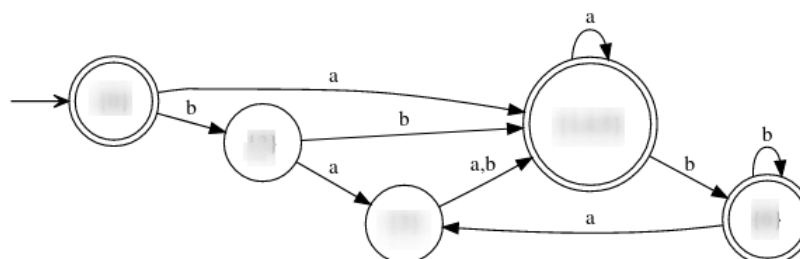
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



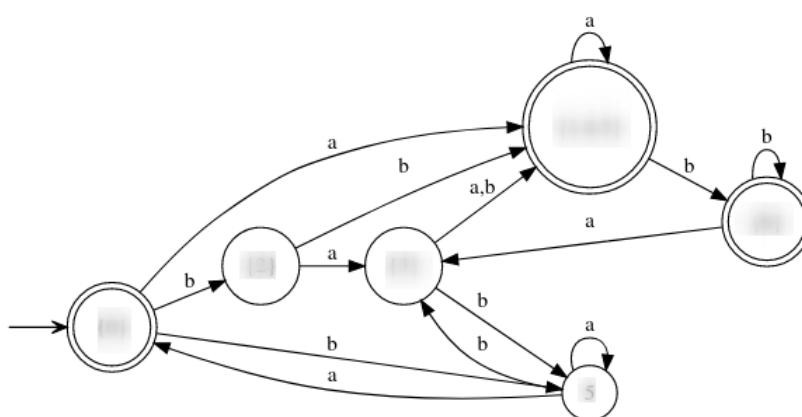
(-i-)



(-ii-)

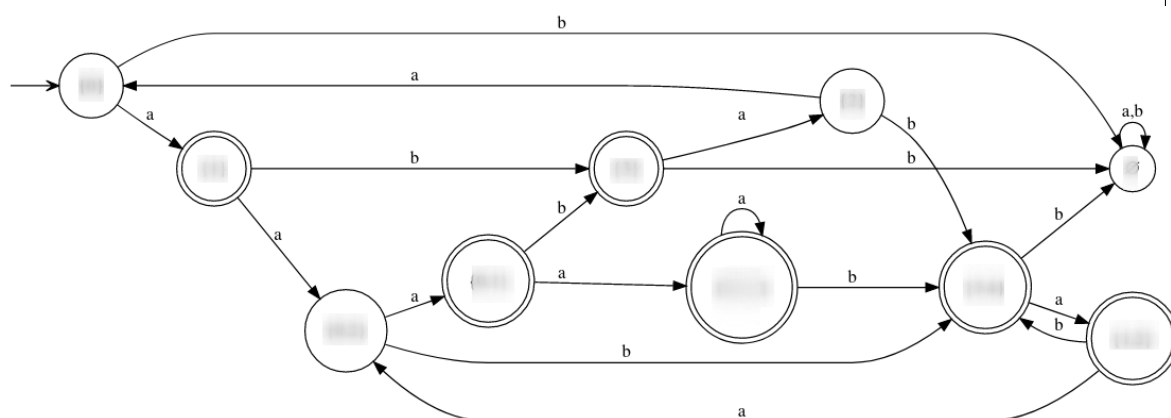


(-iii-)

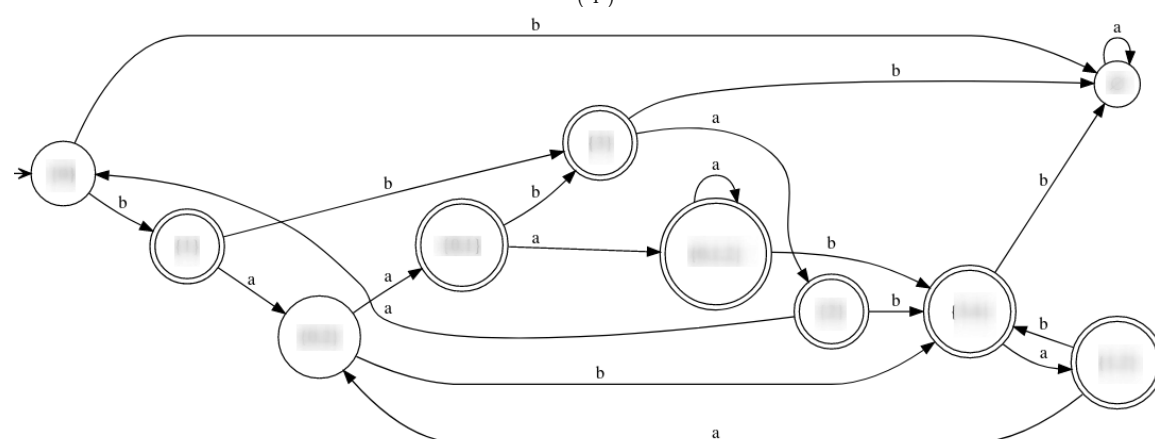


(-iv-)

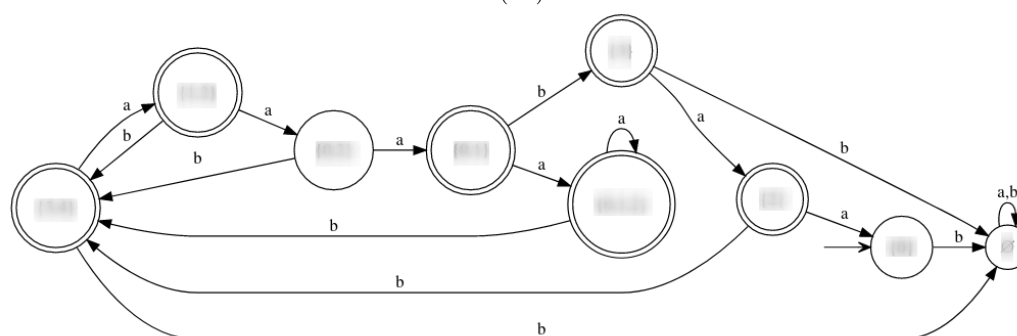
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



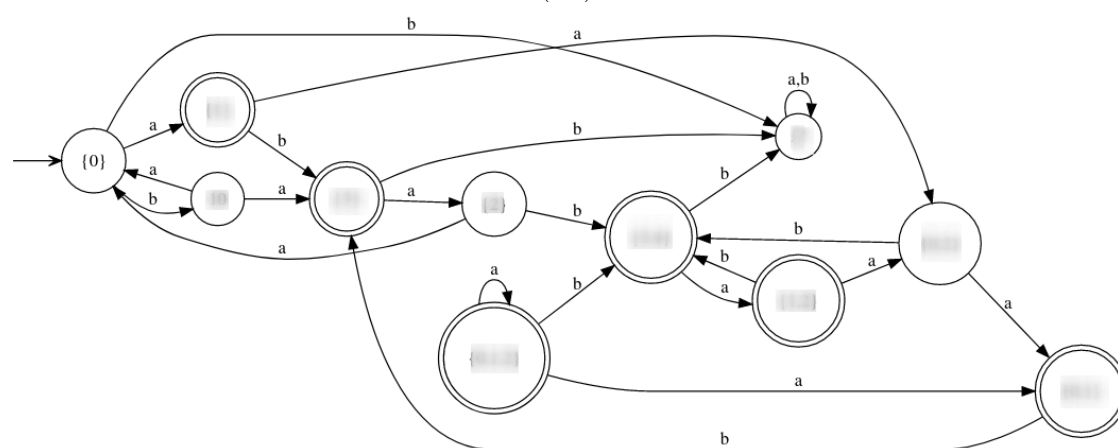
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 3 :

	b			e	f				j			m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a		c	d		f			i	j

Question 6 :

a	b					g		i	j	k

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c			f	g	h		j	k	l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

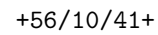
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☒ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a A accepte le langage universel.

☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ c A possède un état puits ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

☐ e Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A est complet.

☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A a des états accepteurs.

☐ f Les états de A sont tous accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A a au moins un état non accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ h A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ d Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ i Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
- ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 5 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 3 ☒ f 4 ☐ g 0

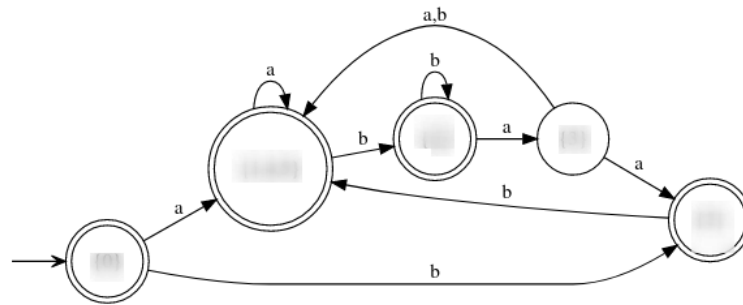
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



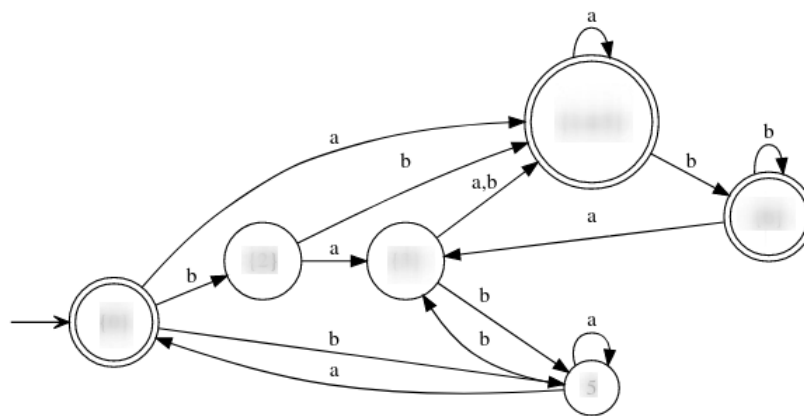
(-i-)



(-ii-)

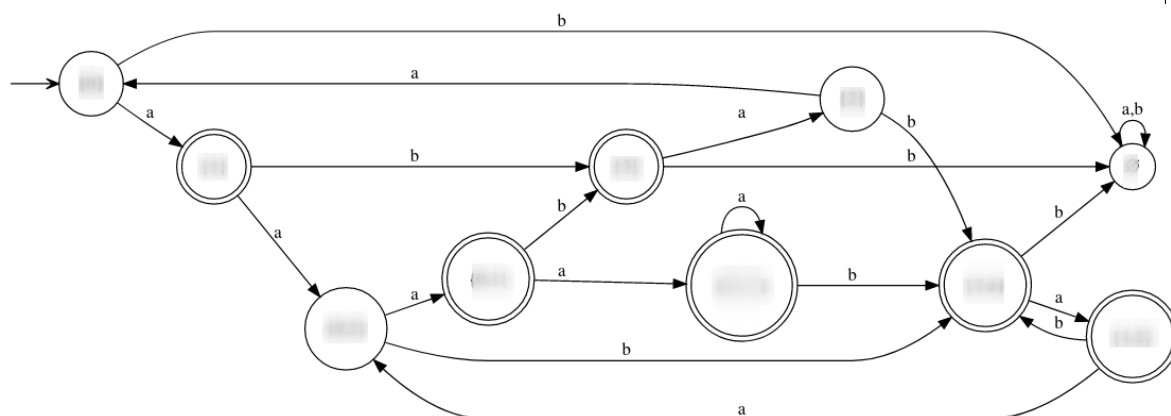


(-iii-)

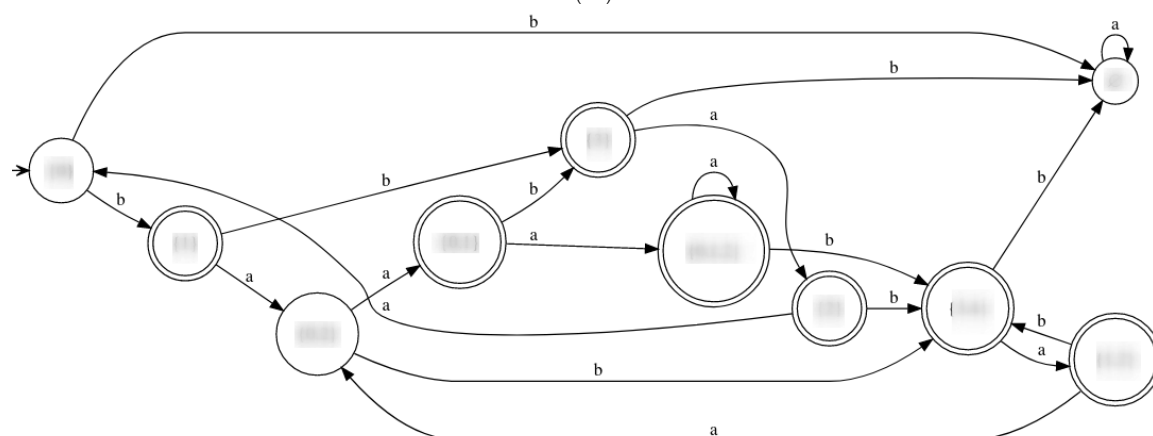


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

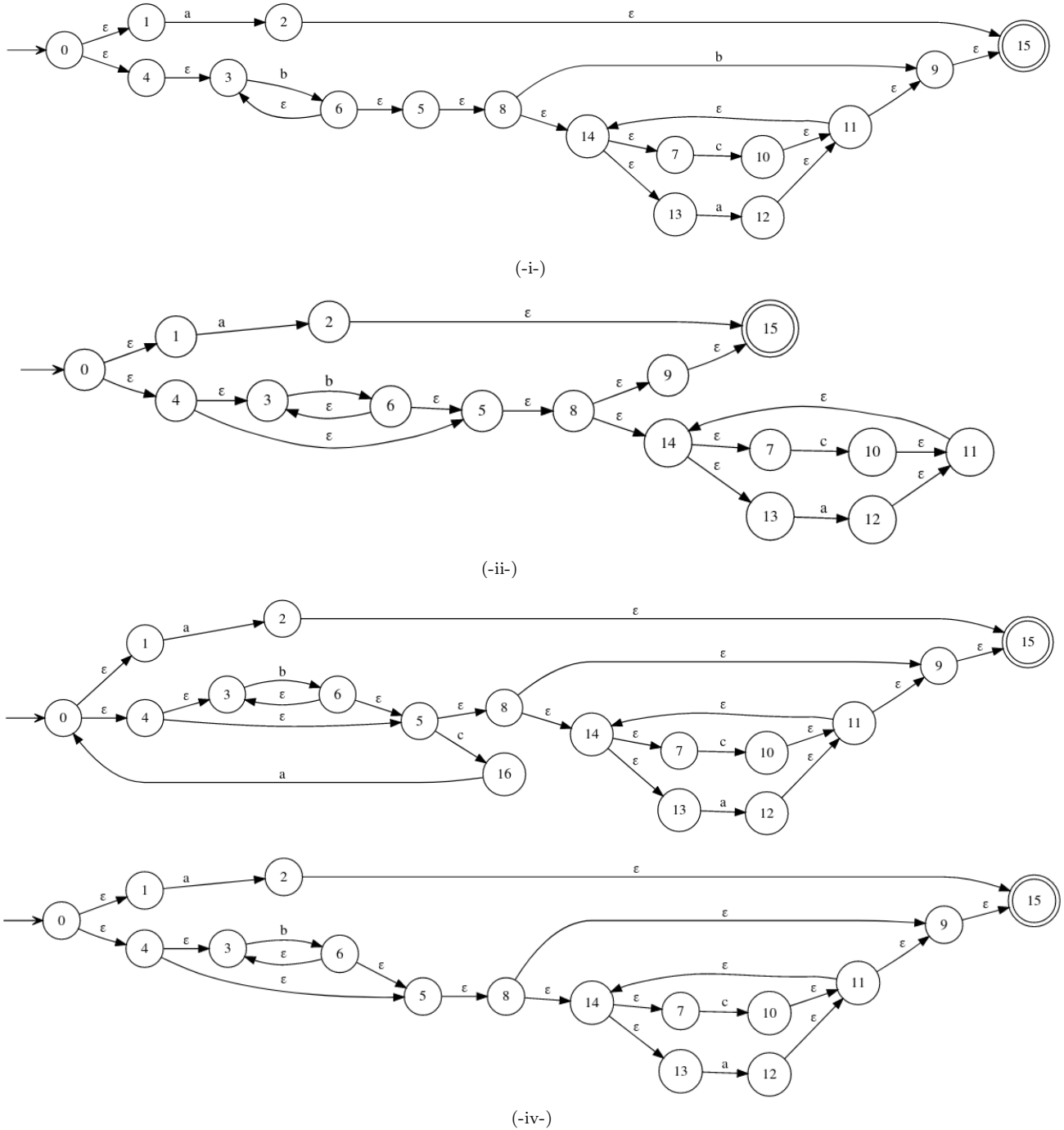


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a  c d e  g h i

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c d 

Question 6 :   c d  f  h  j k

Question 7 :   c d    i  k  m n

Question 8 : a   d e f   i j

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b  d

Question 11 :  b c  e f g  i j k  m

Question 12 : a b  d e f g h

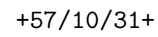
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ e Tous les états de A sont accepteurs. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ h A a au moins un état non accessible.
☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

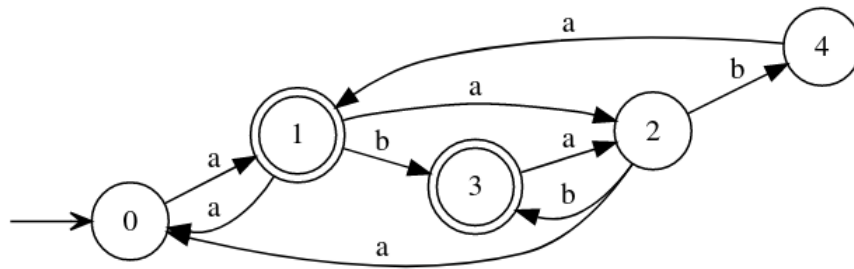
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

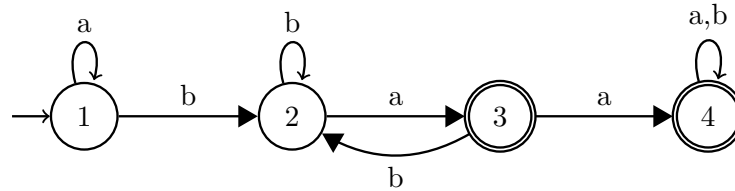
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☐ c 5 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 2 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

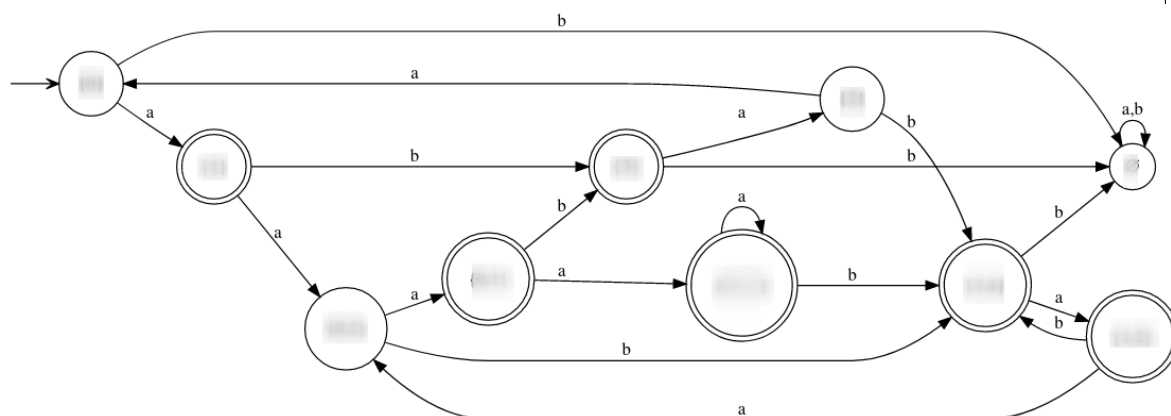


(-iii-)

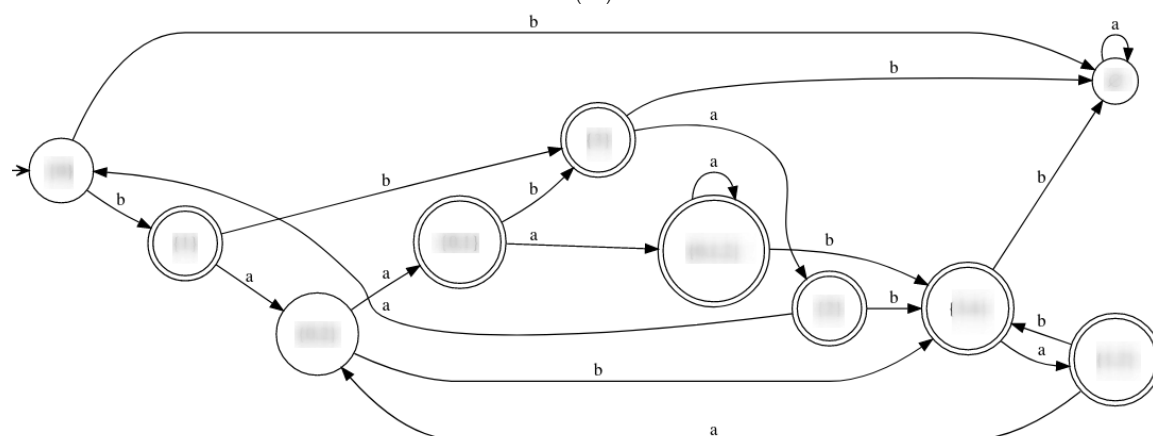


(-iv-)

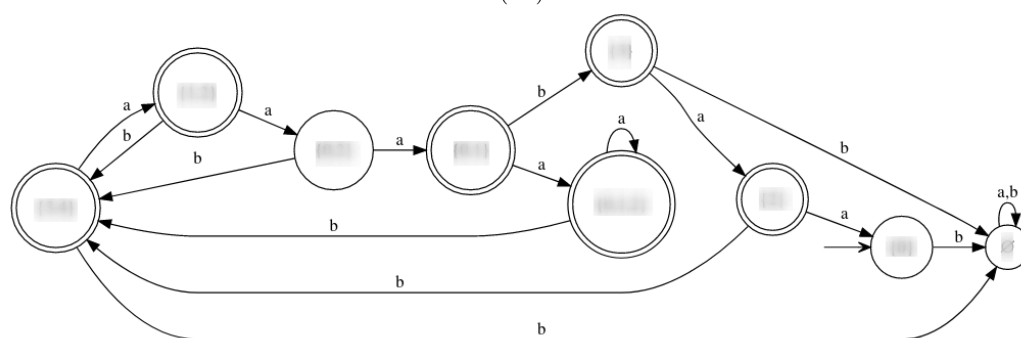
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



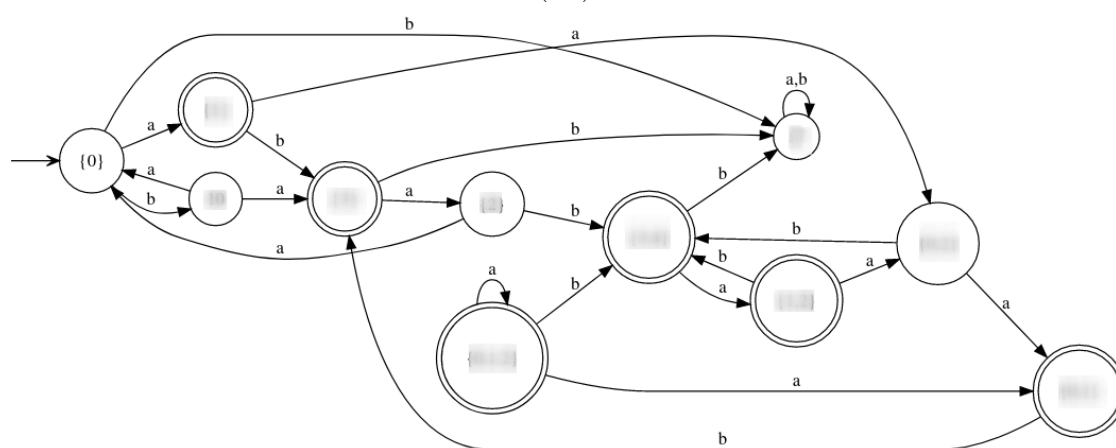
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a		c	d						k		m	n

Question 4 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 5 :

a						g	h	i	j	k

Question 6 :

	b				f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

	b			e	f		h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

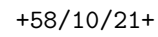
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c A possède un état puits
- ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ e A accepte le langage universel.
- ☒ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ b P est forcément déterministe.
- ☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet.
- ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d A a des états accepteurs.
- ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot peut être vide. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot est une application. ☒ Un mot est une fonction.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ f Un mot peut être infini.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ A n'est pas complet. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état non accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ A a au moins un état accessible. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
☐ e Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_4 = (a+b)X_4$ ☒ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☐ e $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ f $X_1 = aX_1 + b$
☐ g $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ h $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ i $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j $X_4 = a + b$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ l $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ b $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ c $X_4 = a + b$ ☐ d $X_4 = a^* + b^*$
☒ $X_4 = (a+b)^*$ ☐ f $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☒ $X_2 = b^*aX_3$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ b $X_3 = (a(a+b)^*)^*$ ☐ c $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = a(a+b)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☒ celle trouvée pour X_1 ☐ b celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

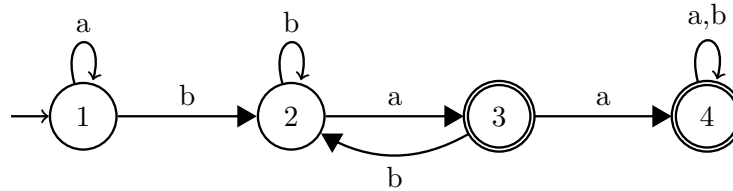
- ☐ a $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*(a+b)^*$ ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 6 ☐ c 1 ☐ d 2 ☒ 4 ☐ f 3 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

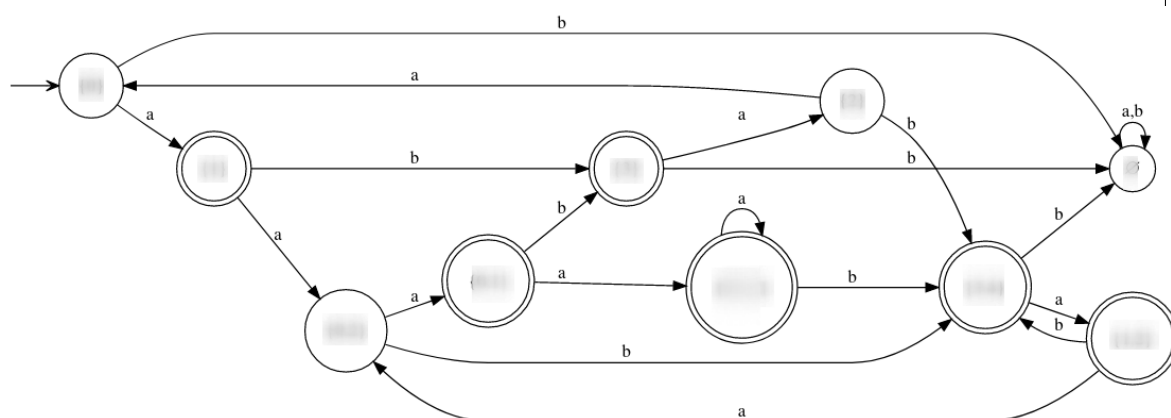


(-iii-)

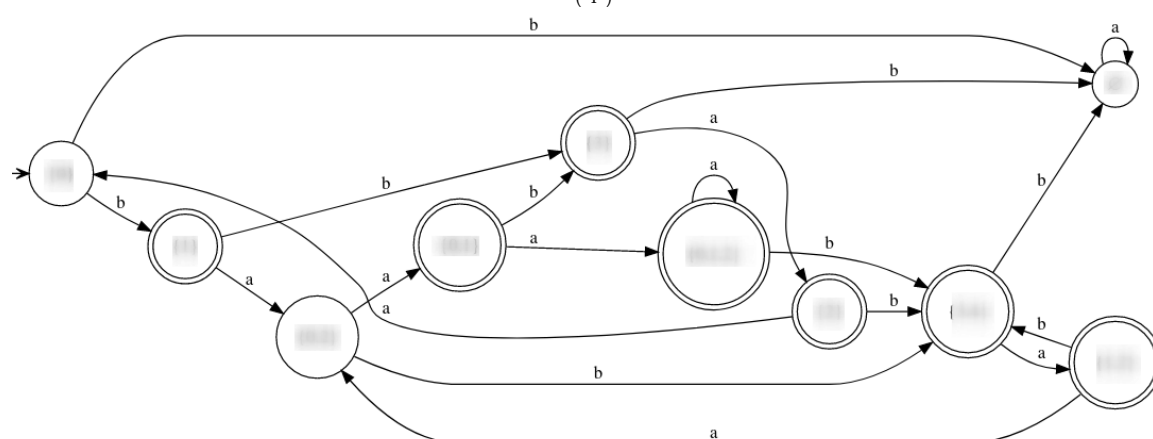


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



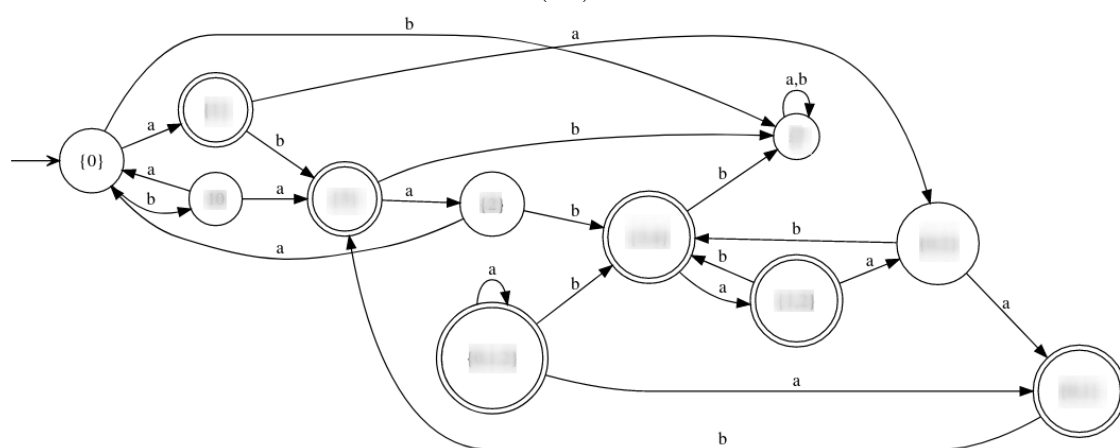
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

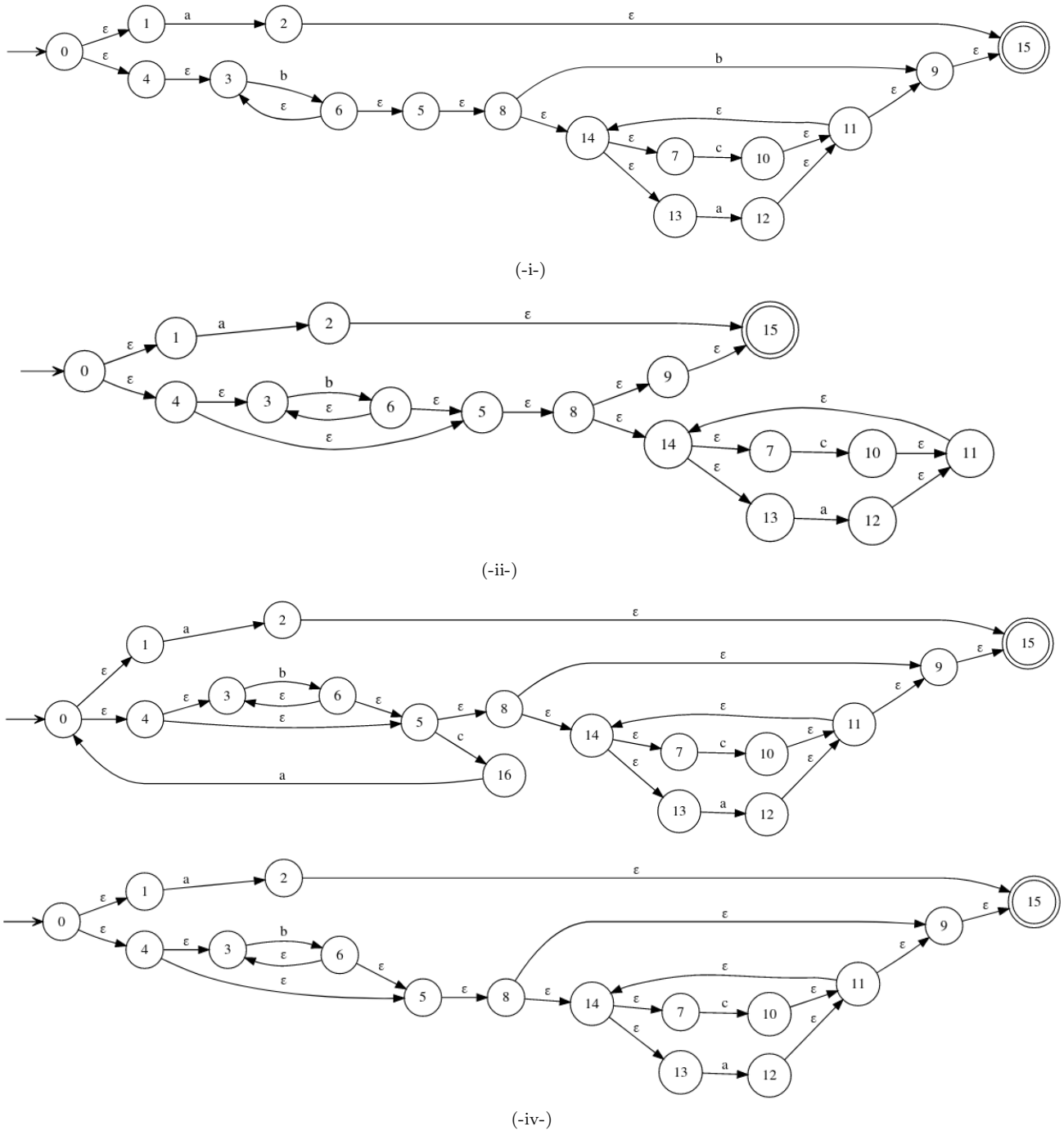


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

				e	f	g					l	m	n

Question 7 :

a			d		f			i	j	k

Question 8 :

a			d	e		g		i	j

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a			d	e	f	g	h	i	j		l	

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

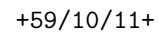
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a thin black border around its edges.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e A est complet.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ b Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ c Un mot peut être vide.
- ☐ d Un mot peut être infini.
- ☒ e Un mot est une fonction.
- ☒ f Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☒ i Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☒ k Un mot est une application.
- ☒ l Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a A a au moins un état accessible.
- ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ c A a au moins un état non accessible.
- ☒ d u n'est pas accepté par A .
- ☒ e Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

- ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.
☐ A possède un état puits
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

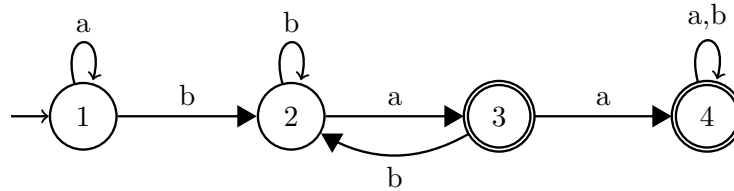
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

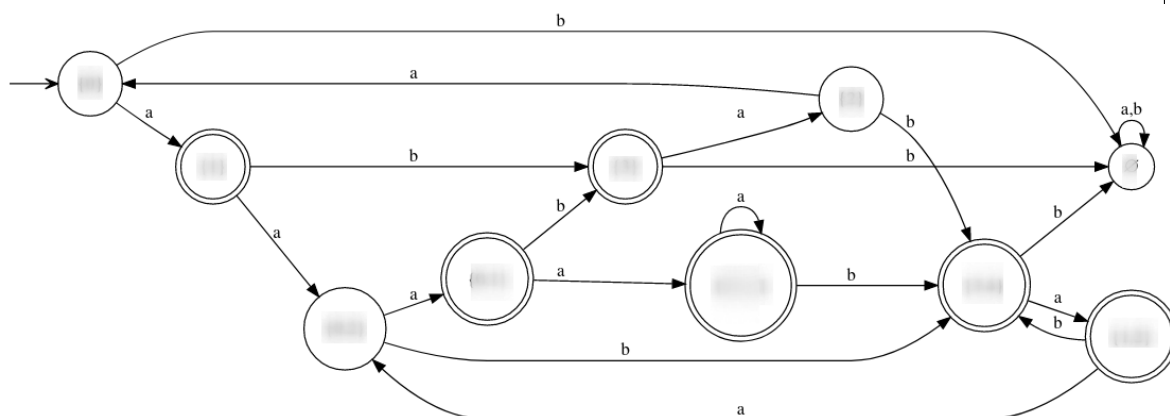


(-iii-)



(-iv-)

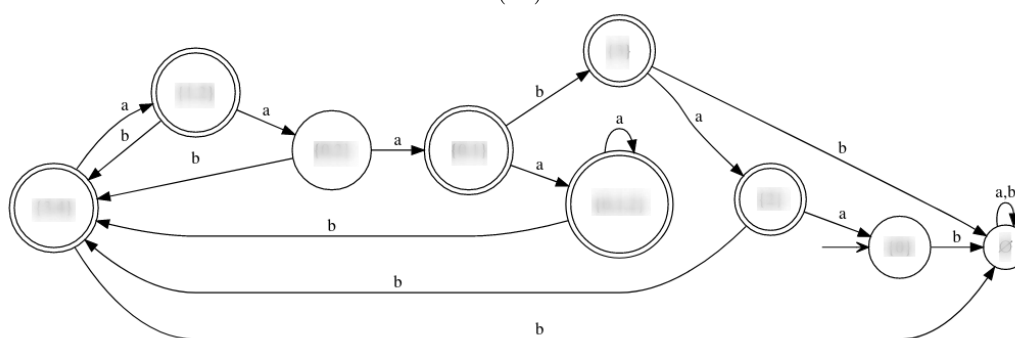
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



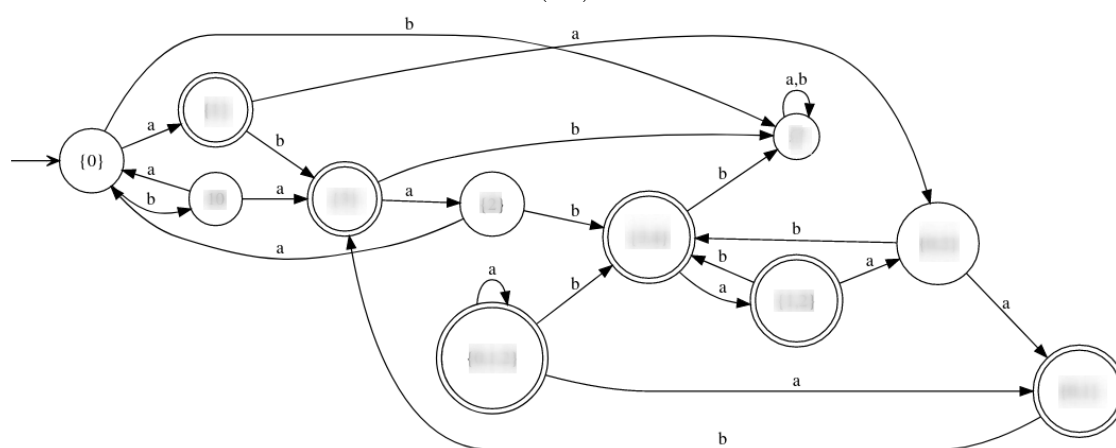
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a			d				h		j			m	n

Question 5 :

	b	c					h	i	j	k

Question 6 :

a			d			g	h	i	j

Question 7 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f	g		i	j	k		

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

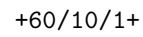
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ A possède un état puits
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur. ☒ b Σ^* est fermé par suffixe.
☒ c Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
☒ e Σ^* est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par facteur.
☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ h Σ est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-i-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

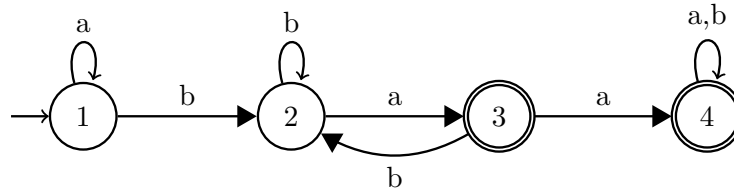
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 6 ☐ c 3 ☐ d 0 ☐ e 5 ☐ f 2 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

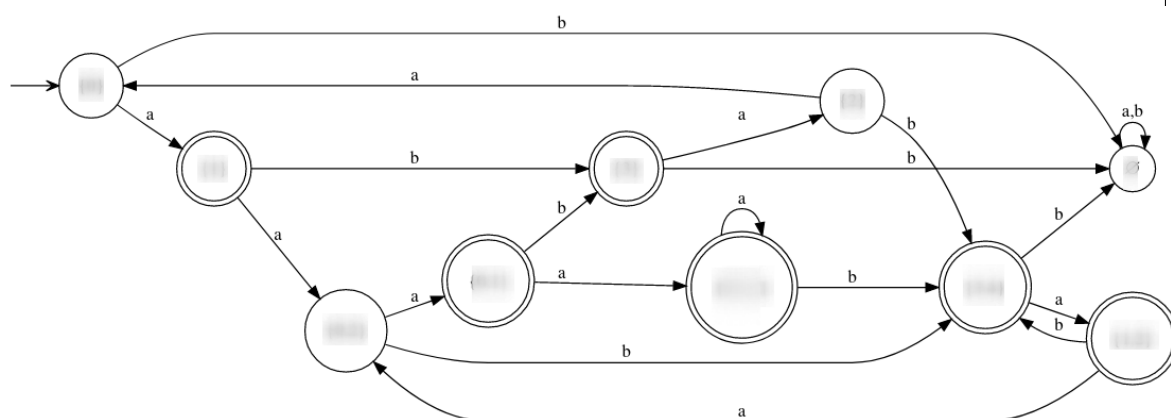


(-iii-)

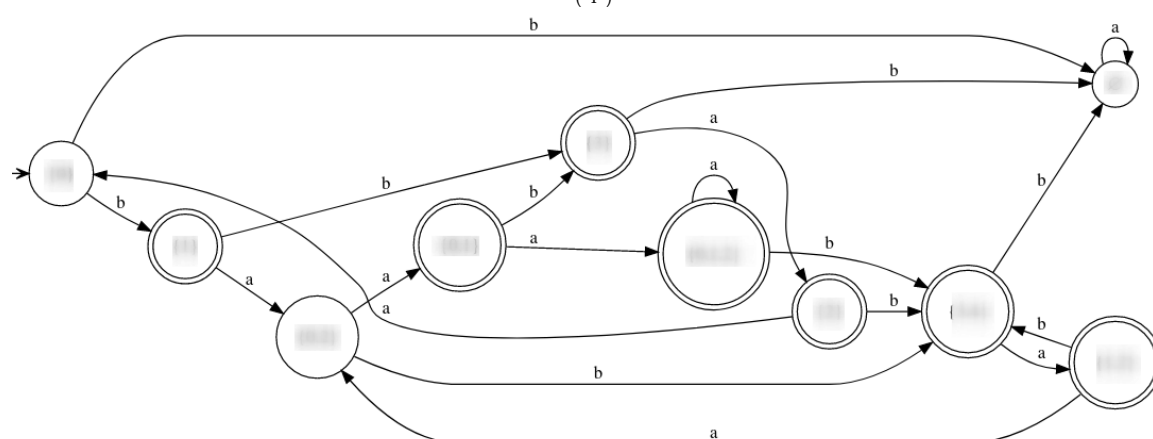


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

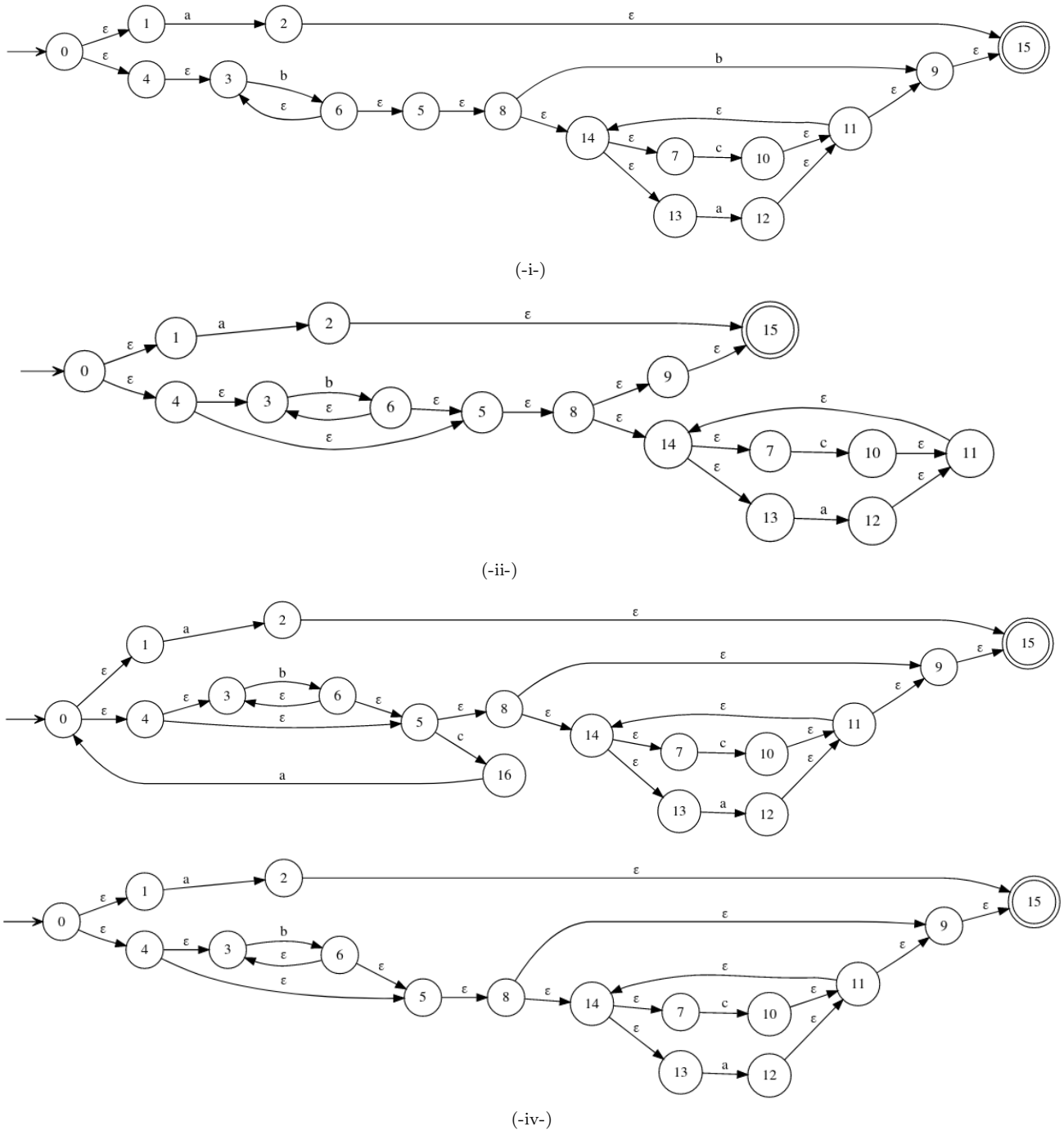


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d e f  h i

Question 3 :     f  h i  k  m n

Question 4 :  b c d    i j k

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :   d  f g h i j

Question 7 : a b c d 

Question 8 :  b  d e

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a  c d

Question 11 :  b c d e    i j k l m

Question 12 : a b  d e f g h

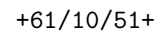
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A a des états accepteurs.
☐ A est complet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ g A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

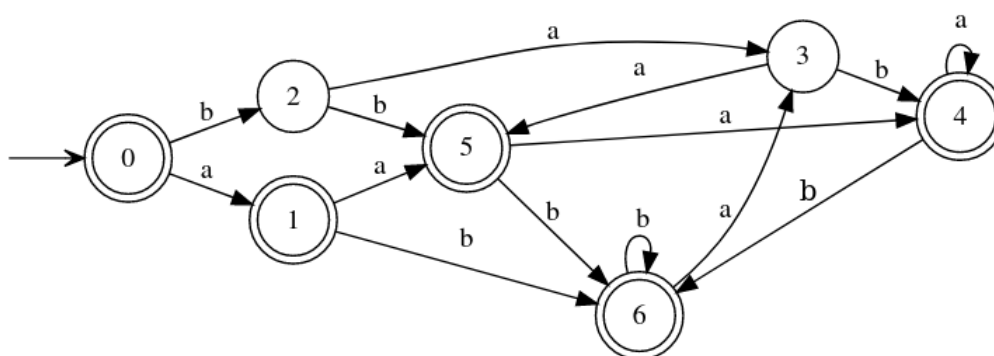
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

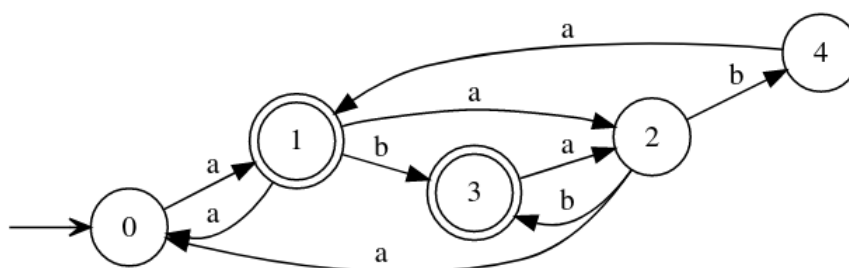
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

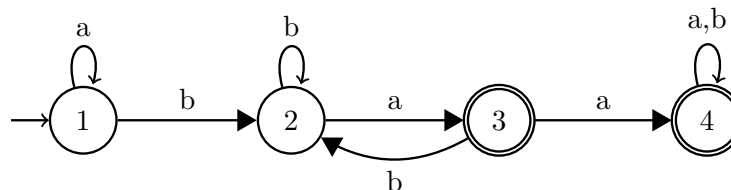
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 1 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

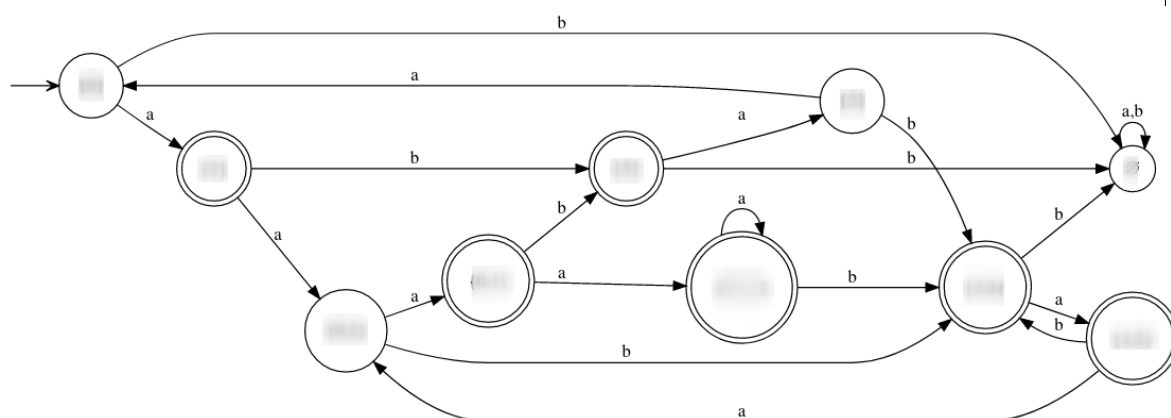


(-iii-)

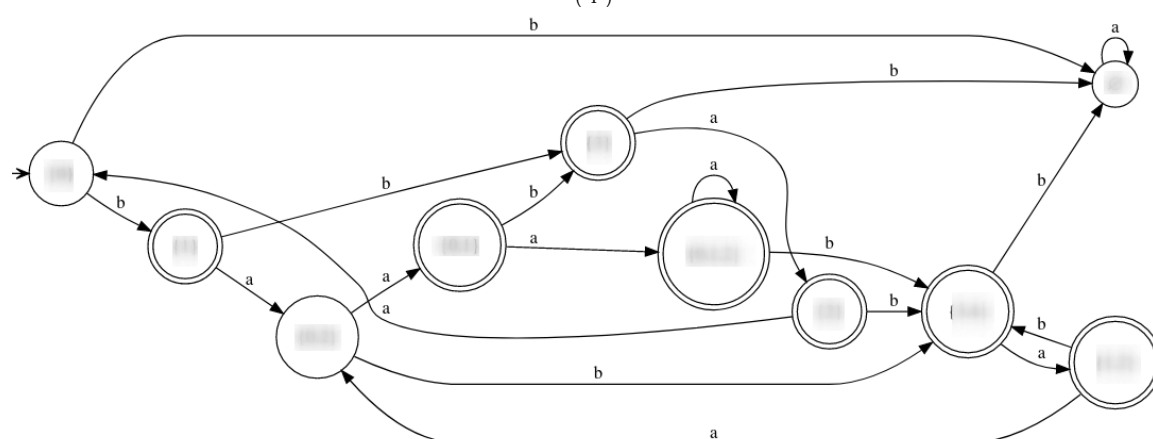


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ ☐ e ☐ g ☐ h ☐ ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 5 : ☐ a ☐ ☐ ☐ d ☐ e ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ k

Question 7 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 8 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ ☐ ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

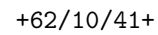
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐ ☐

Question 17 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par facteur.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d u est accepté par A . ☐ e A est complet. ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ f Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ h A a au moins un état non co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☐ f A accepte le langage universel.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_4 = a + b$
				☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

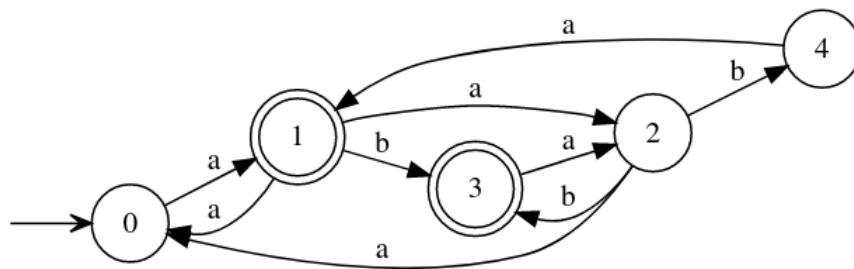
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

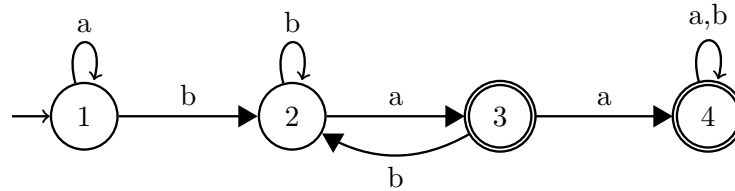
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ 4 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 5 ☐ f 2 ☐ g 6

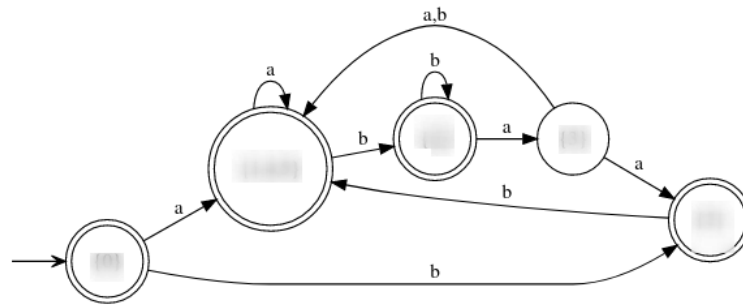
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



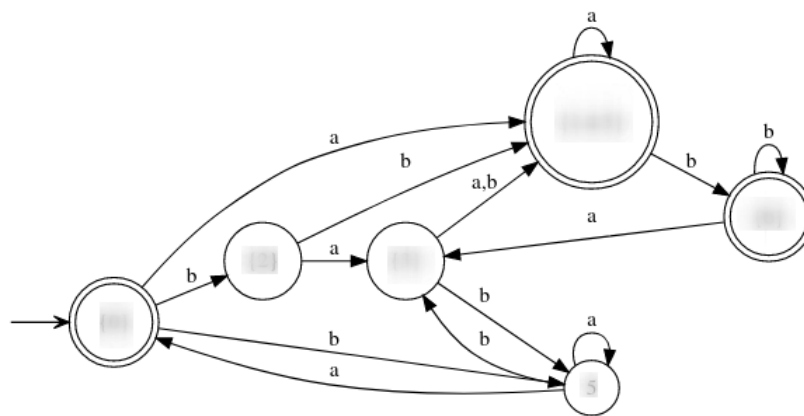
(-i-)



(-ii-)

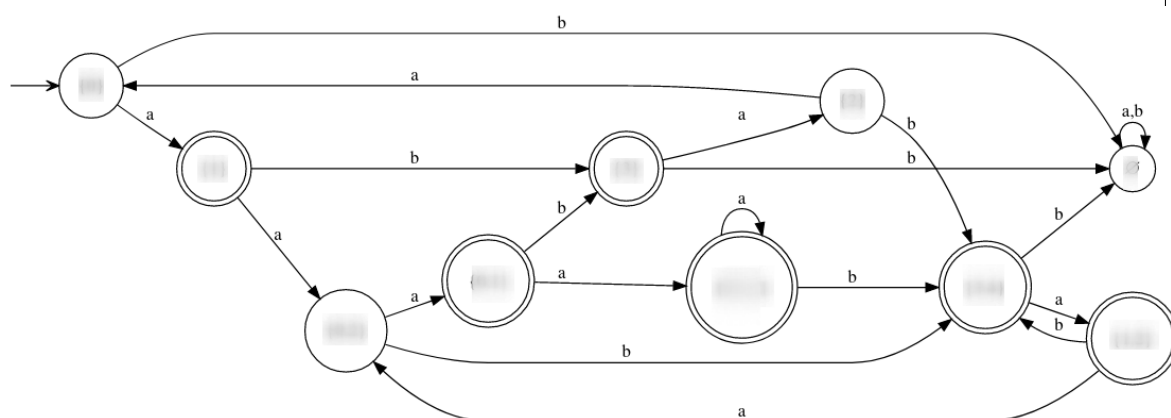


(-iii-)

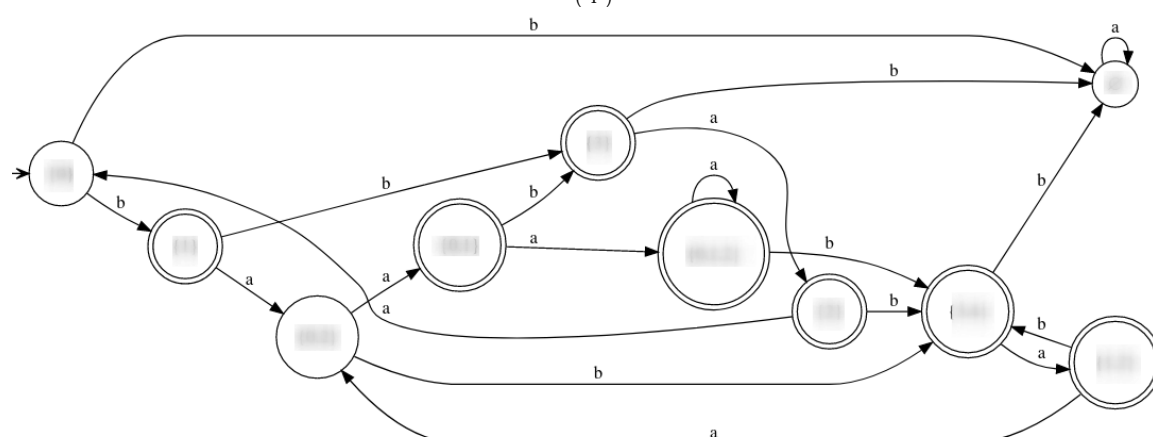


(-iv-)

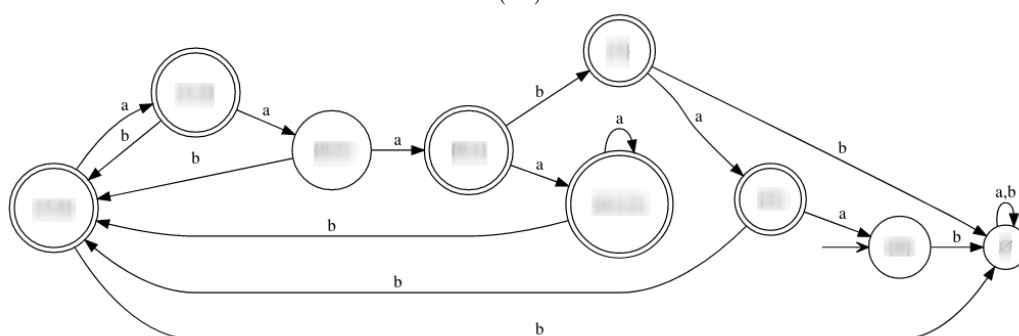
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

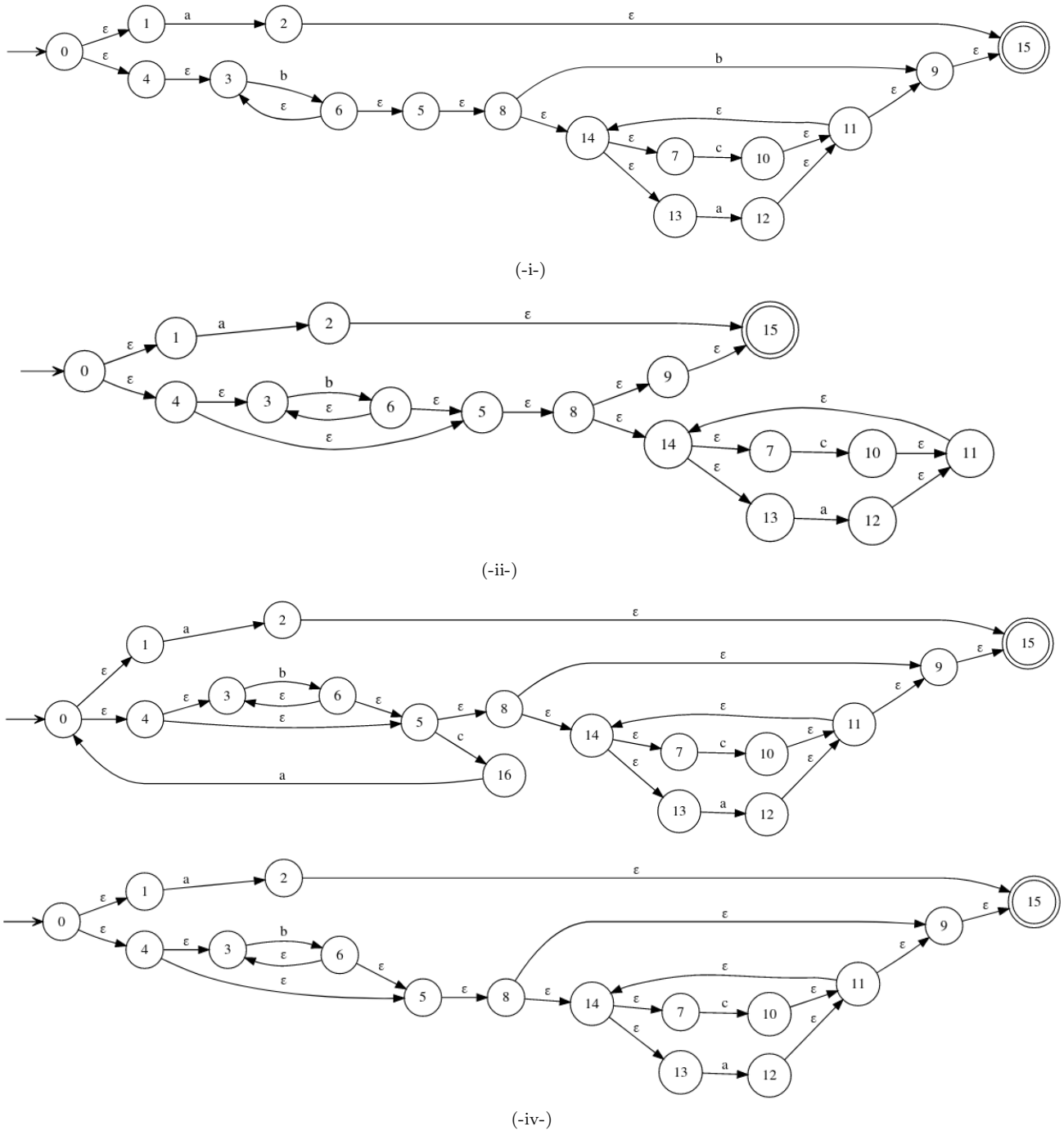


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a				e		g	h	i	j

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

					f				j	k	l	m	n

Question 7 :

a	b			e			h		j	k

Question 8 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a		c	d	e		g	h	i			l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

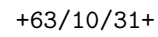
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b u est accepté par A . ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A a des états accepteurs. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b A possède un état puits ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par suffixe.
☒ c Σ^* est fermé par facteur. ☒ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☒ g Σ^* est fermé par suffixe.
☒ h Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot est une application.
- ☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ j Un mot peut être infini.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ f A a au moins un état co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ u n'est pas accepté par A . ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

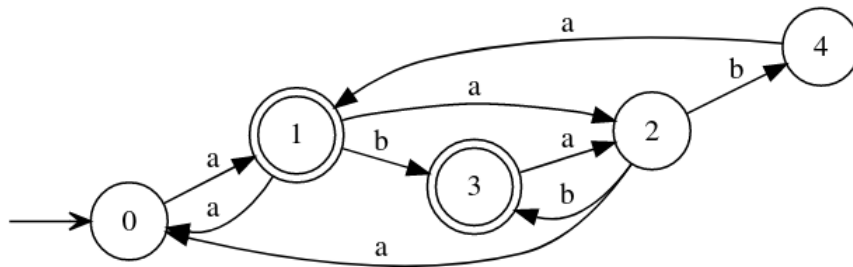
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

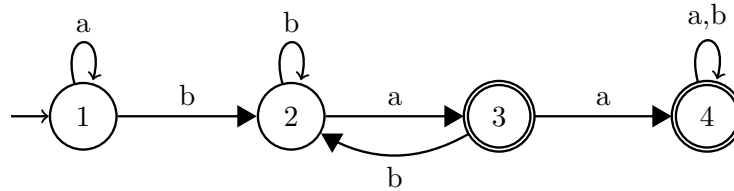
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

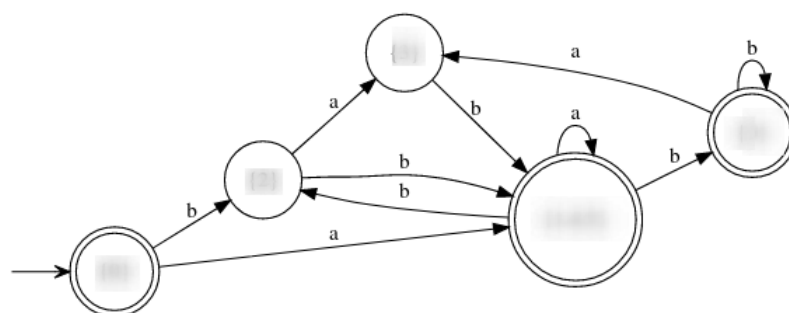
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 2 ☐ c 5 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 3

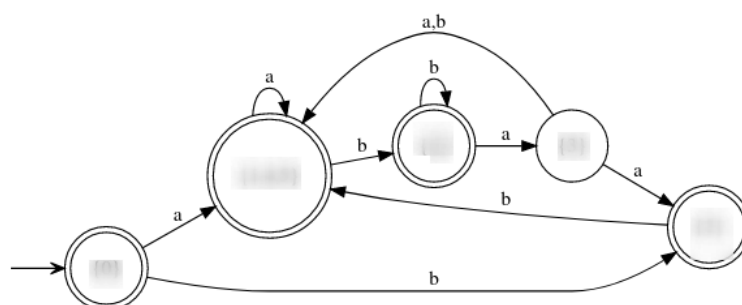
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

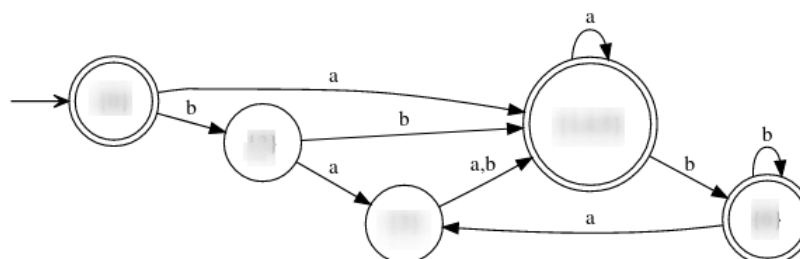
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



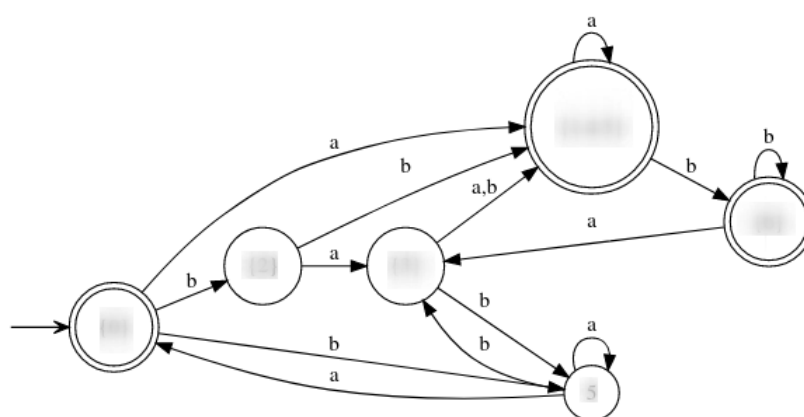
(-i-)



(-ii-)

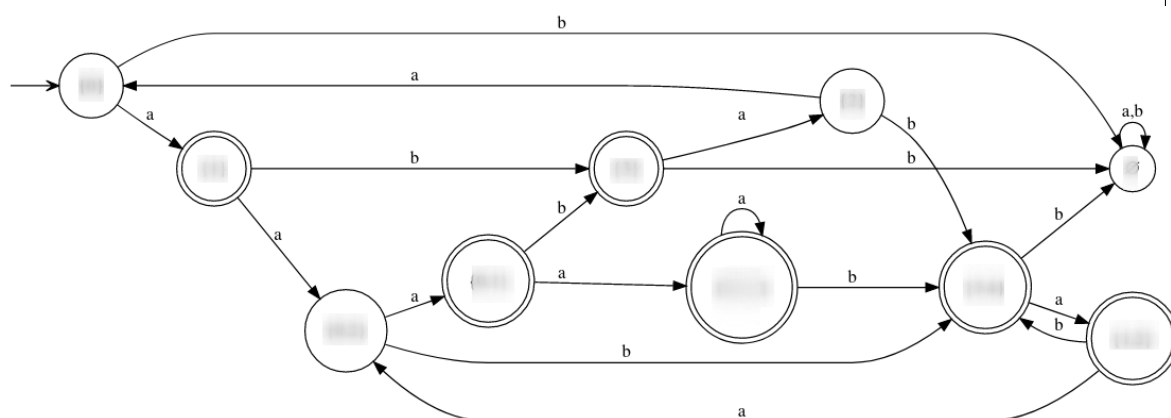


(-iii-)

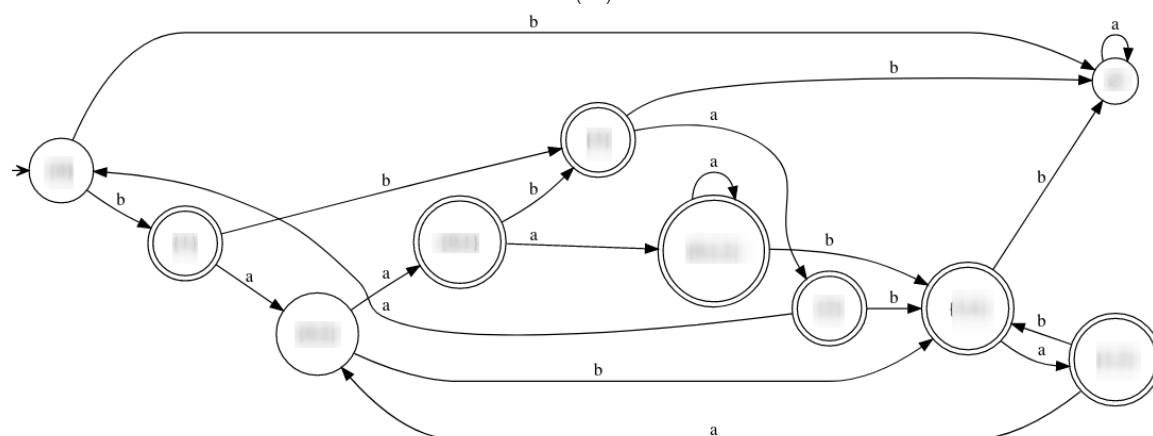


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

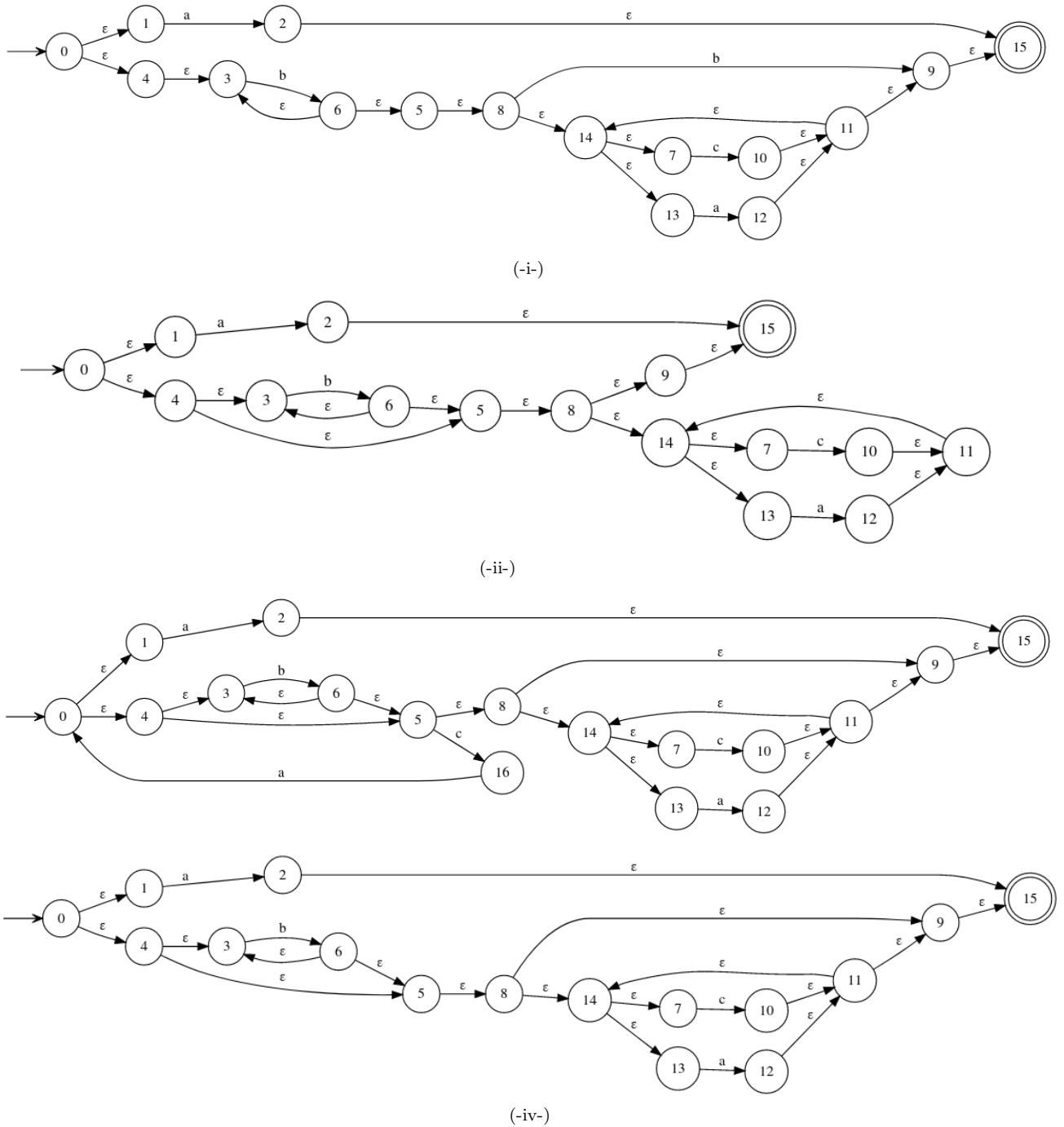
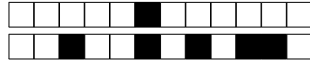


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 5 :

a	b			e	f			i	j

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

a				e				i	j			m	n

Question 8 :

	b		d		f			i	j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b		d	e	f	g		i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

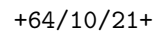
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet.
☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ b Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ c Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ e Un mot peut être vide. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ h Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot peut être infini. ☒ j Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ k Un mot est une fonction. ☒ l Un mot est une application.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☒ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☒ e Σ^* est fermé par suffixe.
☒ f Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$	
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	
	☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$	
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$			

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 6 ☐ d 0 ☐ e 5 ☐ f 3 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

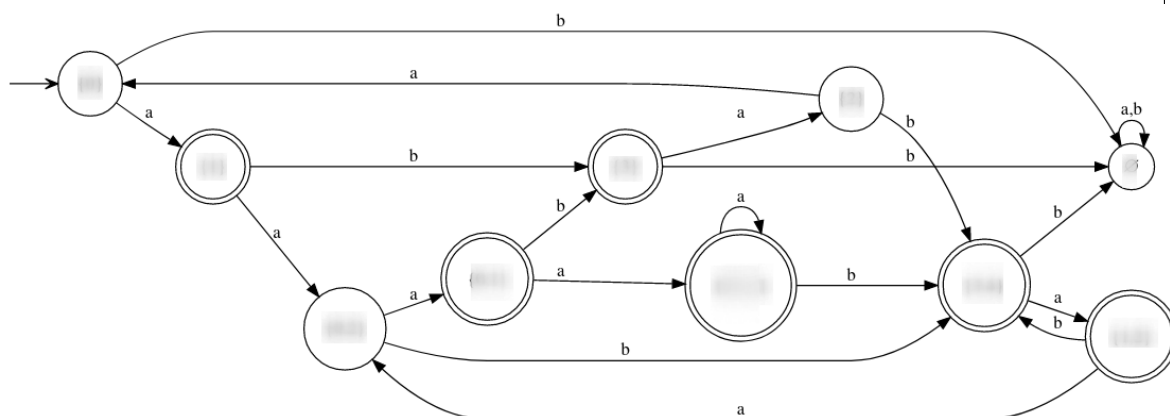


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

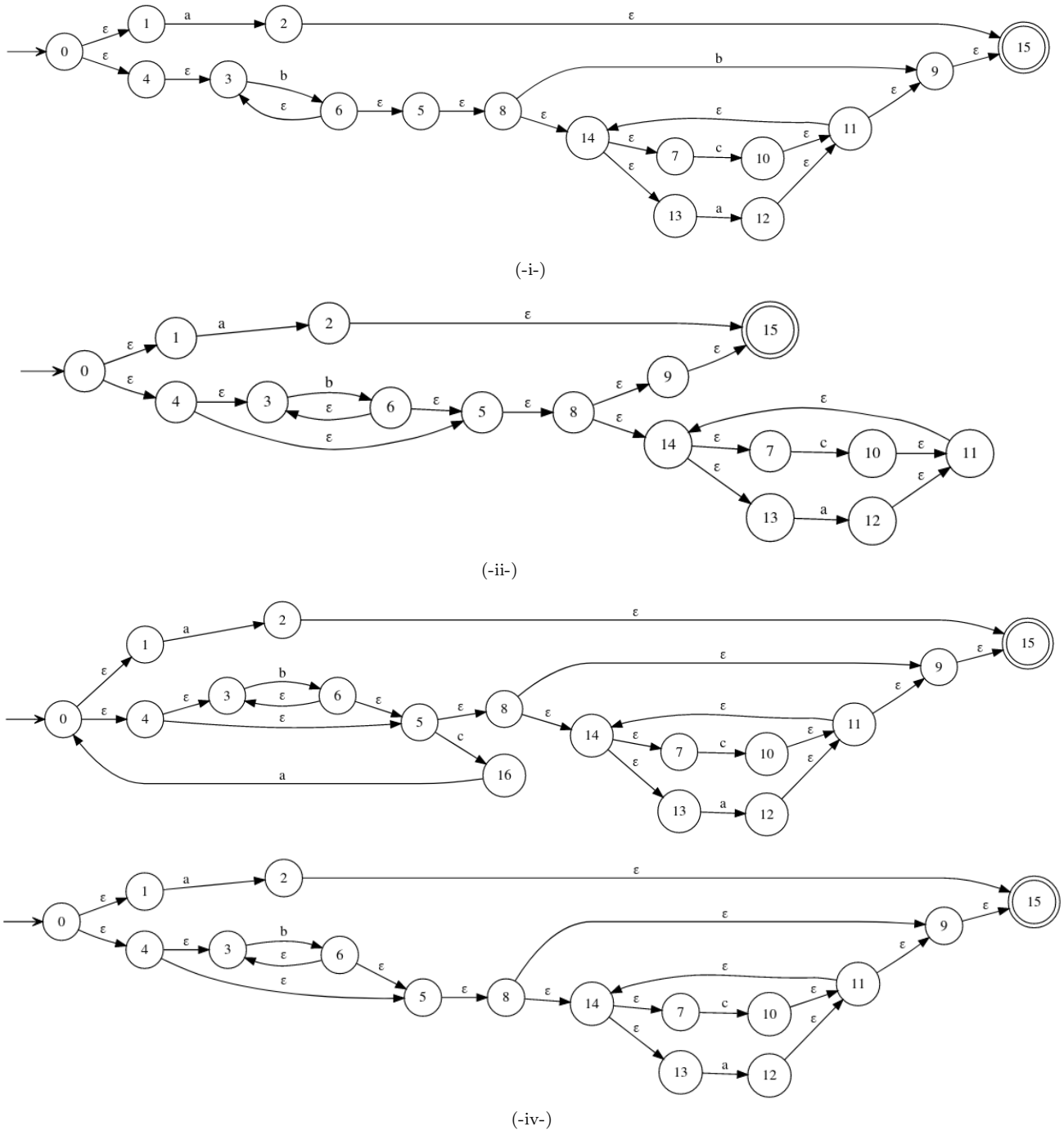
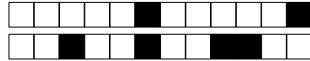


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e  g h  j k

Question 3 : a  c d e  g h i

Question 4 :   c d e

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a   d  f   i    m n

Question 7 : a b c d 

Question 8 :  b  d   g h i j

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a  c d  f g h i   l m

Question 12 : a b c d e  g h

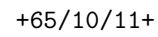
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ c A possède un état puits ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ c A a des états accepteurs. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-.
- ☐ b la Figure 3-ii-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-.
- ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-.
- ☐ b la Figure 4-iv-.
- ☒ la Figure 4-i-.
- ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

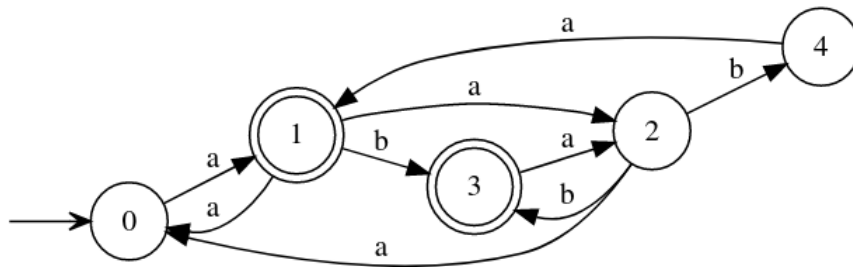
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

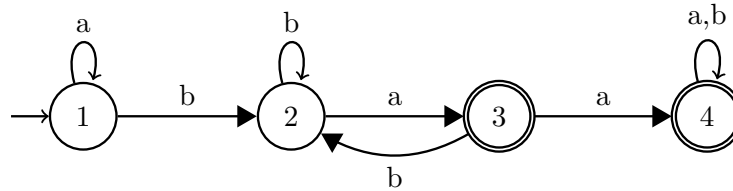
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 5 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 3

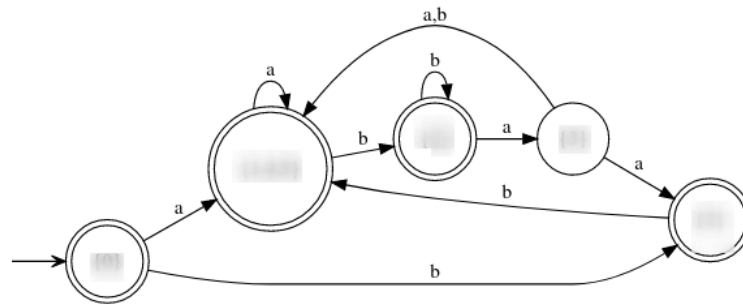
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

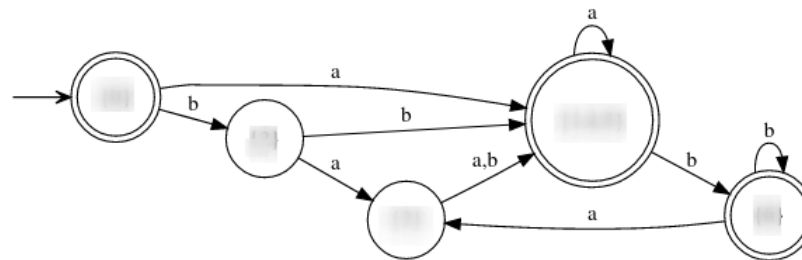
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



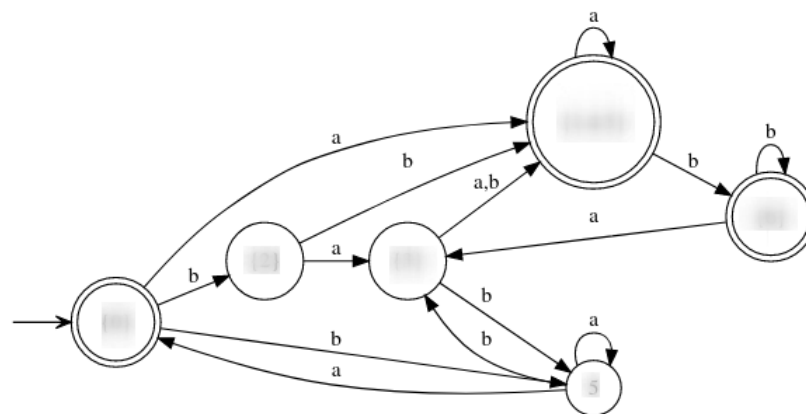
(-i-)



(-ii-)

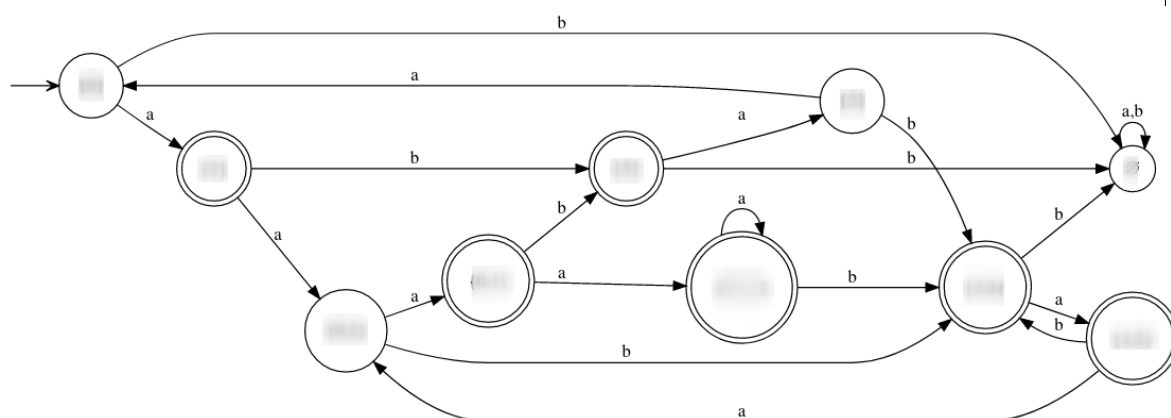


(-iii-)

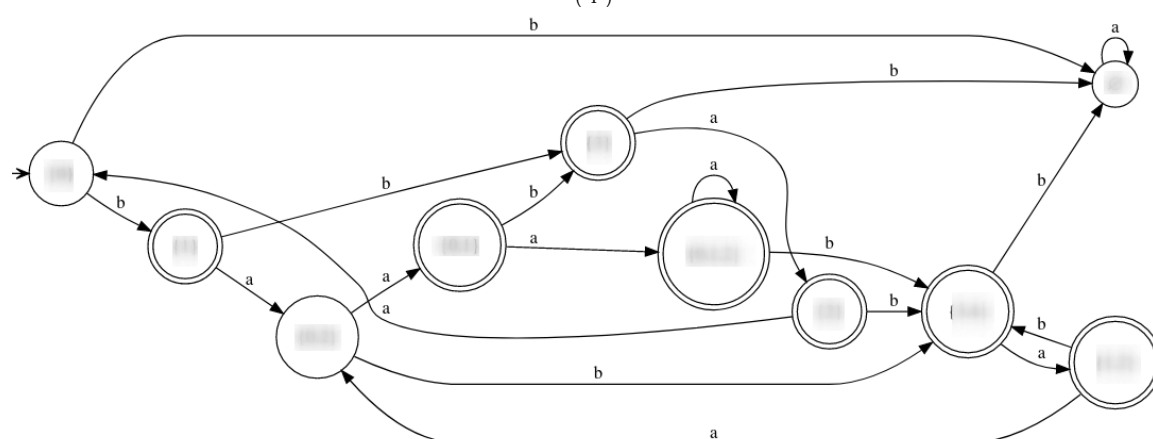


(-iv-)

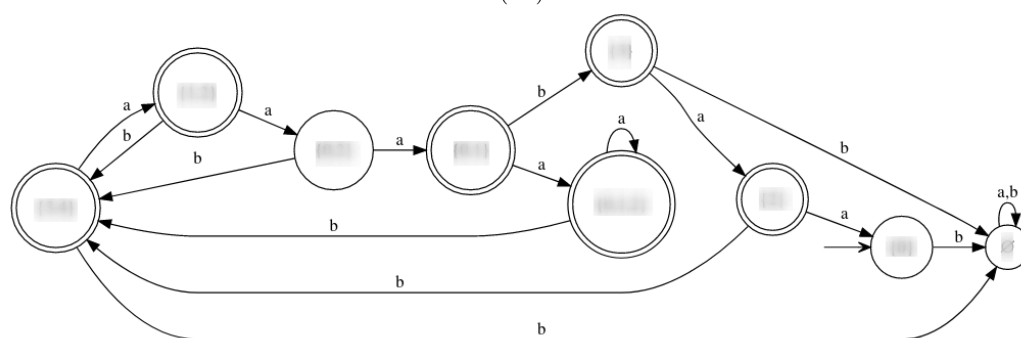
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

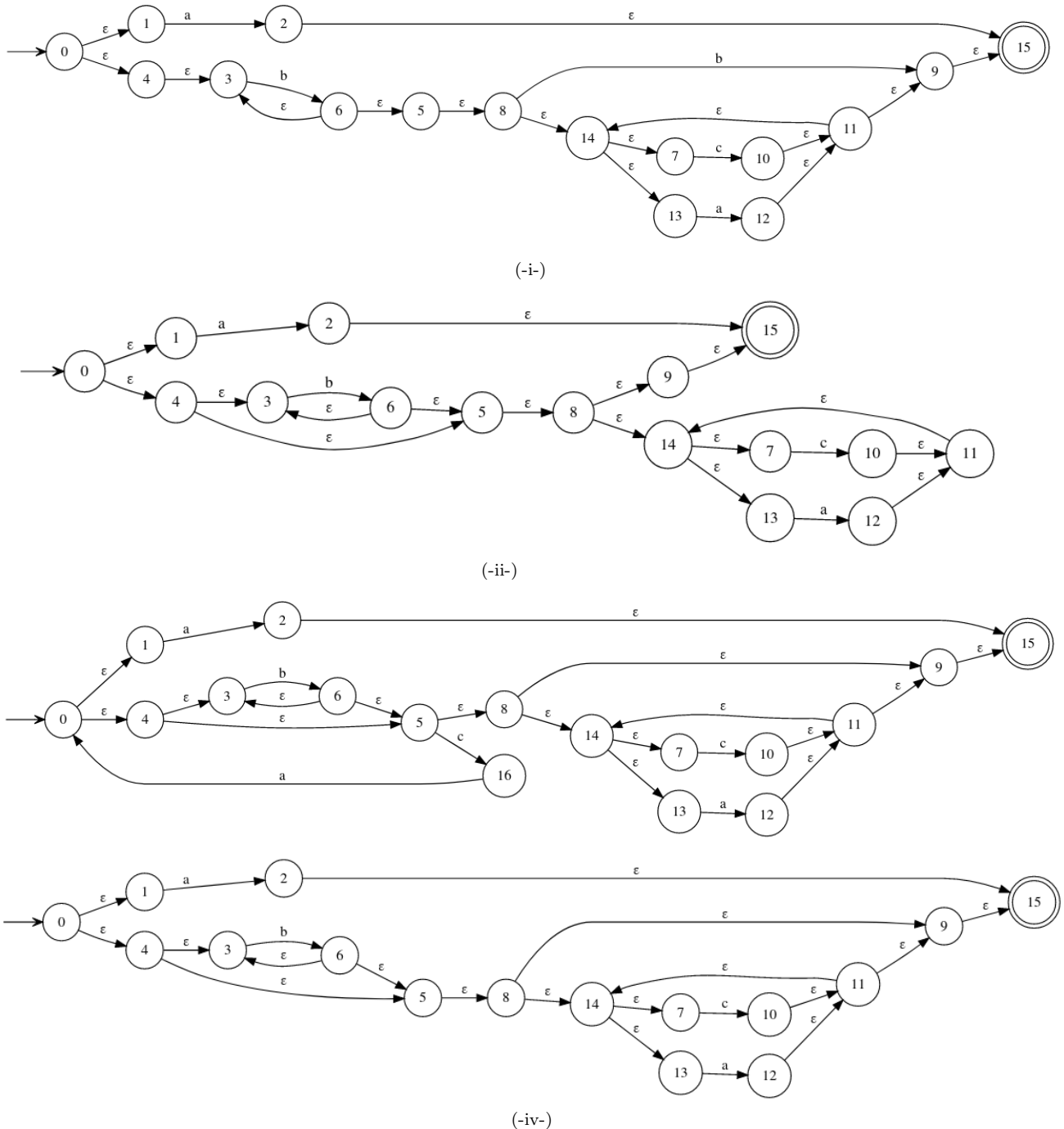
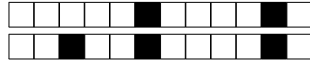


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d   g   j k

Question 3 : a   d e

Question 4 : a   d   h  k  m n

Question 5 : a b c d 

Question 6 :  b  d e f   i j

Question 7 : a  c d  f g h i

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a b c d e  g    k l m

Question 12 : a b c  e f g h

Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A possède un état puits ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet.
- ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A n'est pas complet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

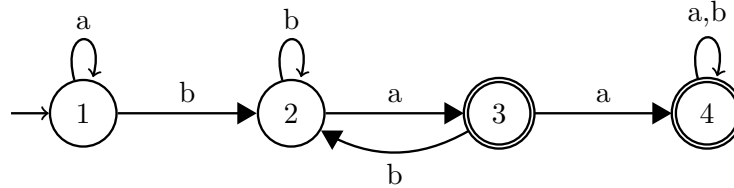
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ 4 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 5 ☐ f 1 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

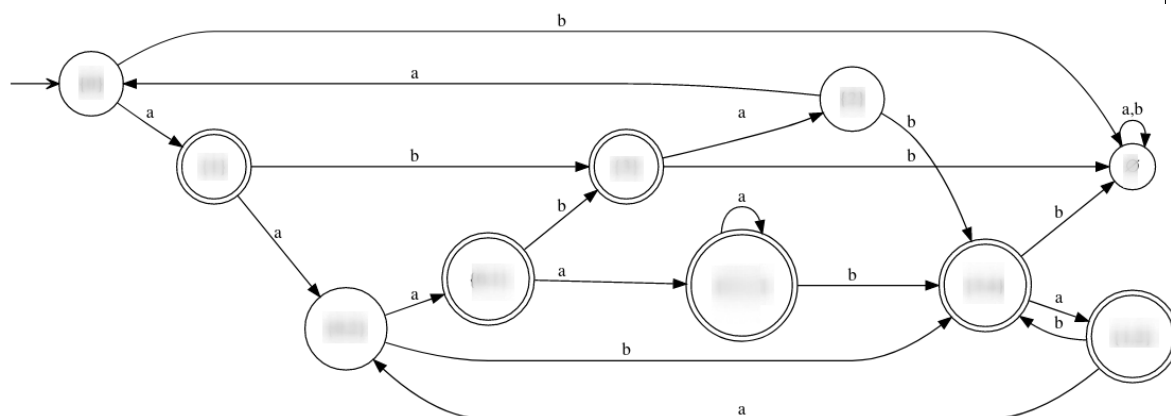


(-iii-)

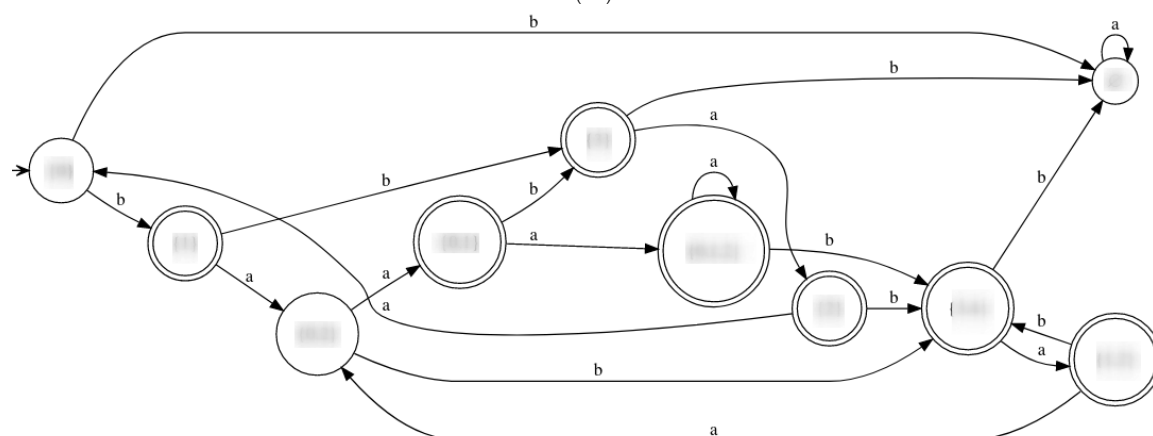


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



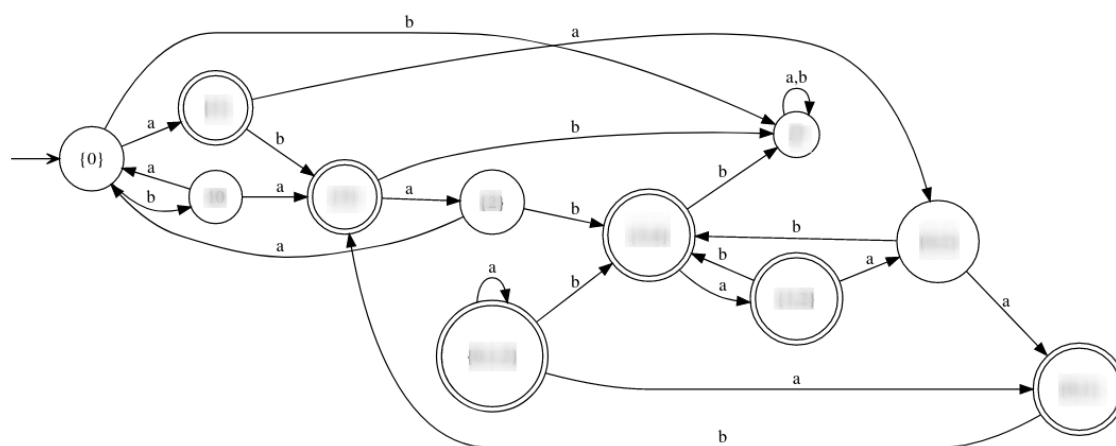
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

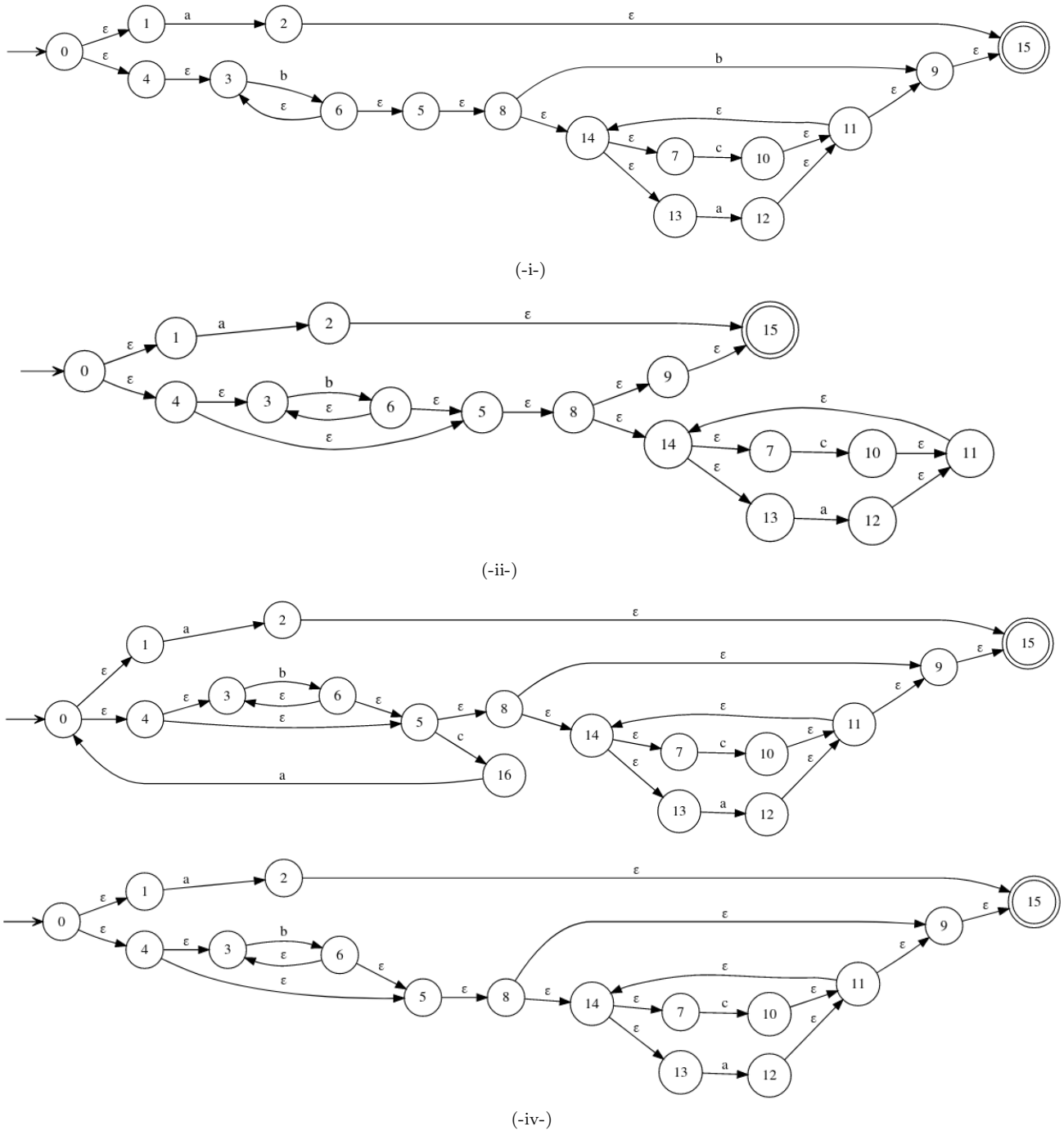


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ d e f g h i

Question 3 : a b c d e f g ☐

Question 4 : a b c d ☐

Question 5 : a b c ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ j k

Question 6 : a ☐ ☐ ☐ e ☐ g ☐ ☐ j ☐ ☐ m n

Question 7 : ☐ ☐ c d e f ☐ ☐ i j

Question 8 : ☐ b ☐ d e

Question 9 : a b ☐ d e

Question 10 : ☐ b c d

Question 11 : a b ☐ d ☐ f g h ☐ j ☐ l m

Question 12 : ☐ b c d e f g h

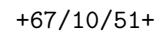
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : a b c ☐ e f

Question 15 : a b c ☐ e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : a b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ b Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ d Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ e Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ h Un mot est une fonction.
☒ i Un mot est une application. ☒ j Un mot peut être vide.
☒ k Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b A accepte le langage universel. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f A possède un état puits
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ c Σ^* est fermé par préfixe. ☒ d Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

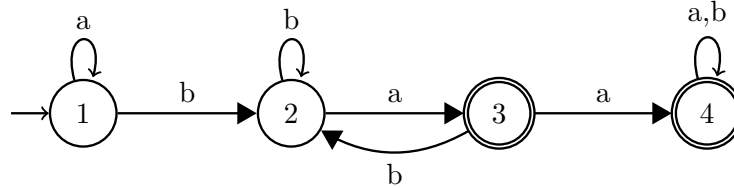
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☒ b 4 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 1 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

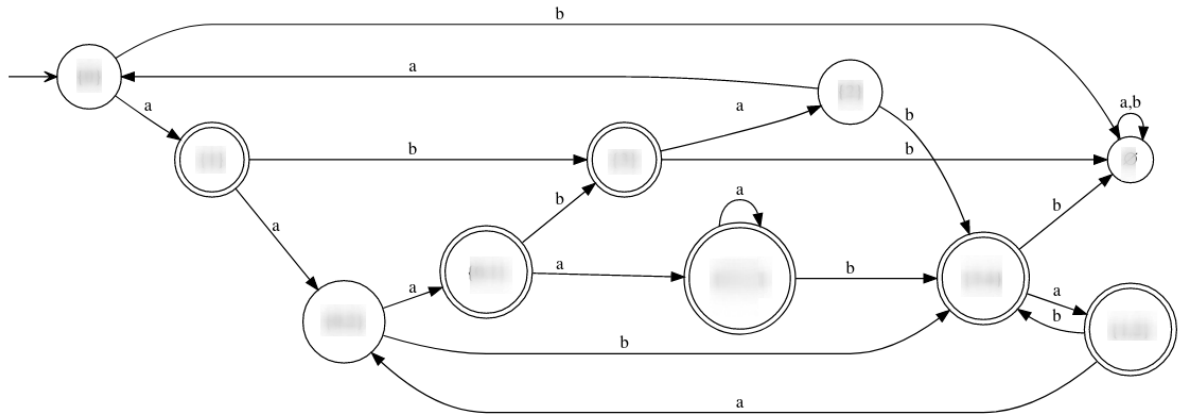


(-iii-)

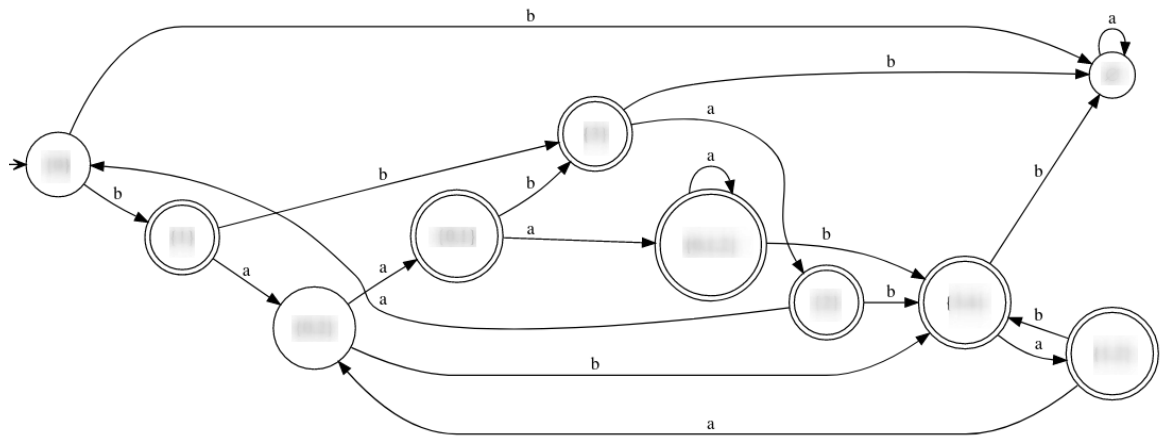


(-iv-)

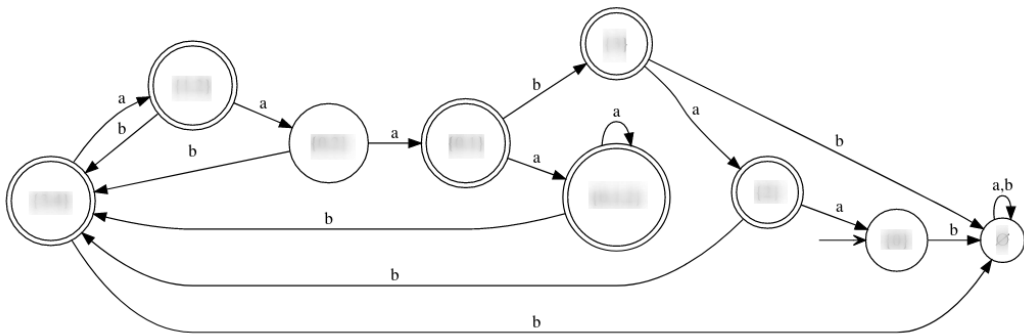
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



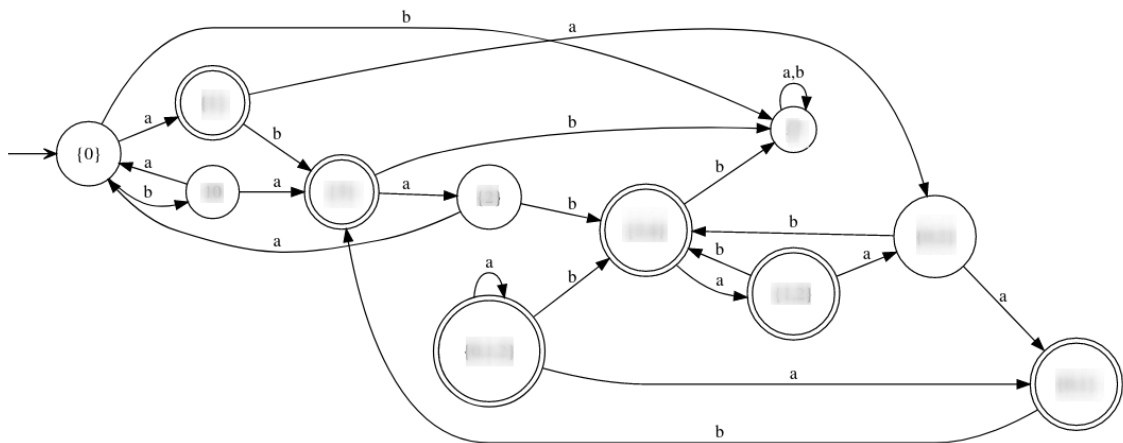
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c			f	g					l	m	n

Question 4 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 5 :

a	b			e			h	i	j

Question 6 :

		c	d		f	g			j	k

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

		c	d	e	f	g	h	i	j	k		

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

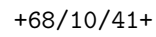
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c A a au moins un état accessible. ☐ d $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ f u n'est pas accepté par A .
☐ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une application. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ c Un mot peut être vide. ☐ d Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ e Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ g Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot peut être infini.
☐ i Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ j Un mot est une fonction.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par suffixe. ☒ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☒ f Σ^* est fermé par préfixe. ☒ g Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b A possède un état puits ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ d A accepte le langage universel. ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☒ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☒ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 3 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 1 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

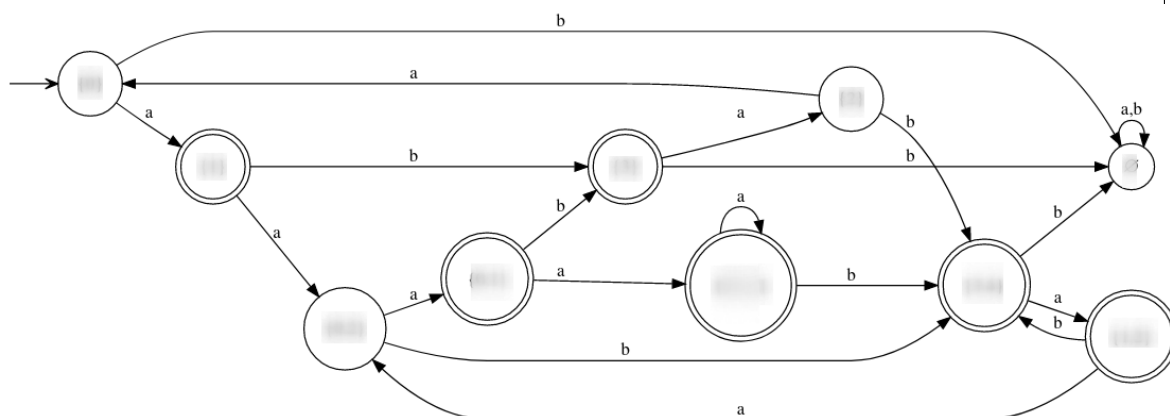


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e			h		j	k

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

	b				f		h			k		m	n

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

		c	d	e			h	i	j

Question 8 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

	b	c		e		g	h	i	j	k		m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

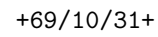
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ f A possède un état puits ☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d $X_4 = a + b$ ☐ e $X_1 = aX_1 + b$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ g $X_3 = aX_2 + cX_4$
☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ j $X_4 = (a + b)X_4$
☐ k $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$ ☐ m $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☒ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ c $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ d $X_4 = a^* + b^*$
☐ e $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ f $X_4 = a + b$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2$ ☐ b $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^*b$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ d $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ b $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ c $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☒ celle trouvée pour X_1 ☐ b celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

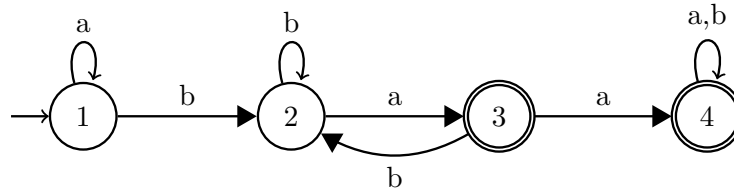
- ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$ ☐ c $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 2 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 6

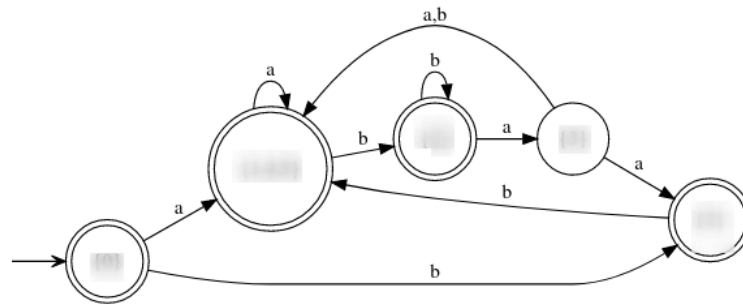
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

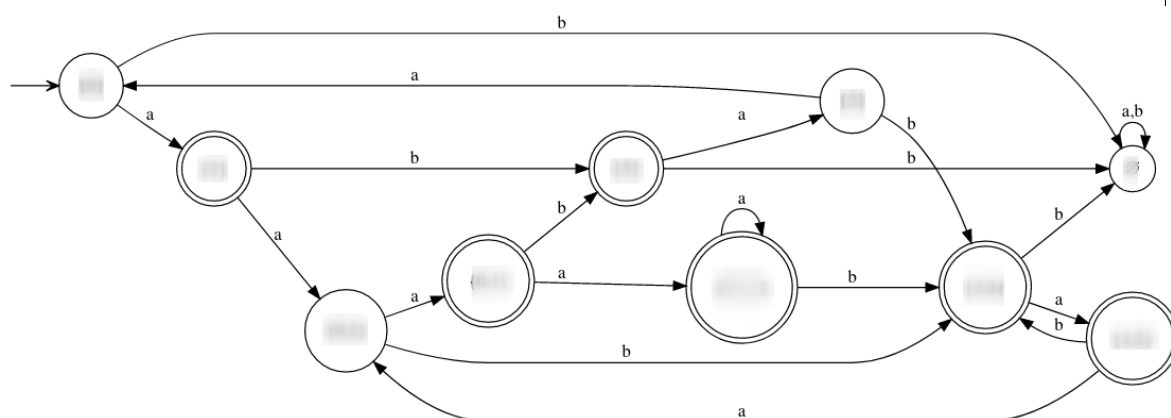


(-iii-)

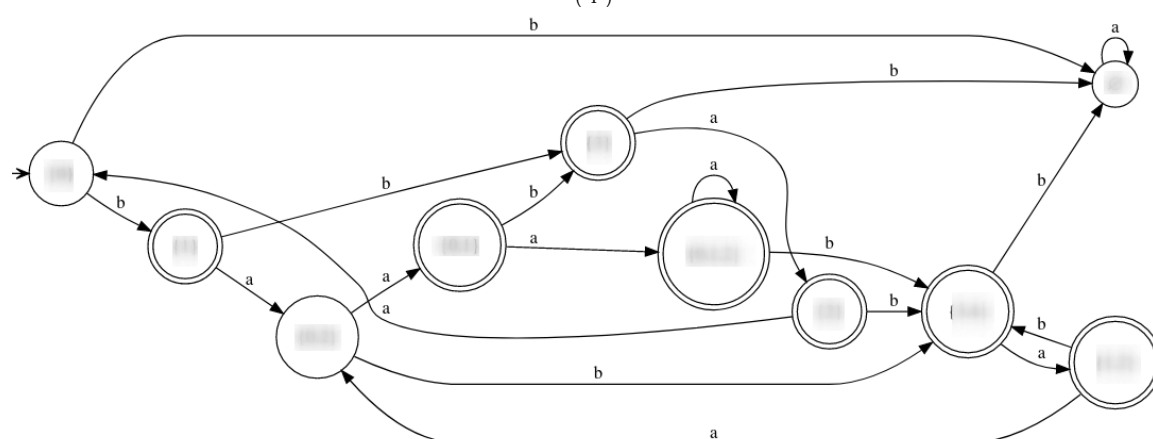


(-iv-)

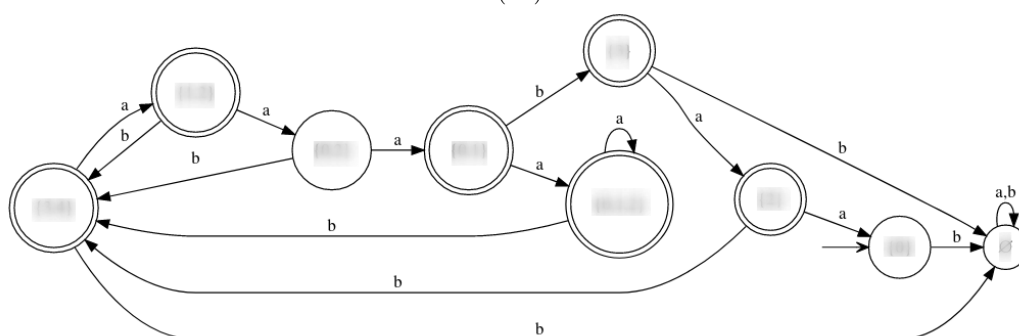
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

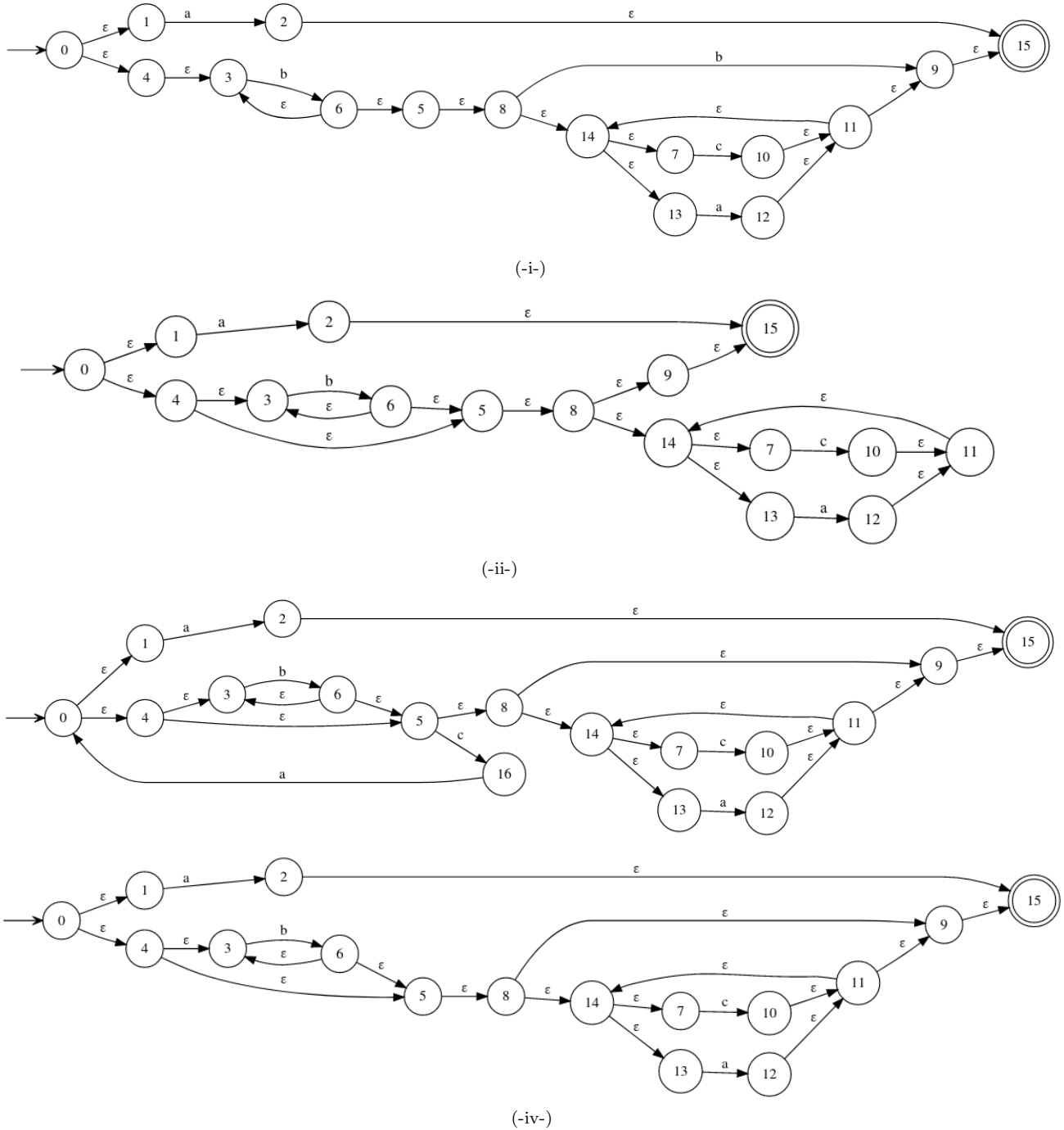
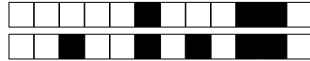


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c  e   i j   m n

Question 3 :  b c  e  h i j

Question 4 : a   d e   i j k

Question 5 : a   d e

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b  d e f  h i

Question 8 : a b c d 

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a b c d e  g   j k  m

Question 12 : a  c d e f g h

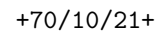
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f A possède un état puits ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d A est complet. ☐ e u est accepté par A .
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ b Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ c Un mot est une application. ☐ d Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot est une fonction.
☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ i Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot peut être infini.
☐ k Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Un mot peut être vide.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☐ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ^* est fermé par facteur.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

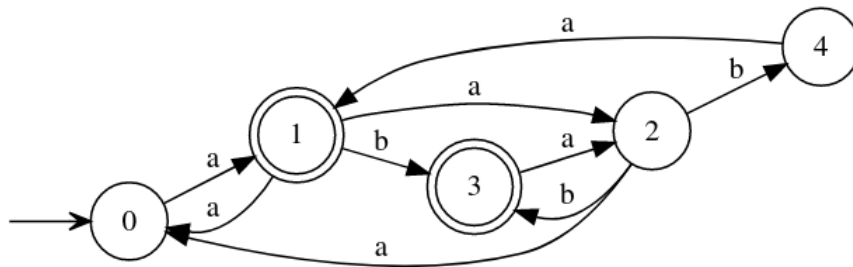
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

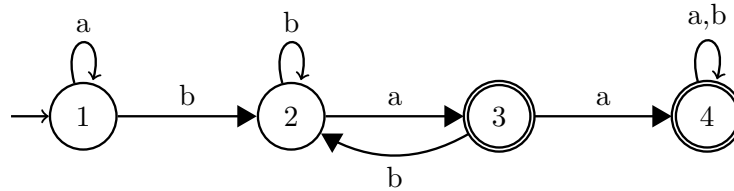
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 6 ☐ e 0 ☐ f 1 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

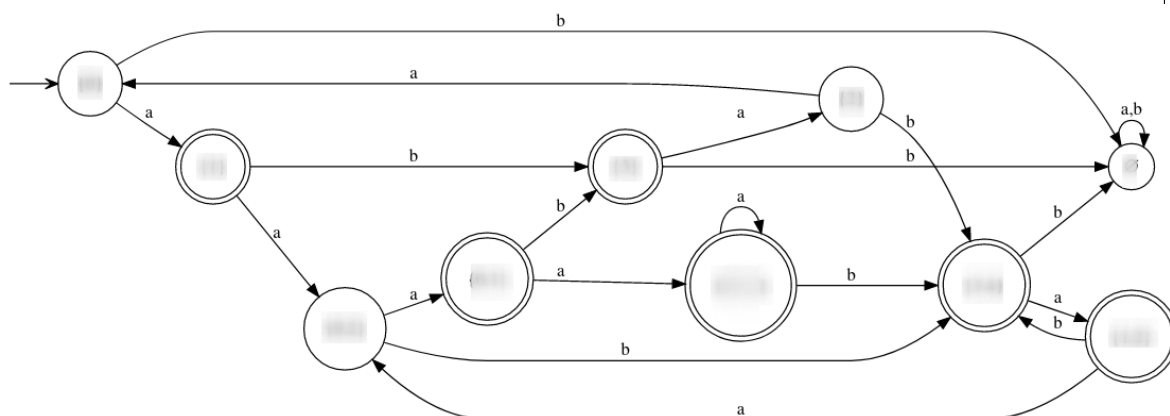


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

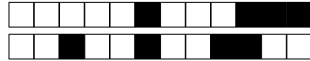


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a						g	h		j			m	n

Question 5 :

a	b				f	g		i	j

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

				e	f		h	i	j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c			f	g	h	i	j	k	l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

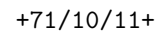
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b A possède un état puits ☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ b Σ^* est fermé par facteur. ☐ c Σ^* est fermé par préfixe.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ e Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ f Σ est fermé par facteur.
☐ g Σ^* est fermé par suffixe. ☐ h Σ est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ b $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a au moins un état non co-accessible.
☐ d A a au moins un état accessible. ☐ e A n'est pas complet.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot est une application.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

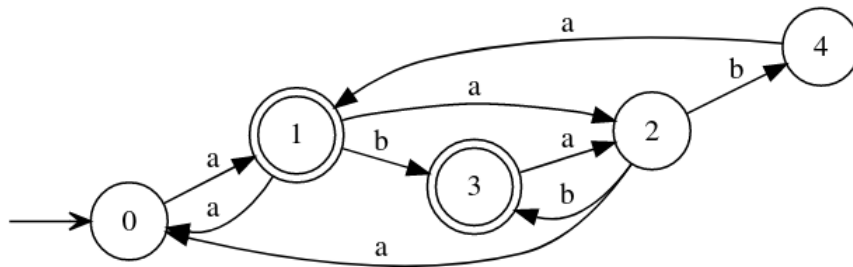
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

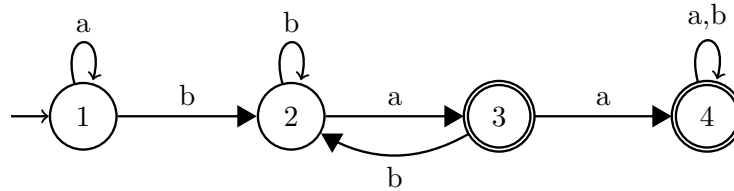
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

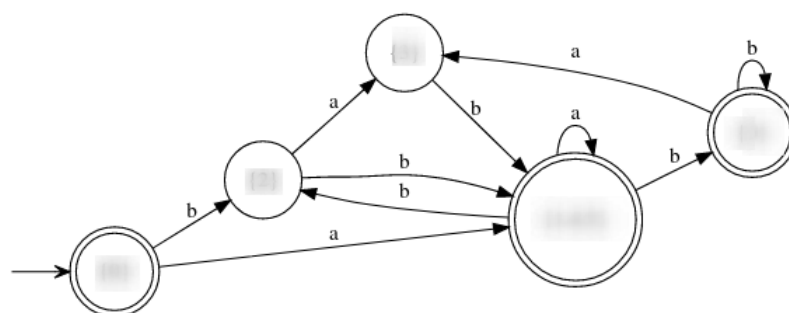
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 6 ☐ f 3 ☐ g 0

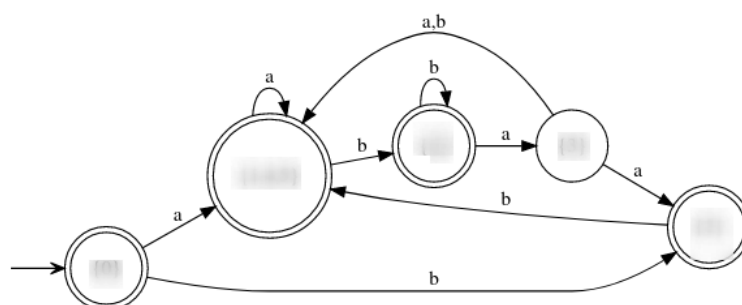
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

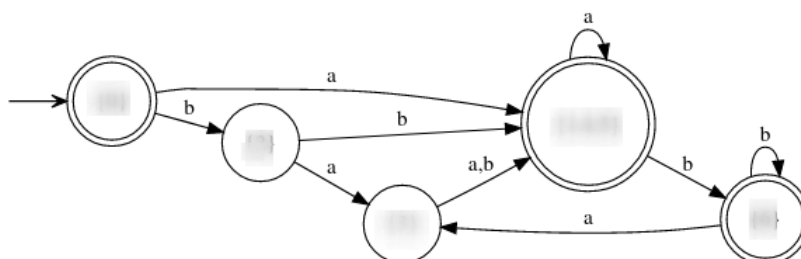
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



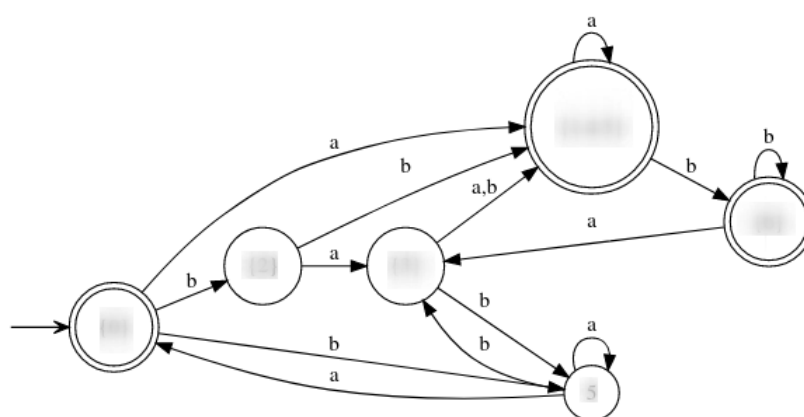
(-i-)



(-ii-)

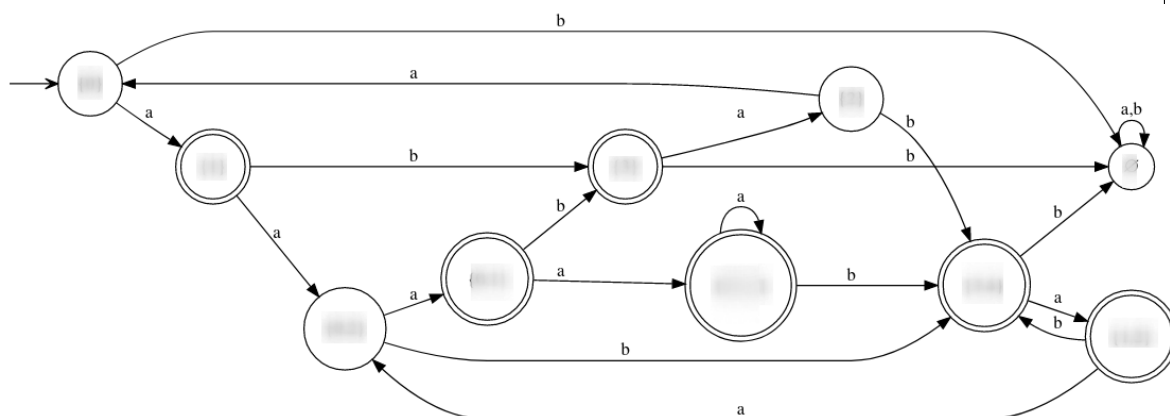


(-iii-)



(-iv-)

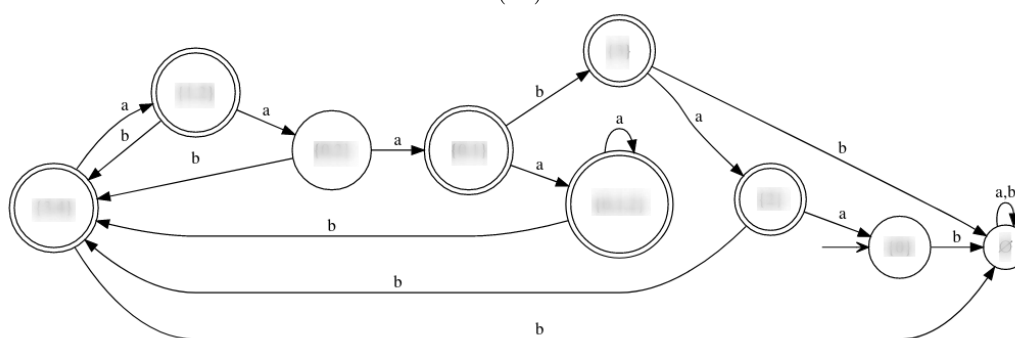
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



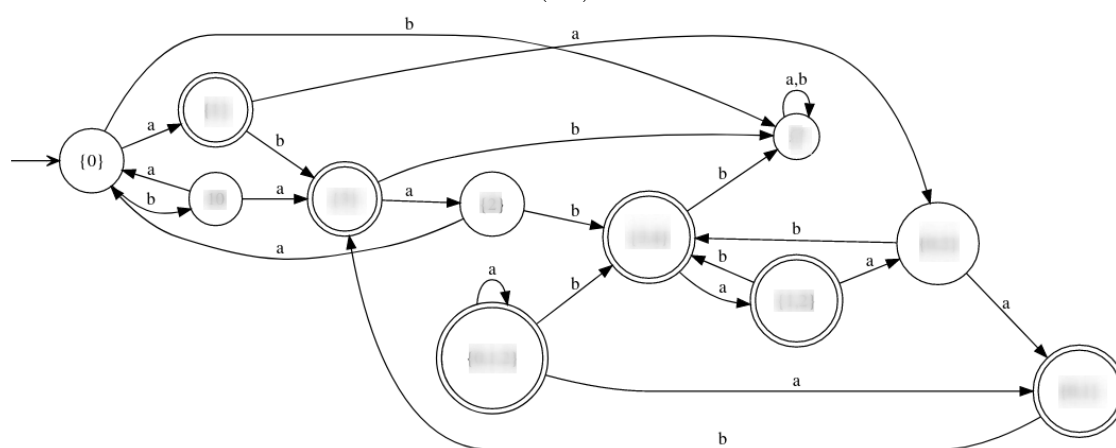
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

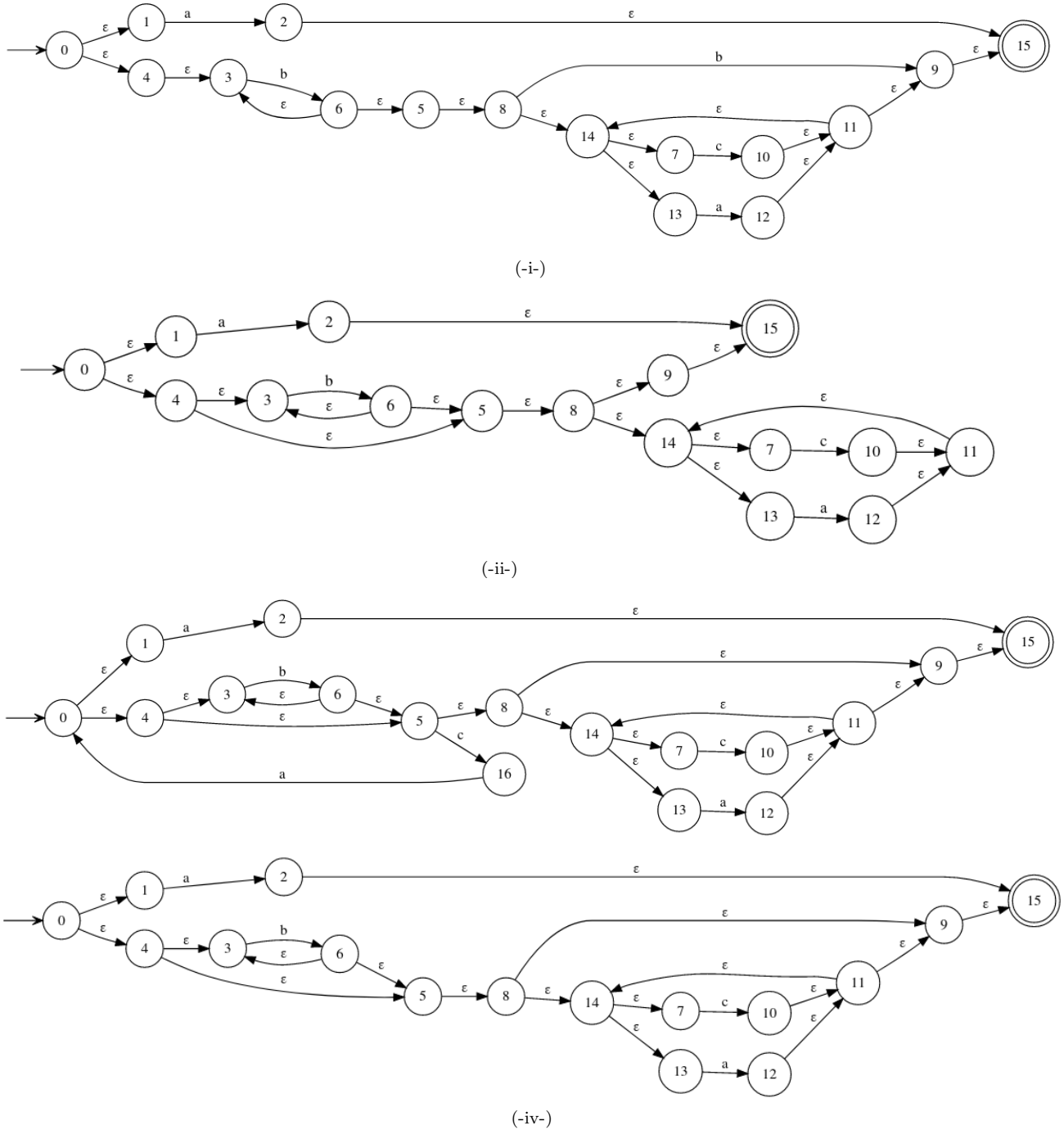
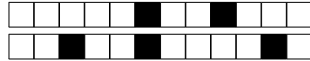


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 3 :

a			d		f		h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

		c				g	h	i	j	k

Question 6 :

			d		f			i		k		m	n

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

	b		d	e

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b			e	f		h	i	j	k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

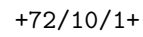
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e A possède un état puits
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe.
- ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ e Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ f Σ est fermé par facteur.
- ☐ g Σ est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur.

- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A a au moins un état co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A est complet. ☐ c u est accepté par A .
☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ b $X_1 = aX_1 + b$ ☐ c $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☐ d $X_4 = a + b$
☐ e $X_4 = (a + b)X_4$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ h $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$ ☐ j $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ k $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ m $X_3 = aX_3 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☒ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ b $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ c $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ d $X_4 = a^* + b^*$
☐ e $X_4 = a + b$ ☐ f $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2$ ☐ b $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^*b$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ b $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

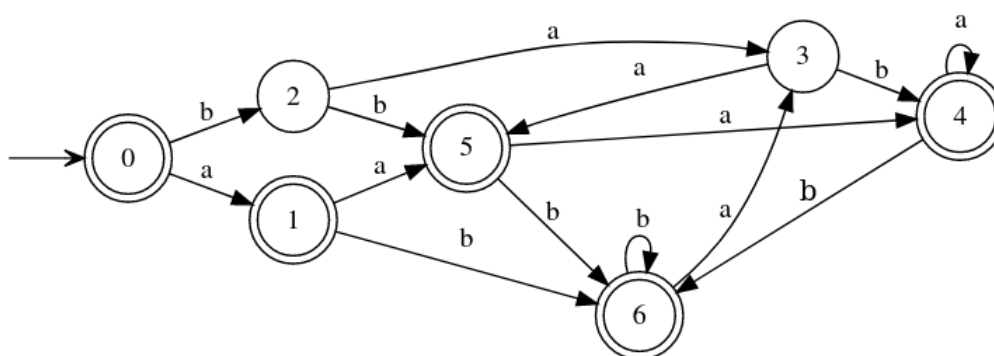
- ☐ a $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ c $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

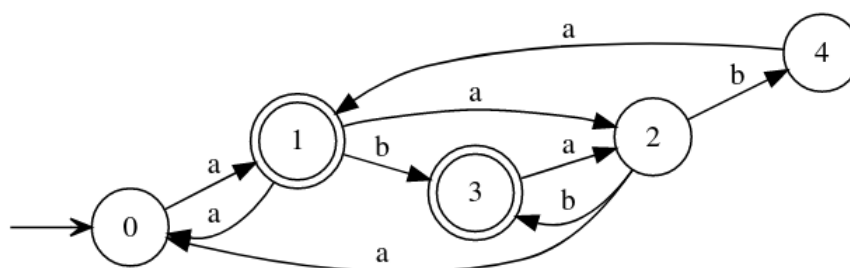
- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

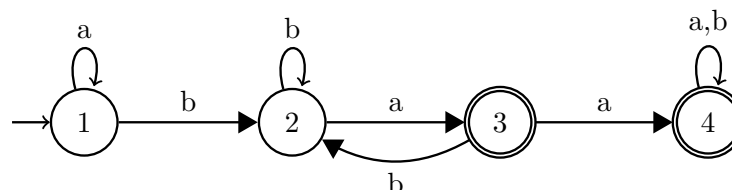
- ☐ a $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*(a + b)^*$ ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 0 ☐ c 2 ☒ d 4 ☐ e 3 ☐ f 1 ☐ g 5

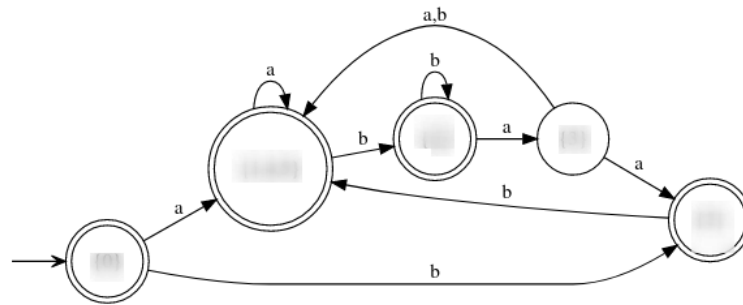
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



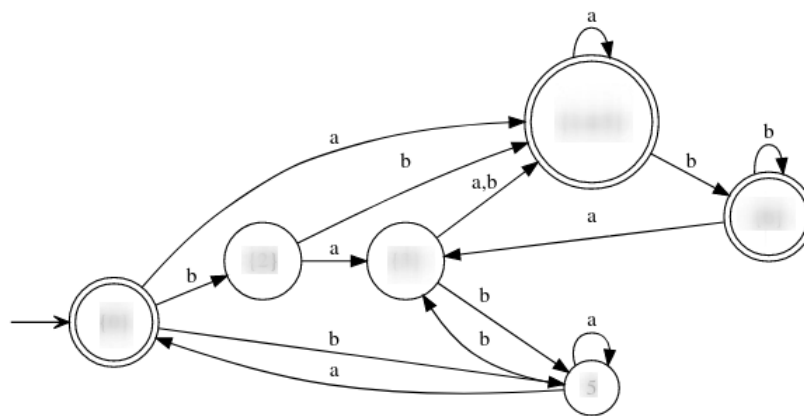
(-i-)



(-ii-)

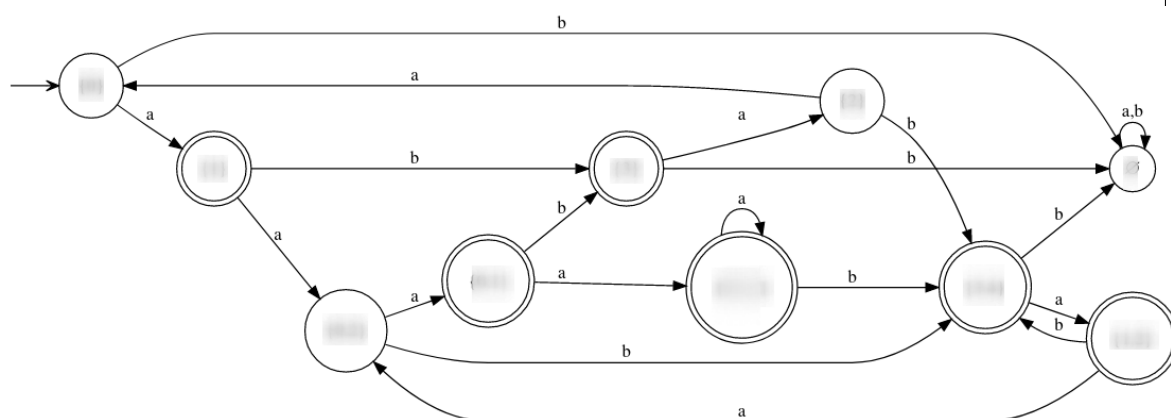


(-iii-)

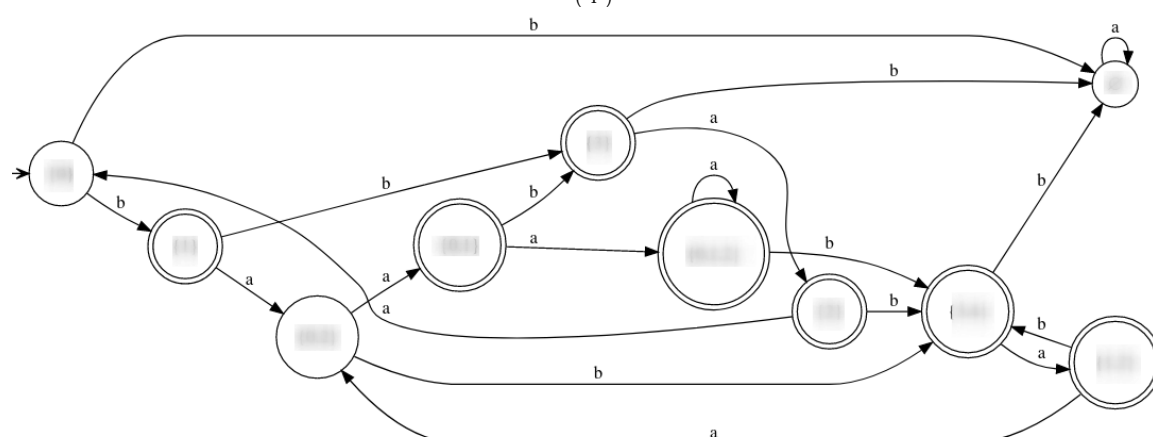


(-iv-)

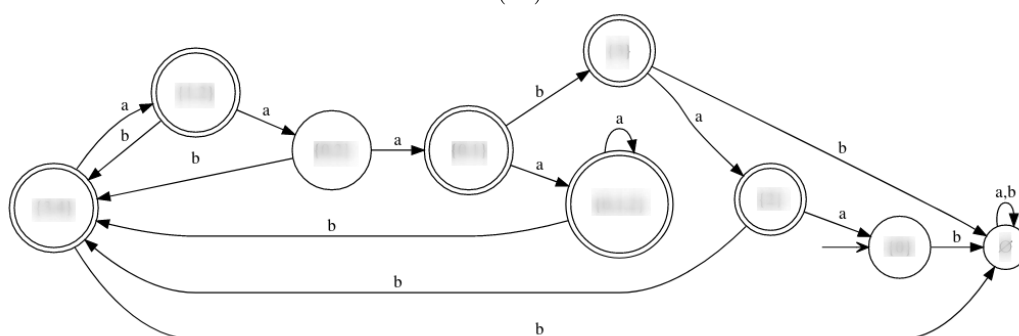
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



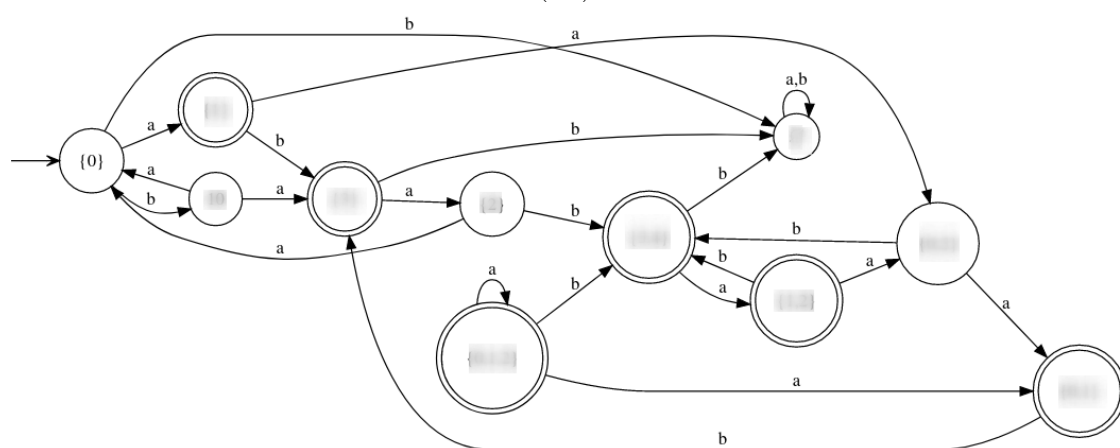
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a	b				f	g		i	j

Question 6 :

	b	c	d		f				j	k

Question 7 :

				e		g	h	i				m	n

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e			h		j	k		m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

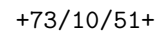
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, with a solid line at the very top. The paper is otherwise blank, with no text or markings.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d u est accepté par A . ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ b P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ b Un mot est une fonction.
☒ c Un mot peut être vide. ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ e Un mot peut être infini. ☒ f Un mot est une application.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ h Un mot possède une infinité d'extensions.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A possède un état puits
 ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
 ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ est fermé par préfixe.
 ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
 ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état co-accessible.
 ☐ A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A n'est pas complet.
 ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-.
 ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-i-.
 ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-.
 ☐ la Figure 4-iv-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_1 = aX_1 + b$ ☐ b $X_4 = (a+b)X_4$ ☒ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$ ☐ d $X_4 = a + b$
☐ e $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ f $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ h $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☐ i $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ k $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ l $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ b $X_4 = a + b$ ☐ c $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ d $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e $X_4 = a^* + b^*$ ☒ $X_4 = (a+b)^*$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2$ ☐ d $X_1 = a^*b + \epsilon$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ b $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_3 = (a(a+b)^*)^*$ ☐ b $X_3 = a(a+b)^*$ ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☒ celle trouvée pour X_1 ☐ b celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ c $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 1 ☐ c 2 ☐ d 6 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 3

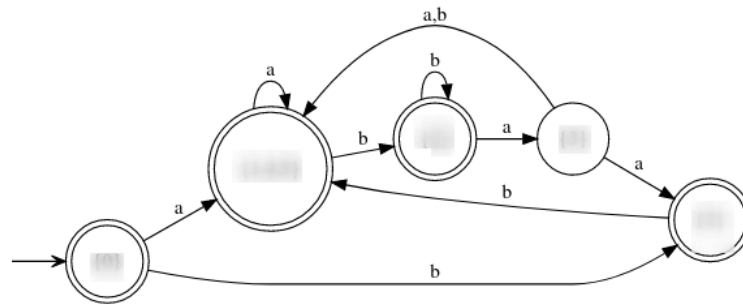
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



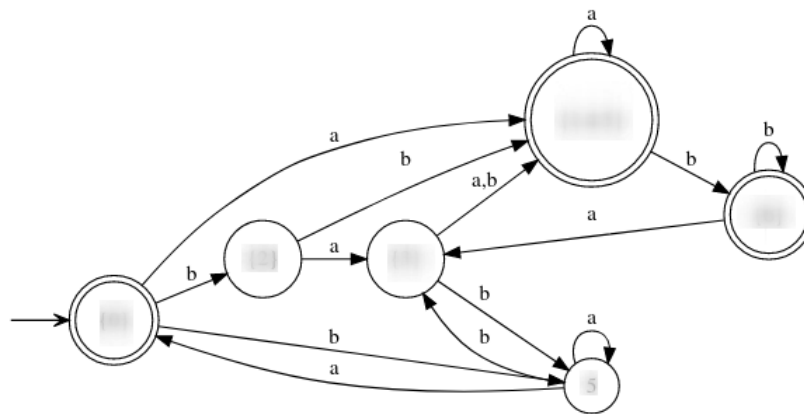
(-i-)



(-ii-)

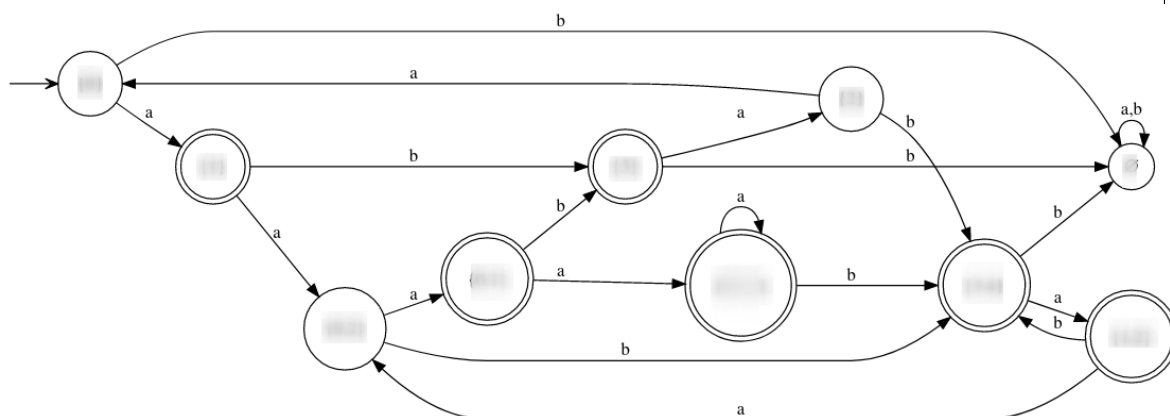


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



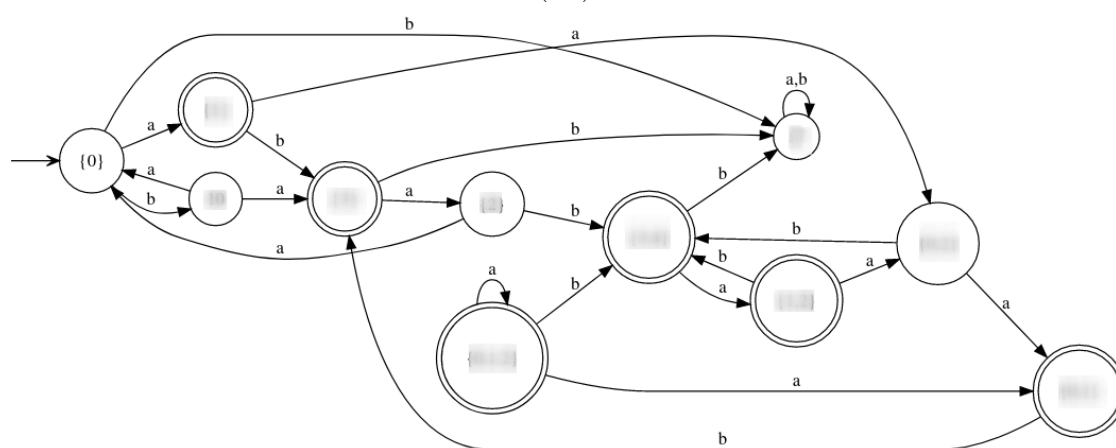
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

			d	e		g				k		m	n

Question 6 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 7 :

			d	e	f		h	i	j

Question 8 :

a			d	e			h		j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b		d	e	f		h	i		k	l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

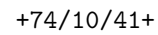
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ b A est complet.
 ☐ c A a des états accepteurs.
 ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$.
 ☐ e u est accepté par A .
 ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
 ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
 ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
 ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
 ☐ c A a au moins un état co-accessible.
 ☐ d A a au moins un état non accessible.
 ☒ e A a au moins un état accessible.
 ☒ f u n'est pas accepté par A .
 ☒ g A n'est pas complet.
 ☒ h $u \notin \mathcal{L}(A)$.
 ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
 ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
 ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
 ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
 ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
 ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☒ b Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☒ c Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
 ☒ e Un mot possède une infinité d'extensions.
 ☐ f Un mot peut être infini.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.
☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

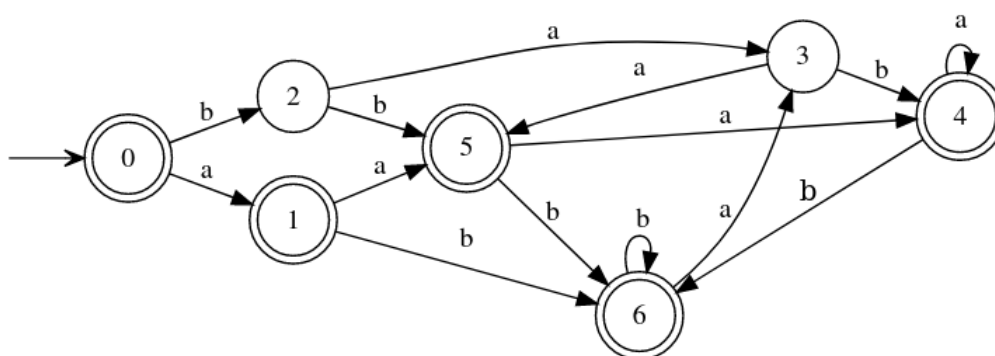
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

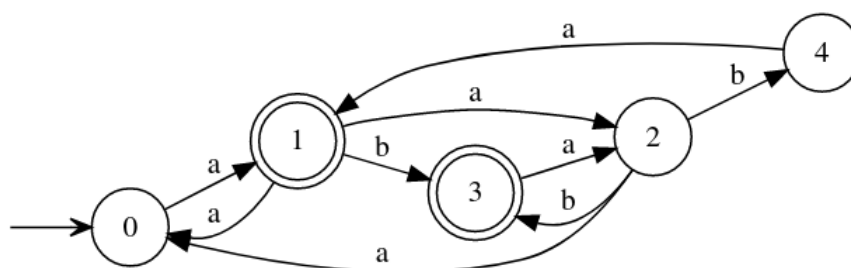
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

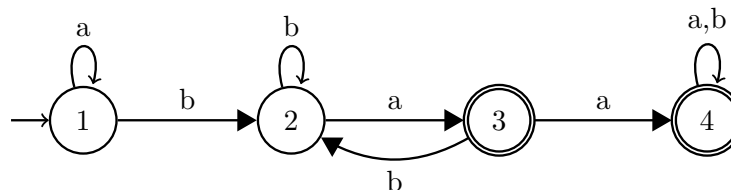
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

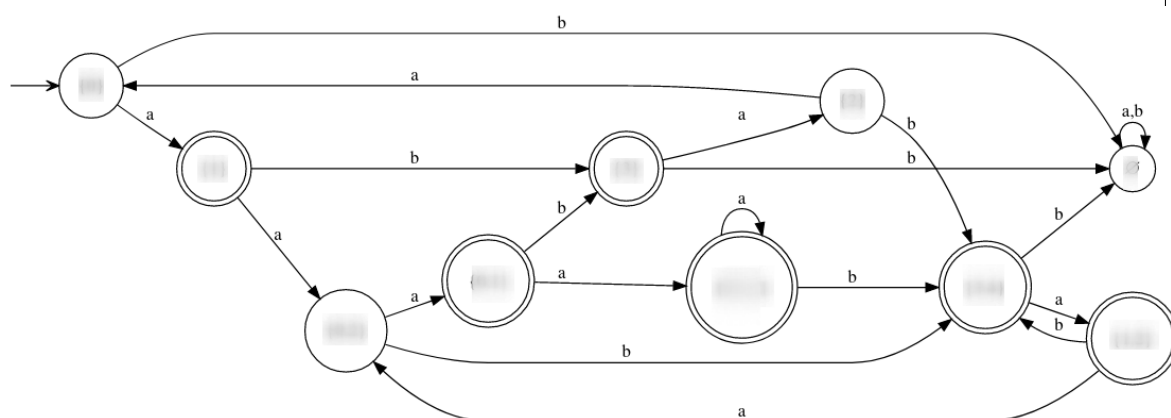


(-iii-)

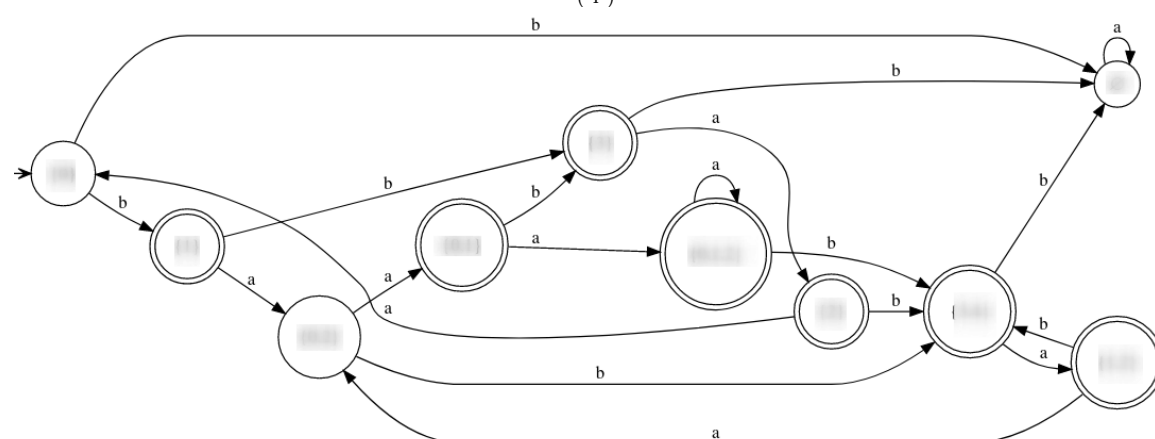


(-iv-)

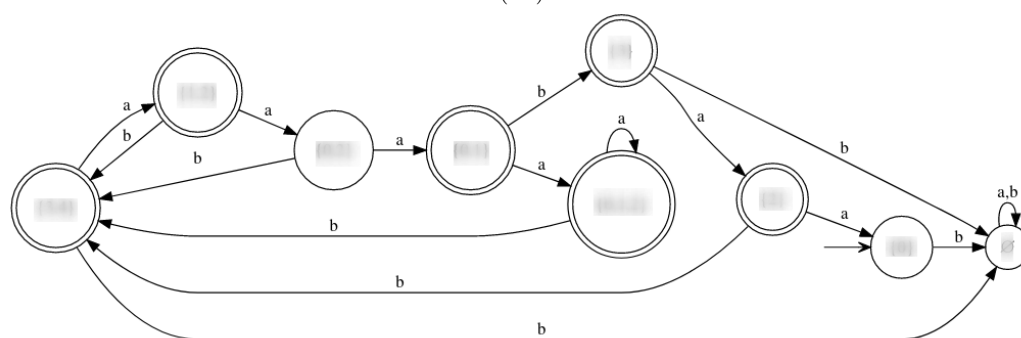
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



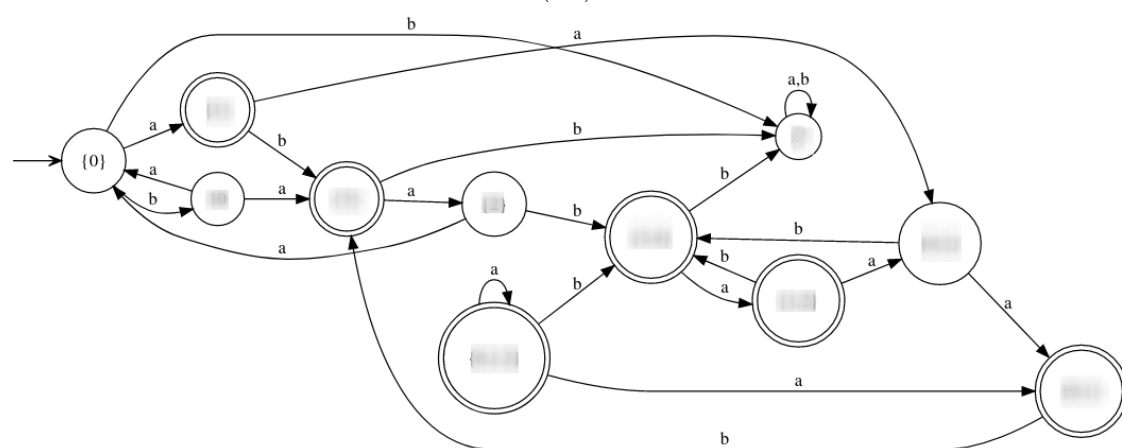
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b	c	d					i	j	k

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a			d		f				j			m	n

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 8 :

	b		d	e		g		i	j

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c		e		g			j	k	l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

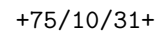
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
- ☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☐ g Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b u est accepté par A . ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A est complet.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A possède un état puits ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ d A accepte le langage universel.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ j			$X_2 = bX_3 + aX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

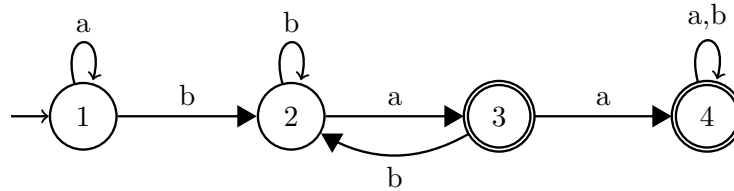
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 2 ☐ f 5 ☒ 4

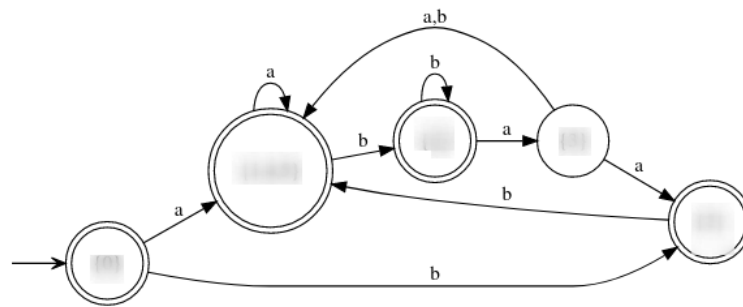
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

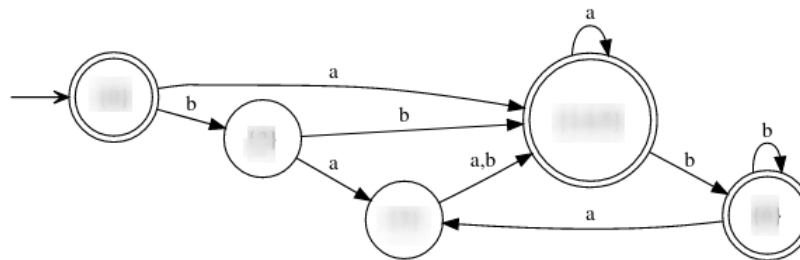
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



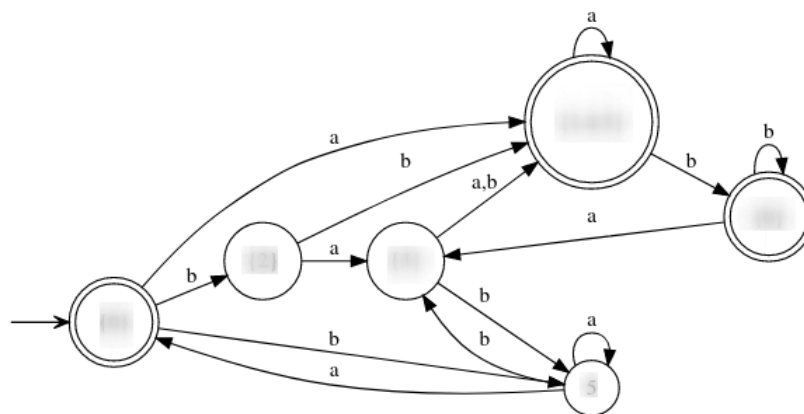
(-i-)



(-ii-)

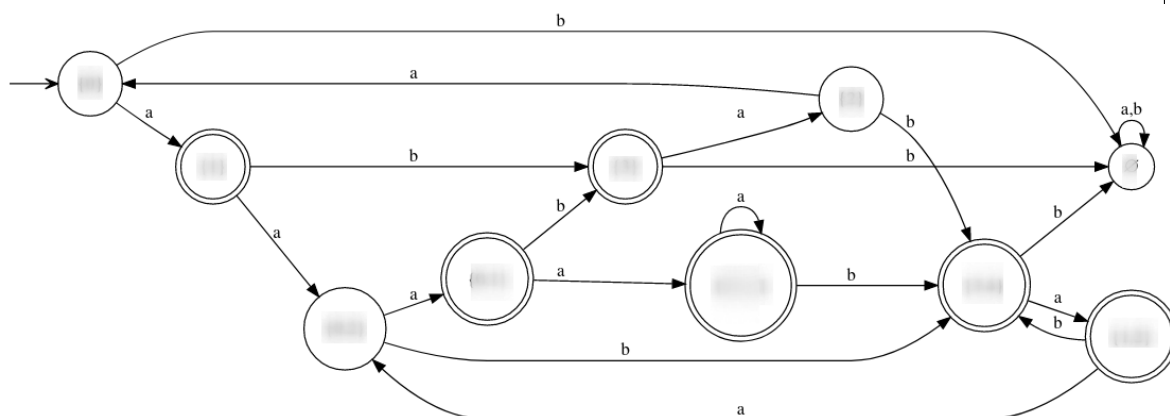


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

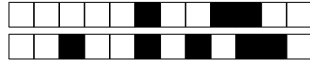


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e  g h     m n

Question 3 :   c  e f g  i j

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 :  b c d  f g h i

Question 6 : a b c d 

Question 7 :   c d e

Question 8 : a    f  h i j k

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a   d e f g  i j k l 

Question 12 : a  c d e f g h

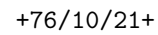
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ b Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ e Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ g Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ b A a au moins un état accessible. ☐ d A a au moins un état non accessible.
- ☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ g A n'est pas complet. ☐ h $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

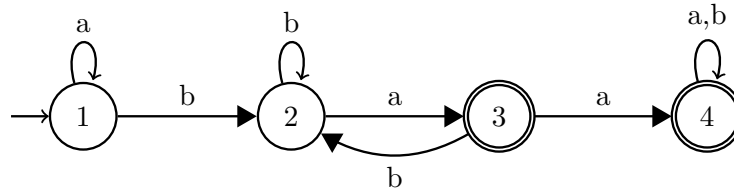
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☐ c 0 ☐ d 3 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

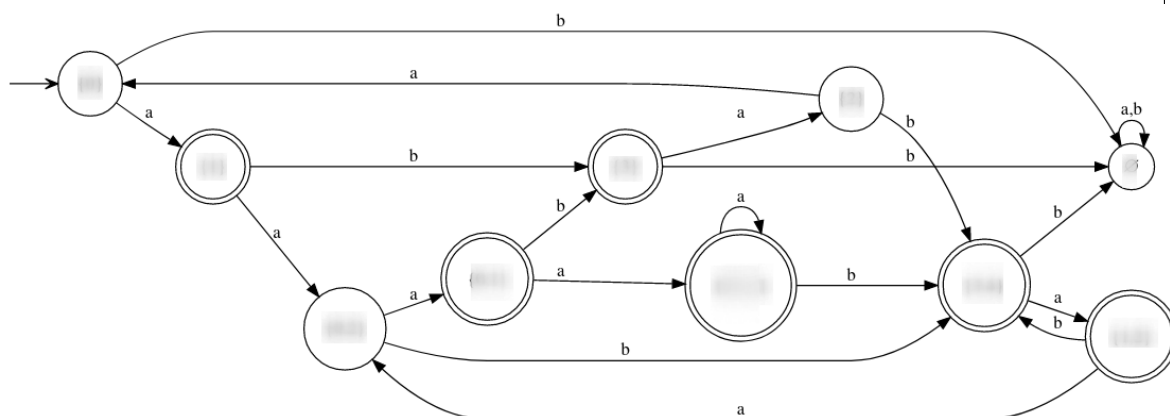


(-iii-)



(-iv-)

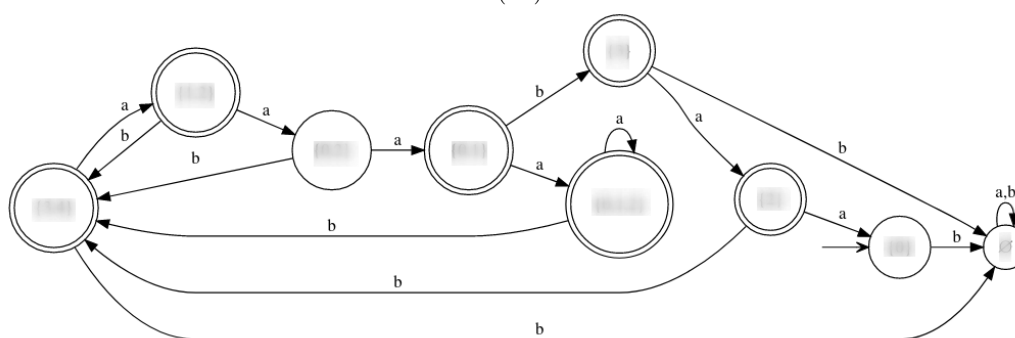
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

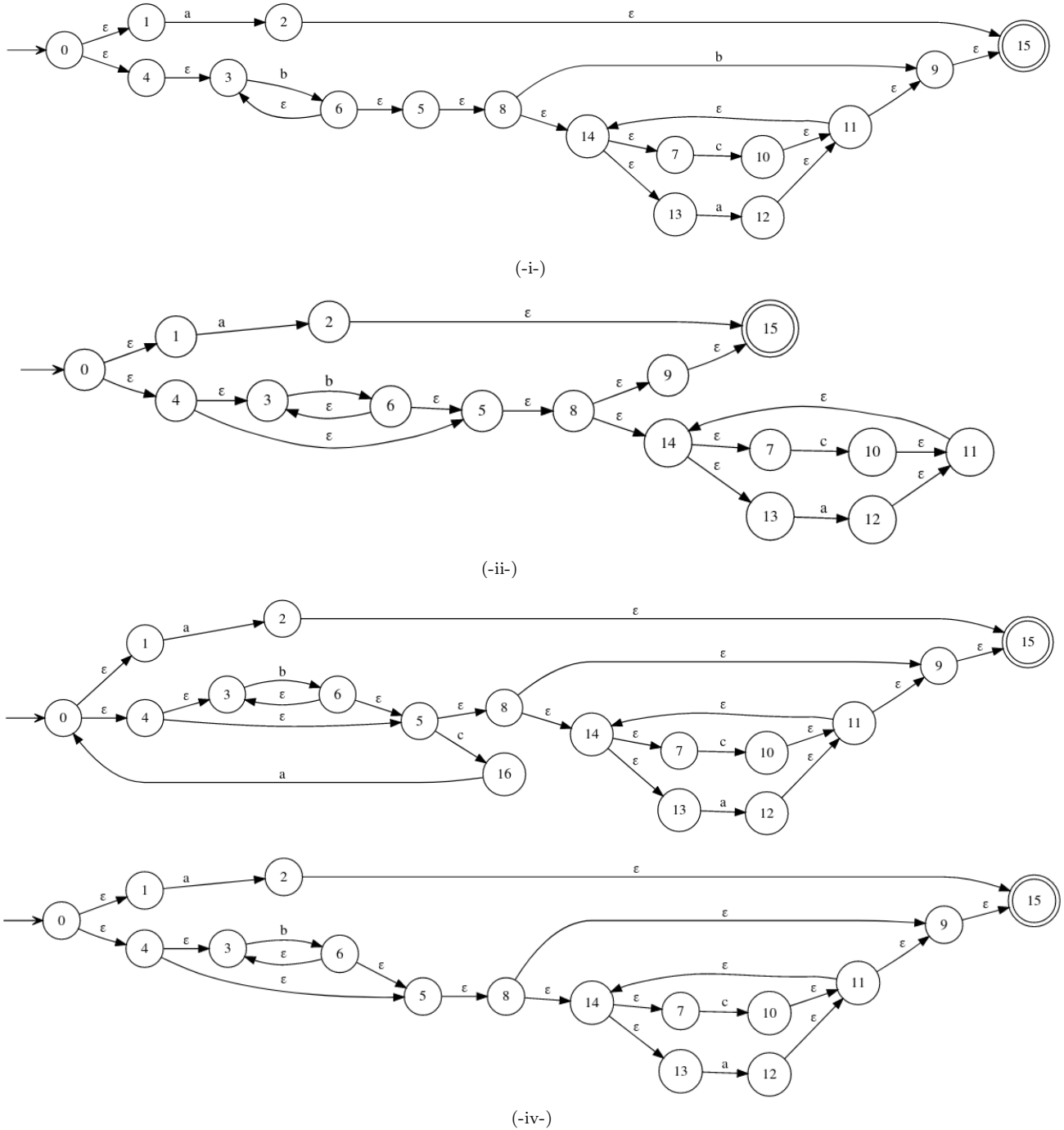
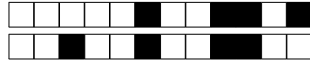


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservez enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a	b		d								l	m	n

Question 4 :

a			d	e		g		i	j

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a			d	e	f				j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

	b	c				g	h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

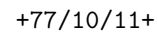
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire sheet is framed by a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c u est accepté par A . ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e A est complet.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ b Un mot peut être vide.
☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ e Un mot est une application. ☒ f Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ g Un mot peut être infini. ☒ h Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ i Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ j Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ k Un mot est une fonction. ☒ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits ☐ d A accepte le langage universel.
☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	
	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_4 = a + b$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$	
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$	
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$			

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

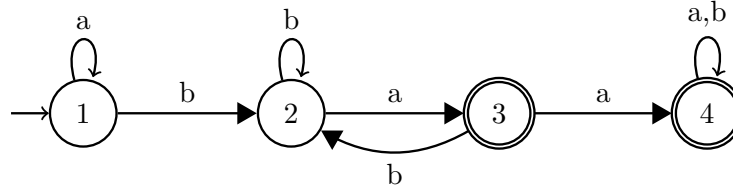
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ 4 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 5 ☐ f 6 ☐ g 0

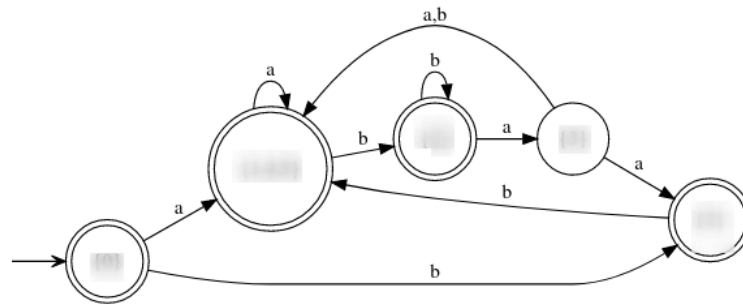
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



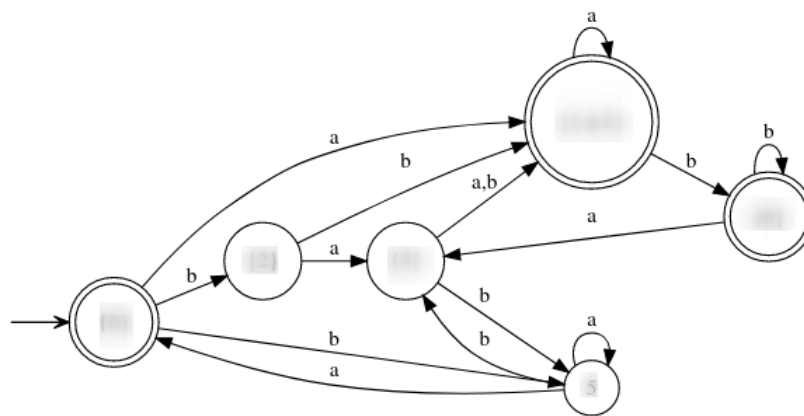
(-i-)



(-ii-)

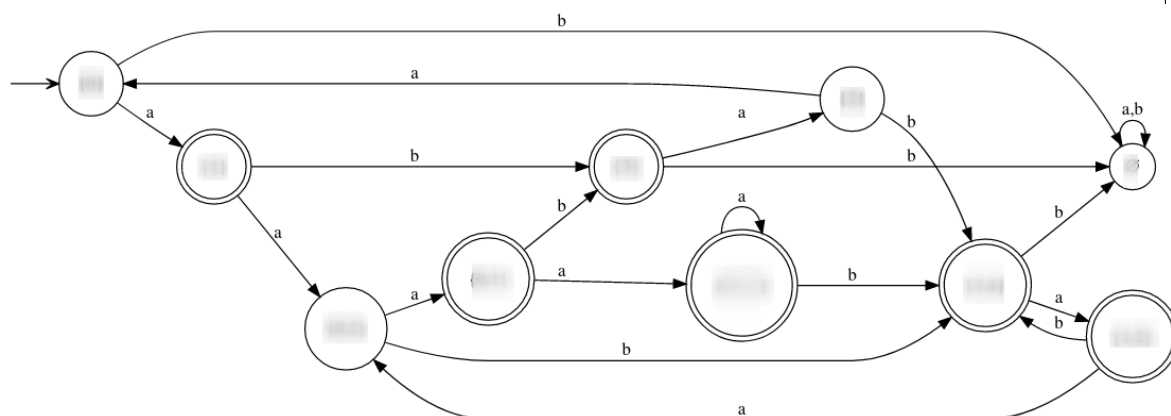


(-iii-)

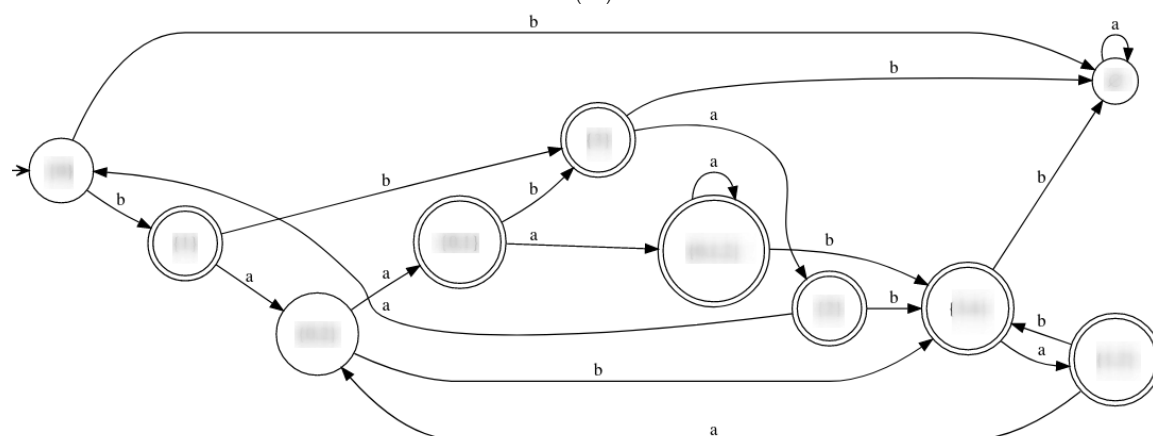


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

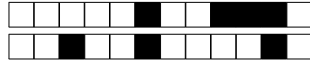


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a		c	d			g						m	n

Question 4 :

		c	d	e	f	g	h	i

Question 5 :

			d	e			h	i	j	k

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

	b	c			f	g		i	j

Question 8 :

	b		d	e

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d		f		h	i	j		l	

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

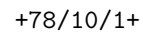
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c A est complet.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b P est forcément déterministe.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☒ b A a au moins un état accessible.
☒ c $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ e A a au moins un état non accessible. ☒ f u n'est pas accepté par A .
☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☒ h A n'est pas complet.
☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot est une application. ☒ b Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ d Un mot peut être vide.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
 ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A accepte le langage universel.
 ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A possède un état puits
 ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par facteur.
 ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ est fermé par préfixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-.
 ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-.
 ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-.
 ☐ la Figure 4-ii-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
☐	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$
☐	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

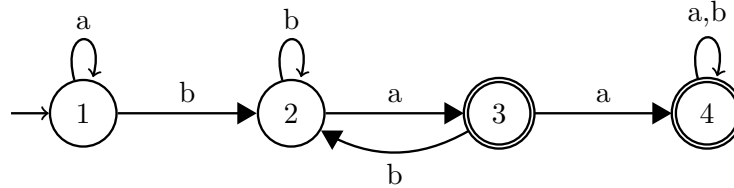
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 3 ☐ c 1 ☒ d 4 ☐ e 2 ☐ f 6 ☐ g 0

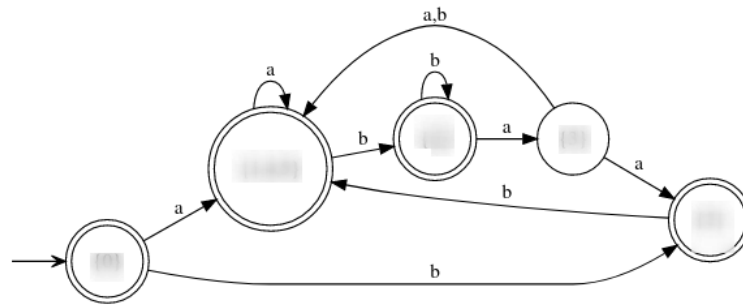
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



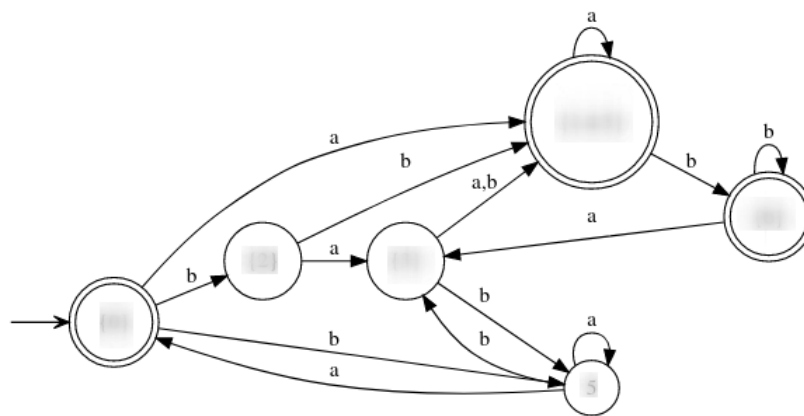
(-i-)



(-ii-)

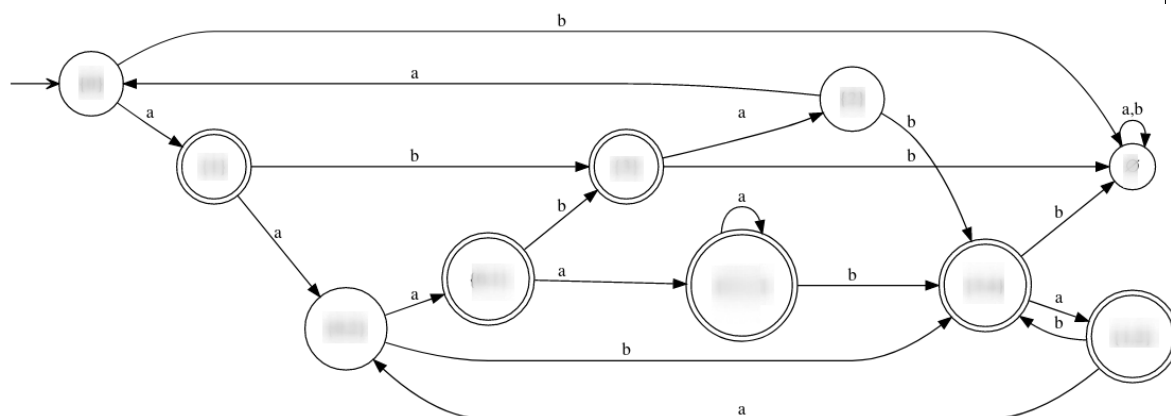


(-iii-)

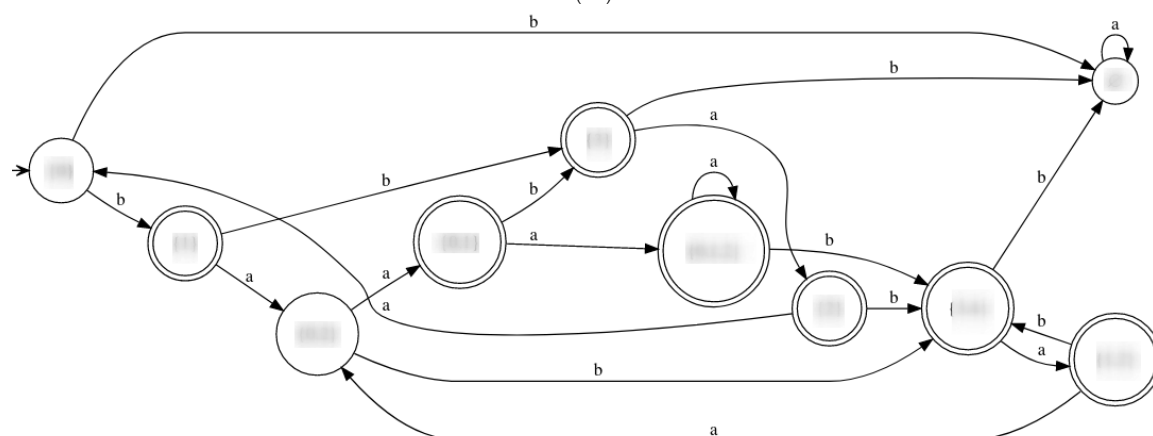


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



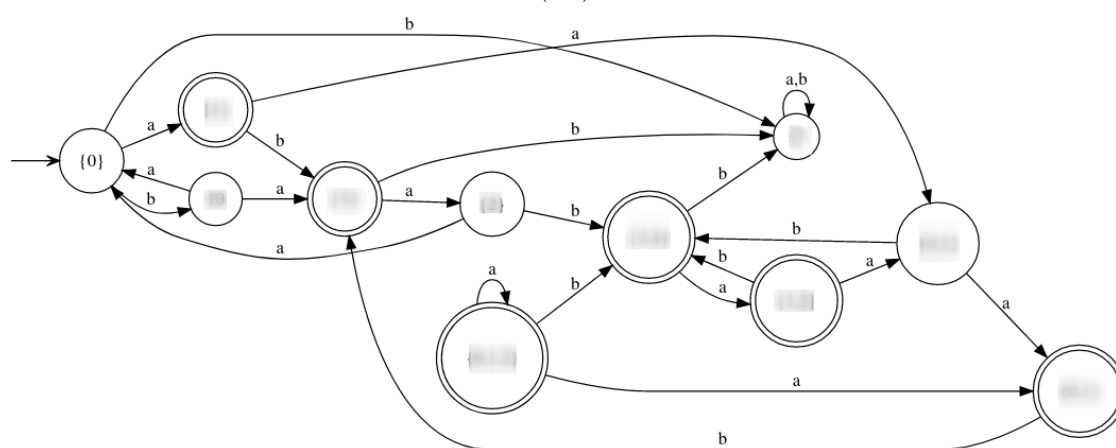
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

a				e		g		i	j	k

Question 5 :

							h		j	k	l	m	n

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 8 :

a				e	f	g		i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d			g		i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

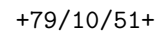
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
- ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par préfixe.
- ☒ b Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☒ d Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
- ☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☒ A n'est pas complet. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ A a au moins un état accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e A possède un état puits
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ b Un mot peut être infini.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut être vide. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot est une application. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une fonction.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

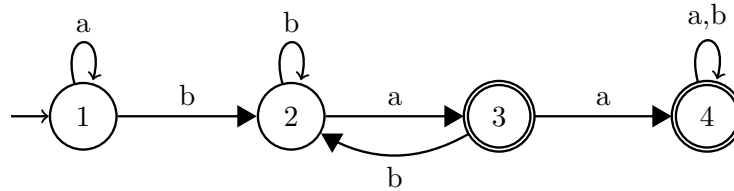
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

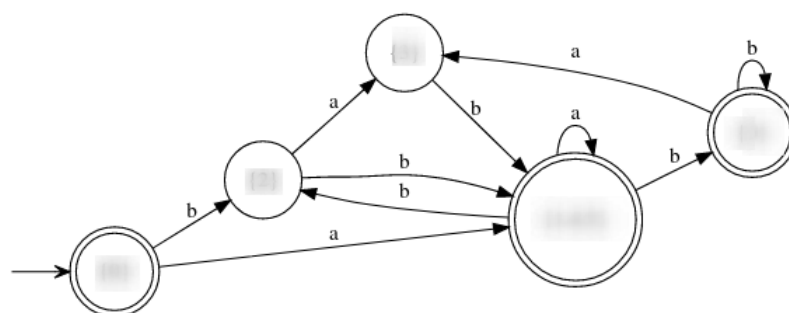
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 3 ☐ g 5

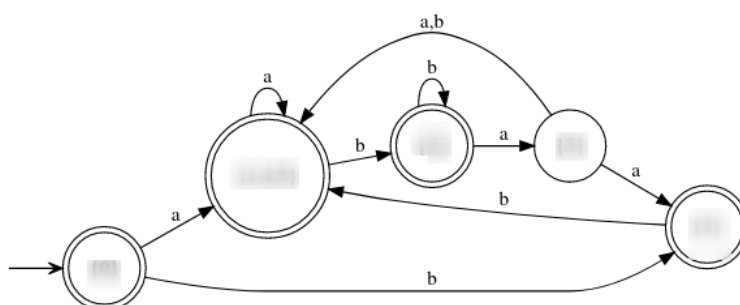
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

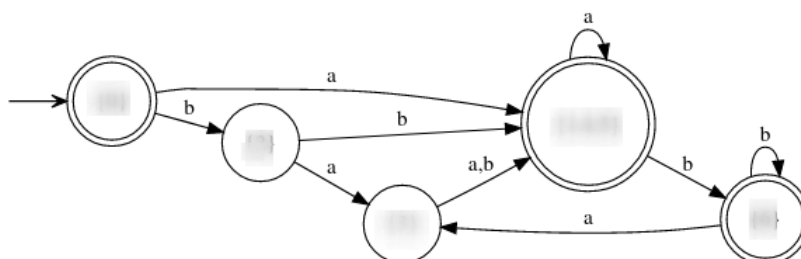
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



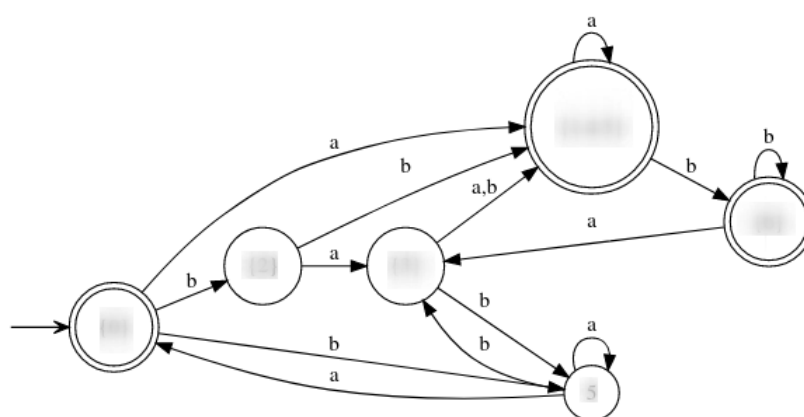
(-i-)



(-ii-)

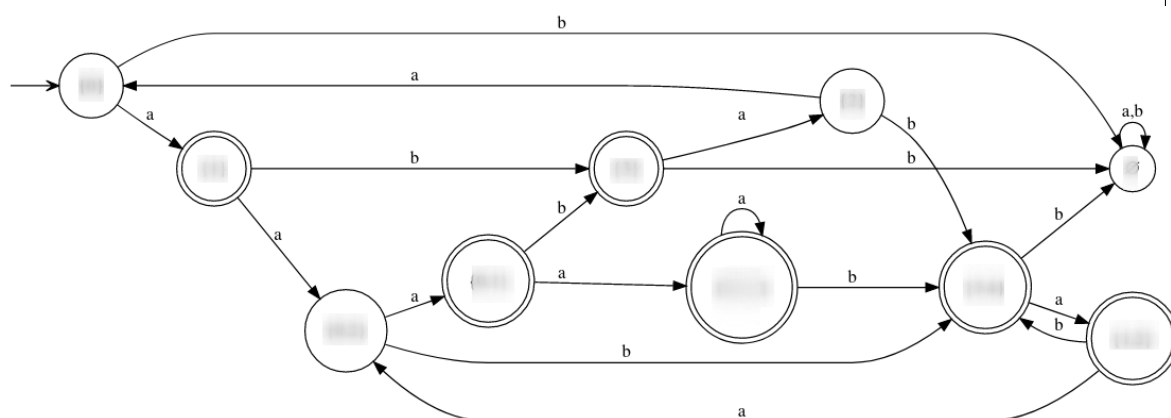


(-iii-)

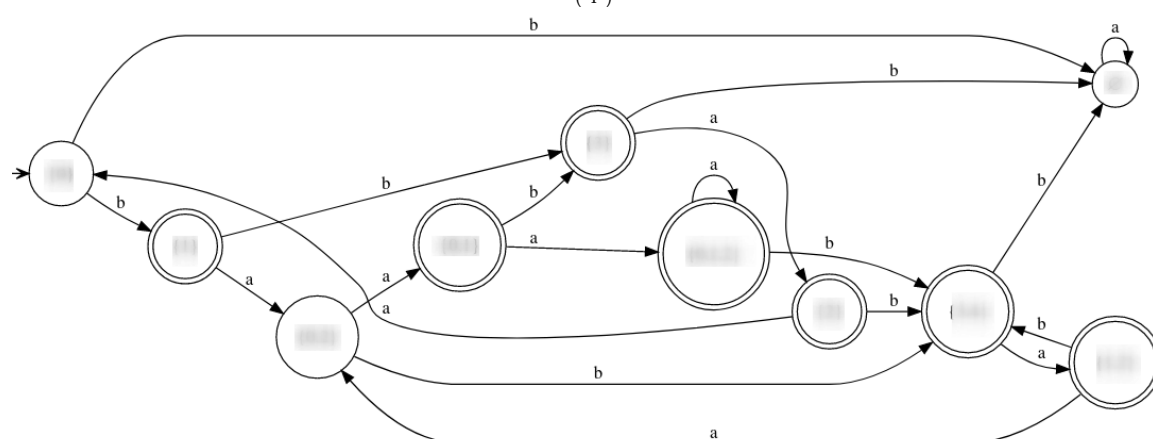


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



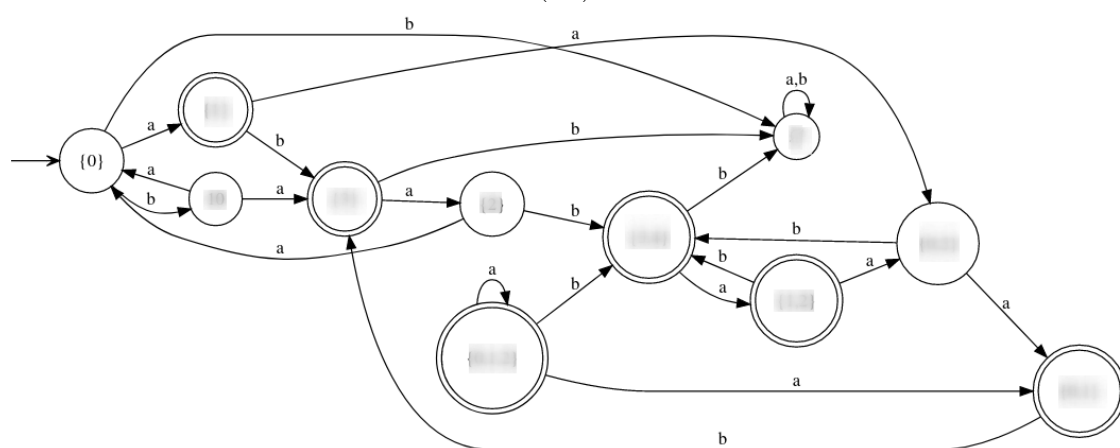
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

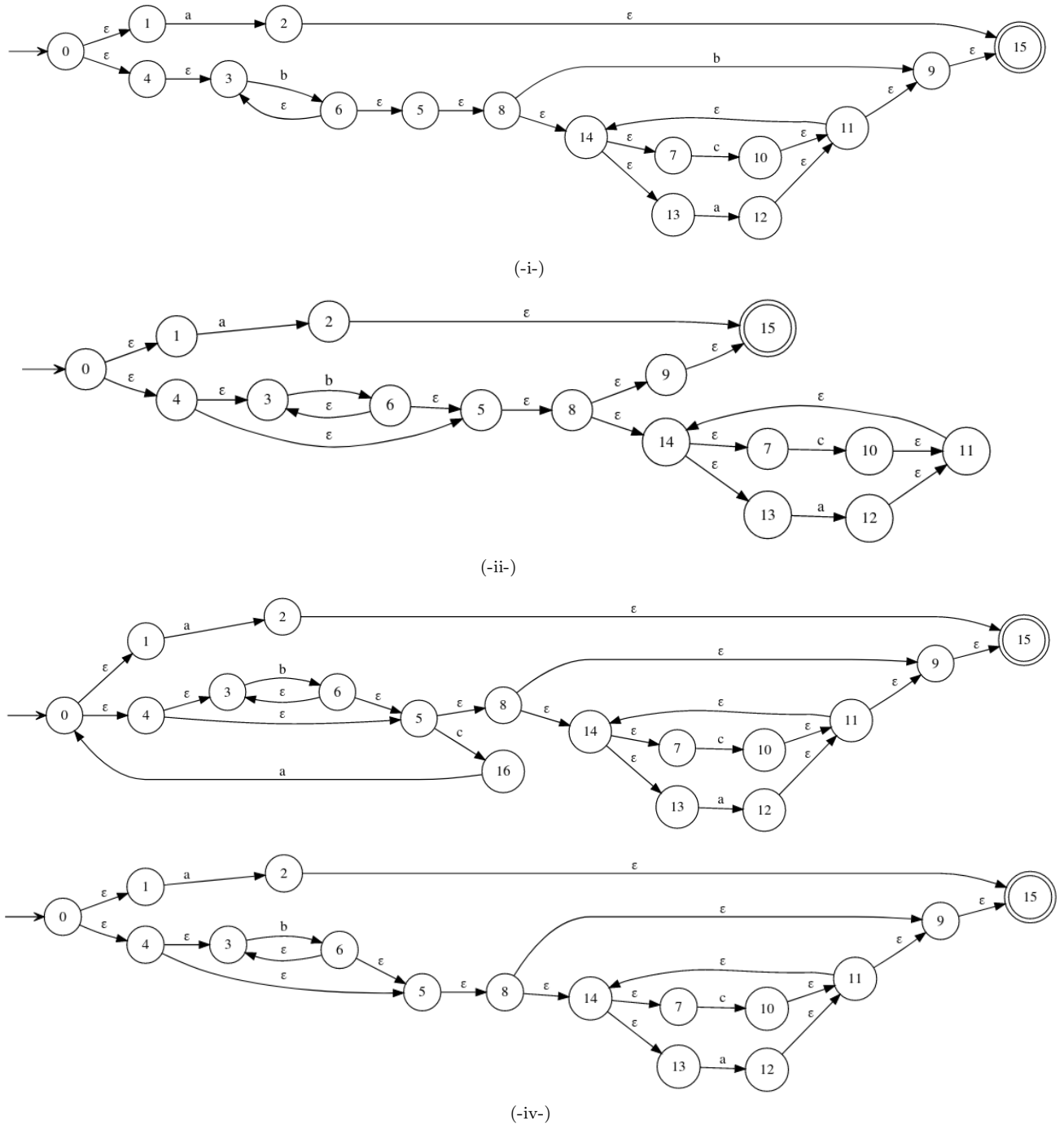


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

		c		e	f		h	i	j

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

a	b	c					h		j	k

Question 7 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 8 :

a	b				f					k		m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b		d			g	h	i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

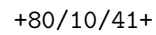
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	☐ Un mot est une fonction.	☐ b	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ d	Un mot possède une infinité de préfixe.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot est une application.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ j	Un mot peut être infini.
☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ l	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .		
☐ b	A a au moins un état non co-accessible.	☐	$u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ d	A n'a pas d'état accepteur.	☐	A n'est pas complet.
☐ f	A a au moins un état non accessible.	☐	u n'est pas accepté par A .
☐	A a au moins un état accessible.	☐ i	A a au moins un état co-accessible.
☐ j	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.		
☐ k	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.		

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a	Σ est fermé par préfixe.	☐	Σ^* est fermé par préfixe.
☐	Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.	☐ d	Σ est fermé par suffixe.
☐	Σ^* est fermé par facteur.	☐	Σ^* est fermé par suffixe.
☐ g	Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.	☐ h	Σ est fermé par facteur.
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A a des états accepteurs.
☐ A est complet. ☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

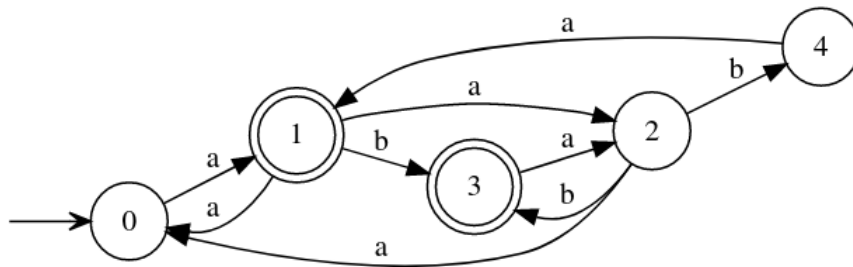
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

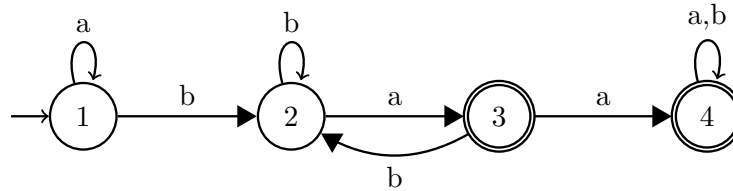
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ 4 ☐ c 2 ☐ d 5 ☐ e 6 ☐ f 1 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

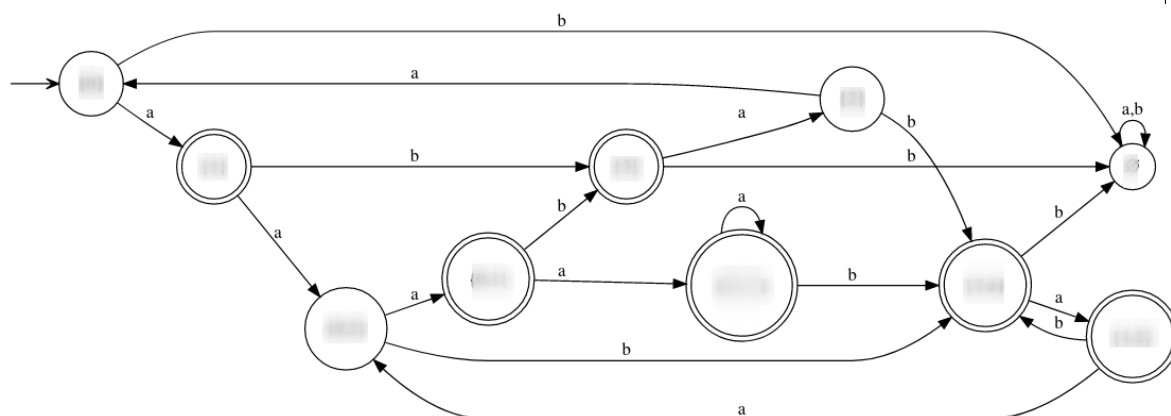


(-iii-)

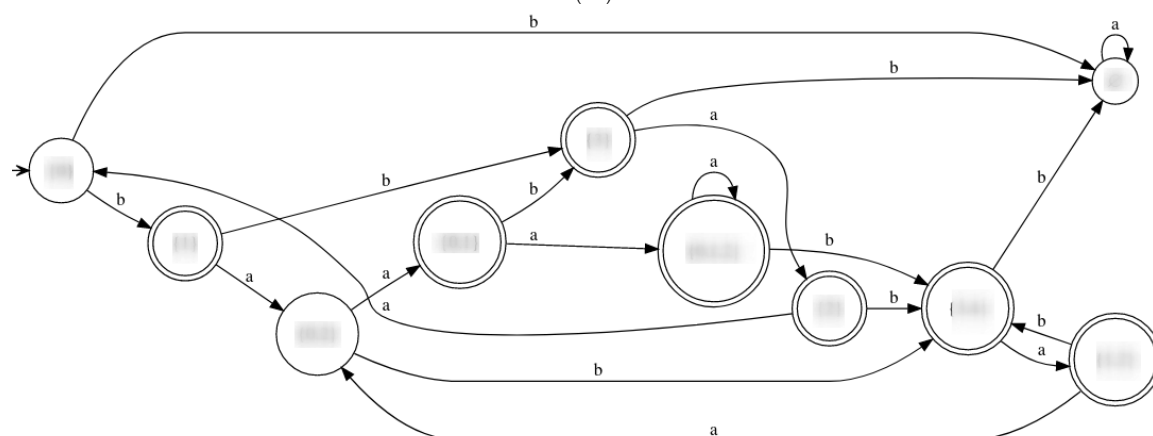


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d     j  l m n

Question 3 :  b  d  f  i j k

Question 4 : a   d  g h i j

Question 5 :  b c d  f g h i

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 :   c d e

Question 9 : a b c  e

Question 10 :  b c d

Question 11 :  b  d e f  h i j k  m

Question 12 : a b c d e  g h

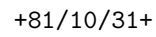
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ c A a des états accepteurs. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e A possède un état puits ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 5 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 1

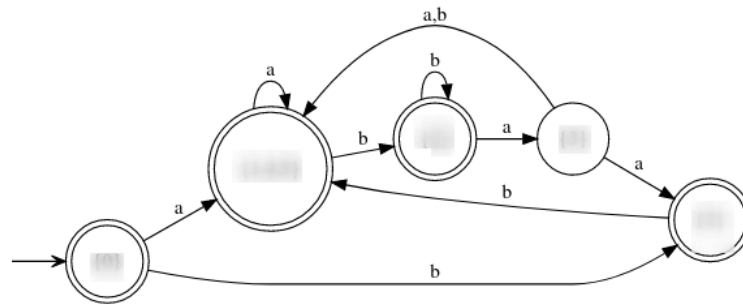
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

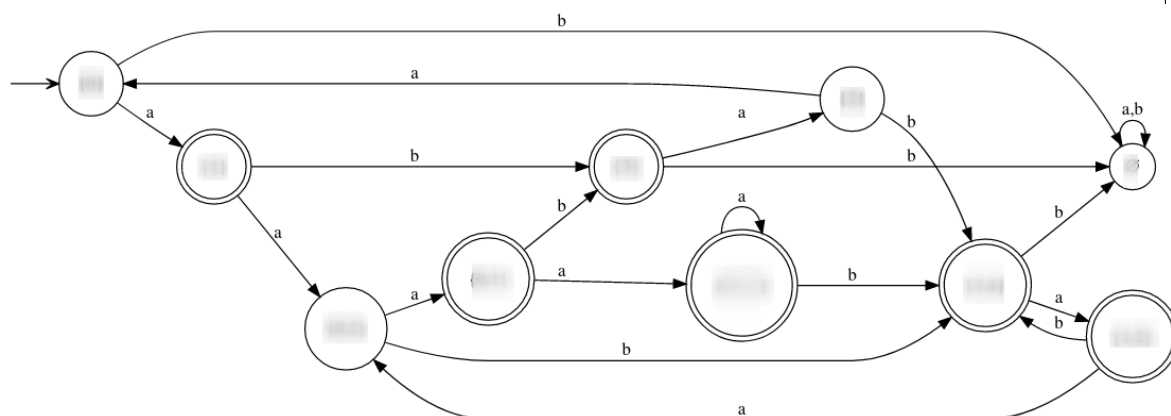


(-iii-)

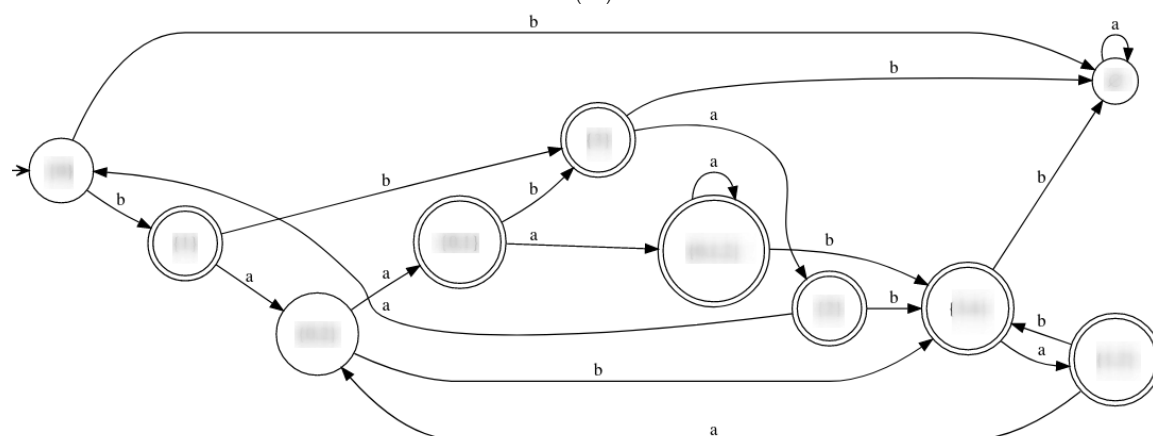


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



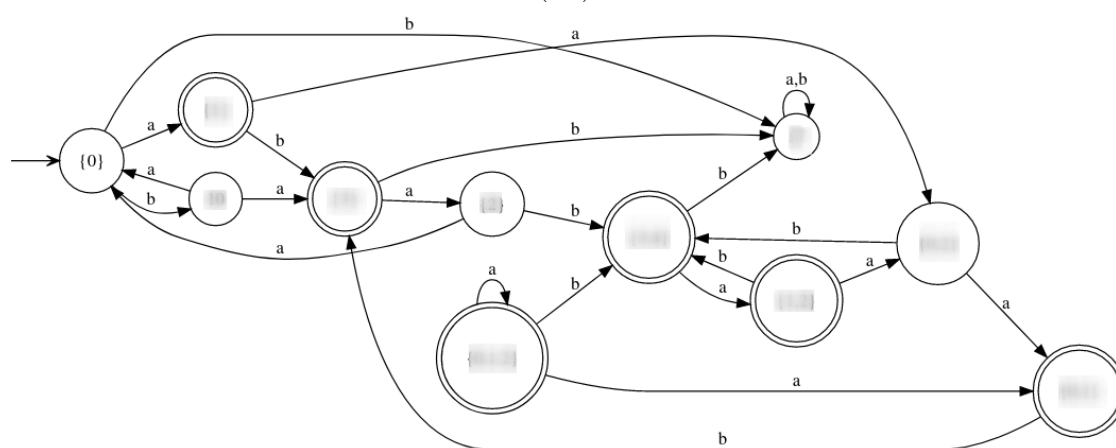
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

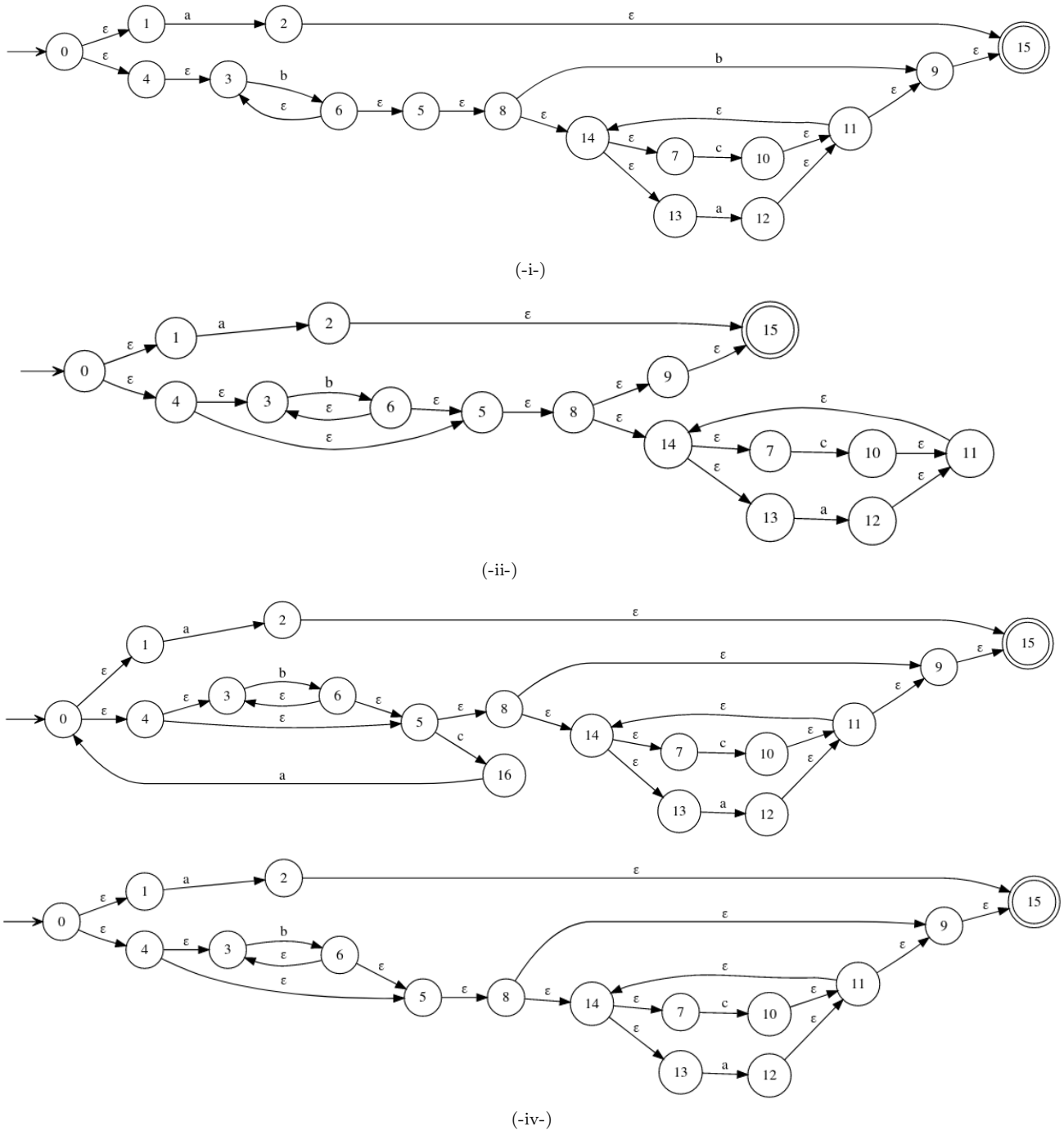
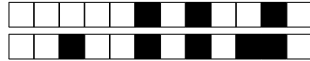


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

	b	c					h	i	j	k

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

		c			f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 8 :

			d	e		g					l	m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d					i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

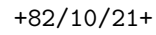
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a) Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b) L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c) Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d) Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a) Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ b) $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c) A est complet.
- ☐ d) A a des états accepteurs.
- ☐ e) Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f) u est accepté par A .
- ☐ g) Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a) Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ b) P est forcément déterministe.
- ☒ c) $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d) Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a) A a au moins un état accessible.
- ☒ b) $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☒ c) A n'est pas complet.
- ☐ d) A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ e) u n'est pas accepté par A .
- ☒ f) Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

- ☐g A a au moins un état non accessible. ☐h A a au moins un état co-accessible.
☐i A n'a pas d'état accepteur.
☐j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐a A accepte le langage universel. ☐b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐d A possède un état puits ☐e Tous les états de A sont accepteurs.
☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐d Σ est fermé par suffixe.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐f Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐h Σ est fermé par facteur.
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une application.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐g Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut être vide.
☐i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐j Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐a la Figure 3-i-. ☐b la Figure 3-iv-. ☐e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐c la Figure 4-ii-. ☐d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

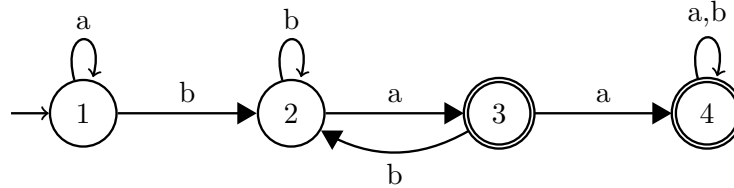
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 5 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 2 ☐ f 6 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

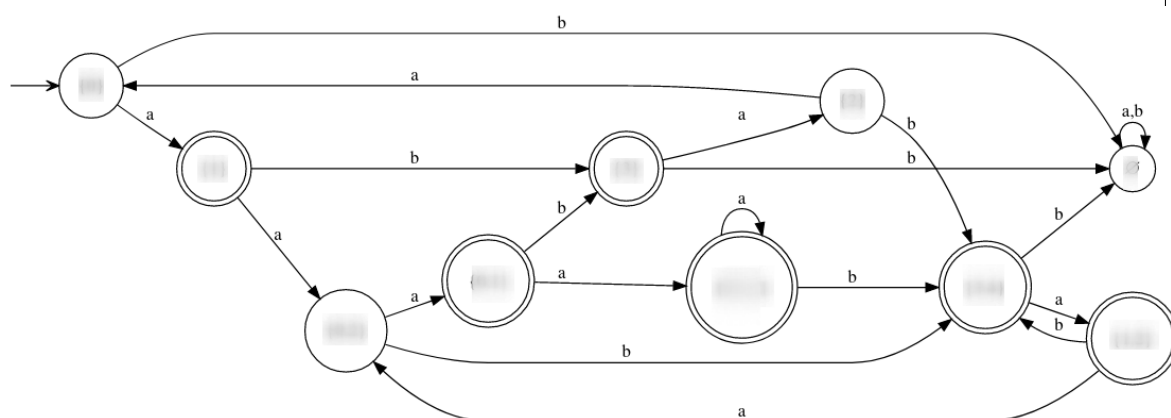


(-iii-)

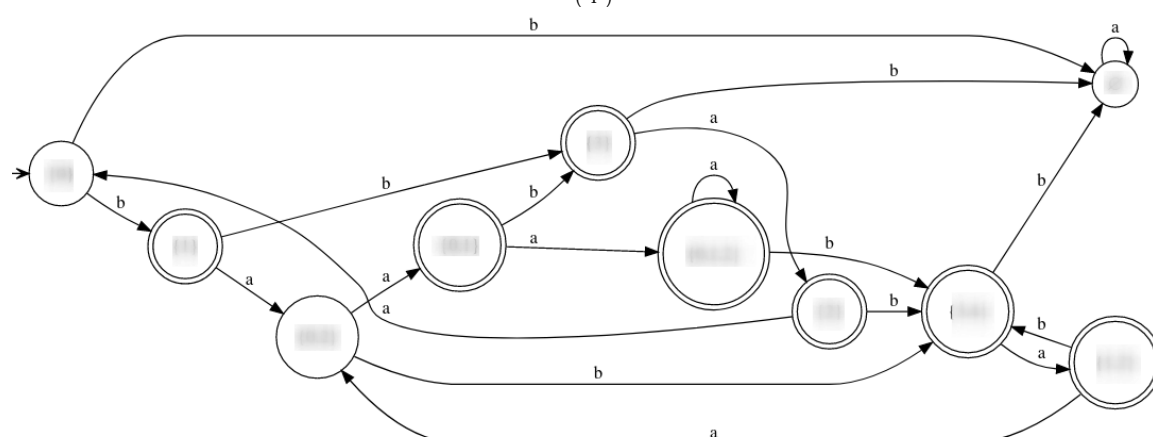


(-iv-)

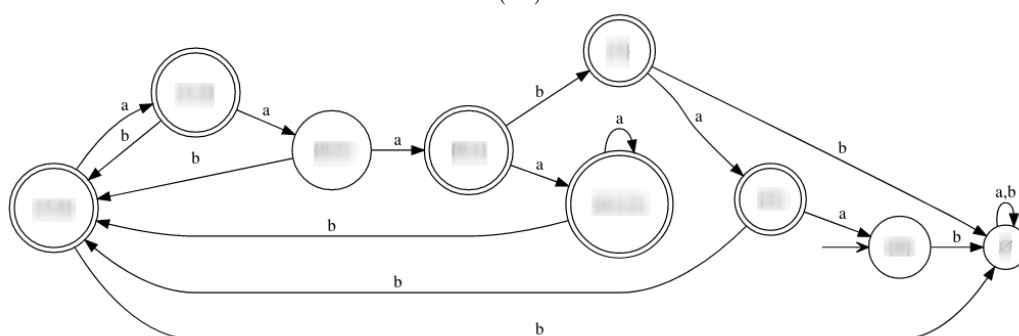
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



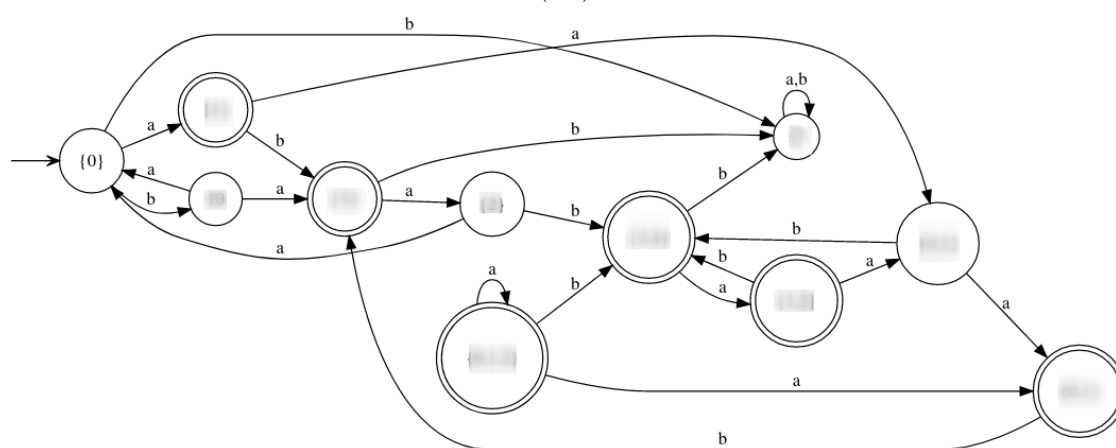
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

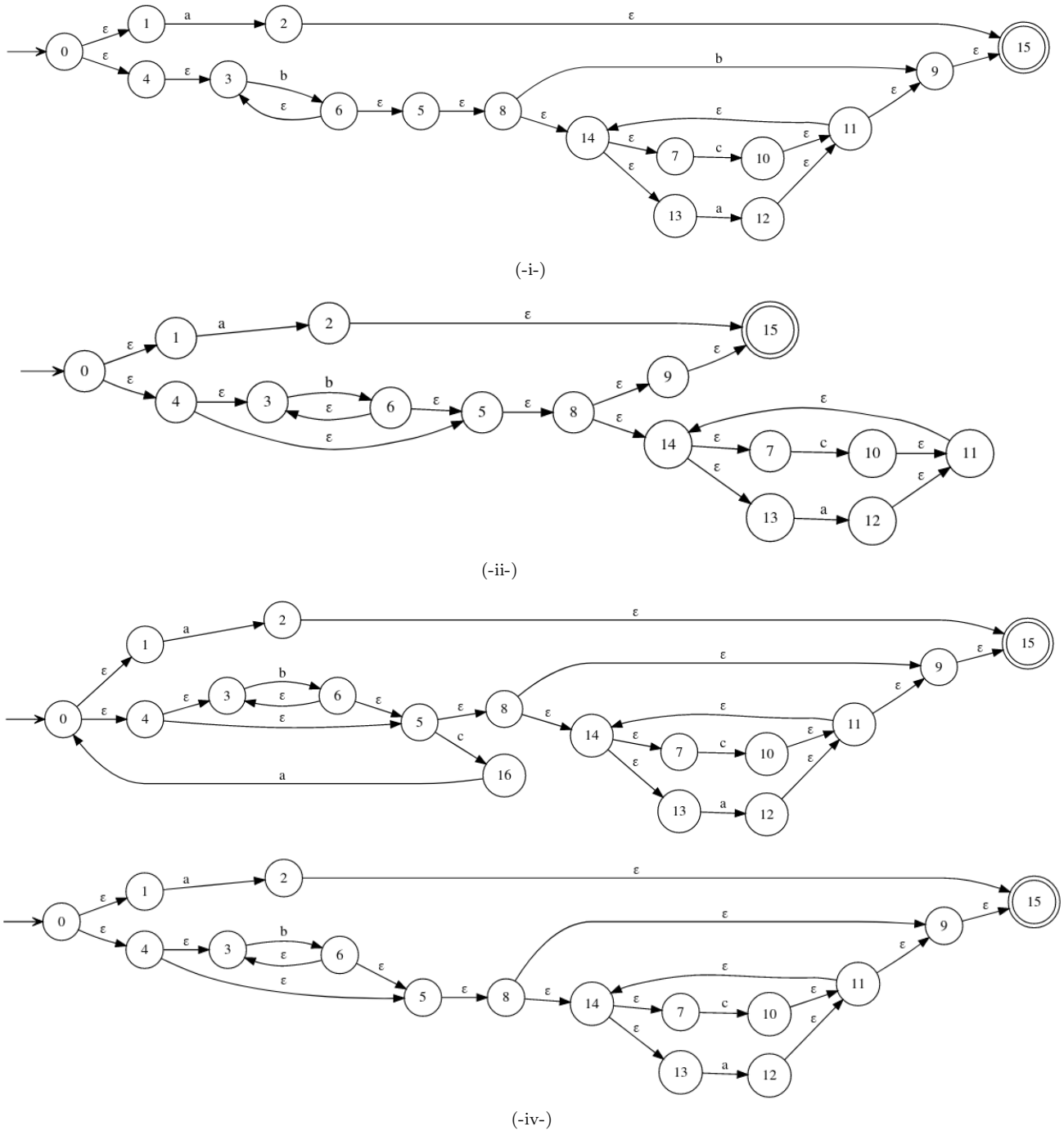
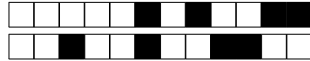


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

			d			g	h	i	j	k

Question 6 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 7 :

		c	d		f		h	i	j

Question 8 :

						g		i	j		l	m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d	e			h		j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

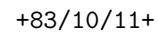
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
- ☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ f A accepte le langage universel.
- ☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ c Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ d Σ est fermé par suffixe.

- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Σ est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ A a au moins un état accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ f A a au moins un état non accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ A n'est pas complet.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b u est accepté par A . ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot est une application. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une fonction.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
	☐ $X_4 = a + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

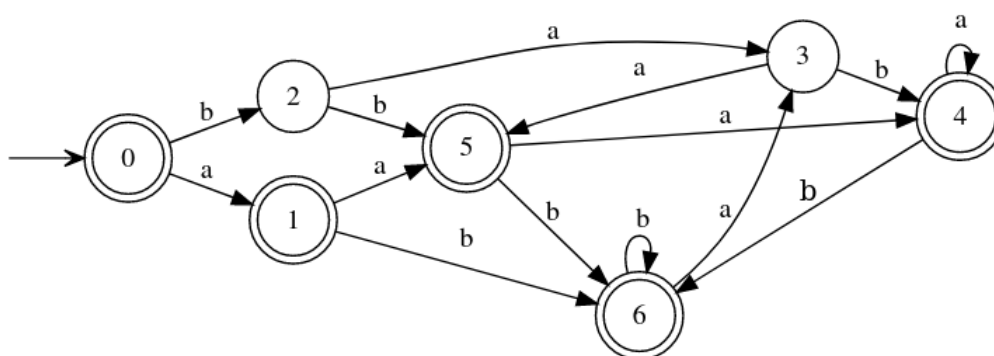
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

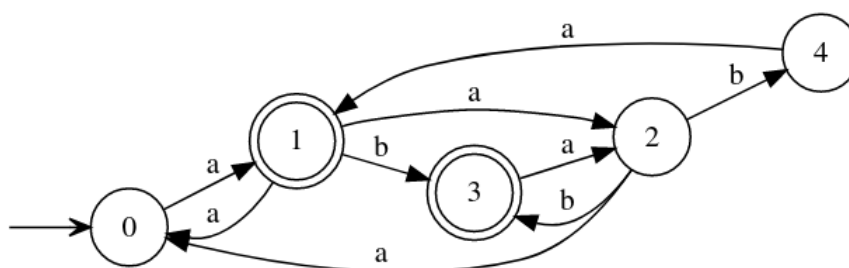
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

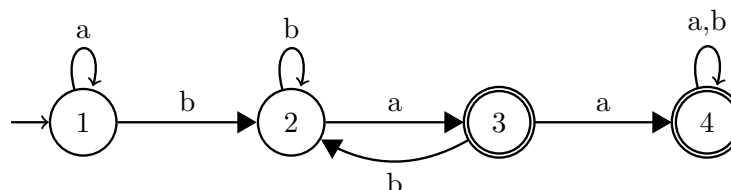
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 6 ☐ e 5 ☐ f 1 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

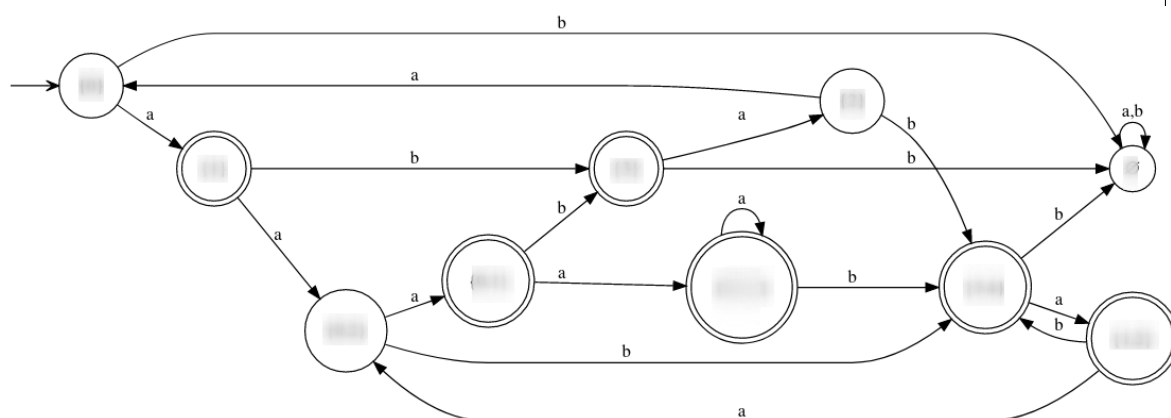


(-iii-)

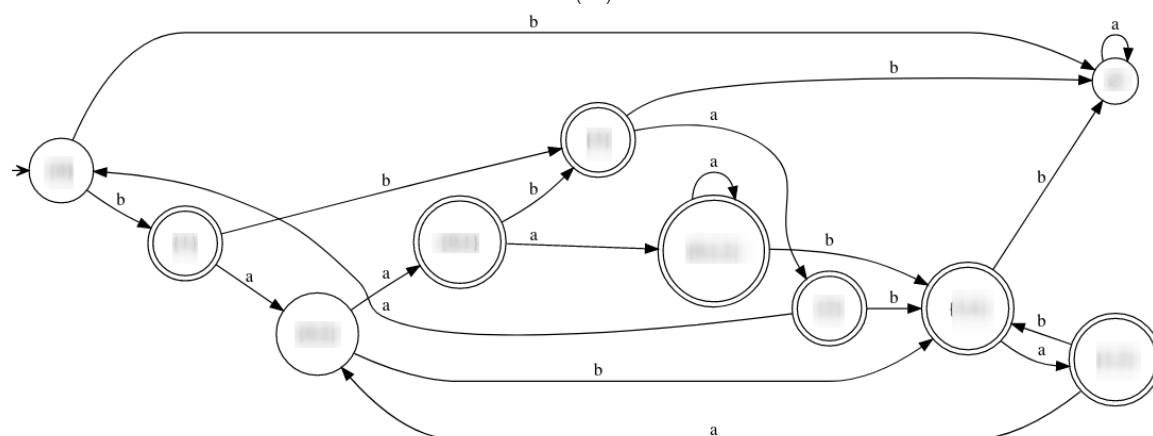


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



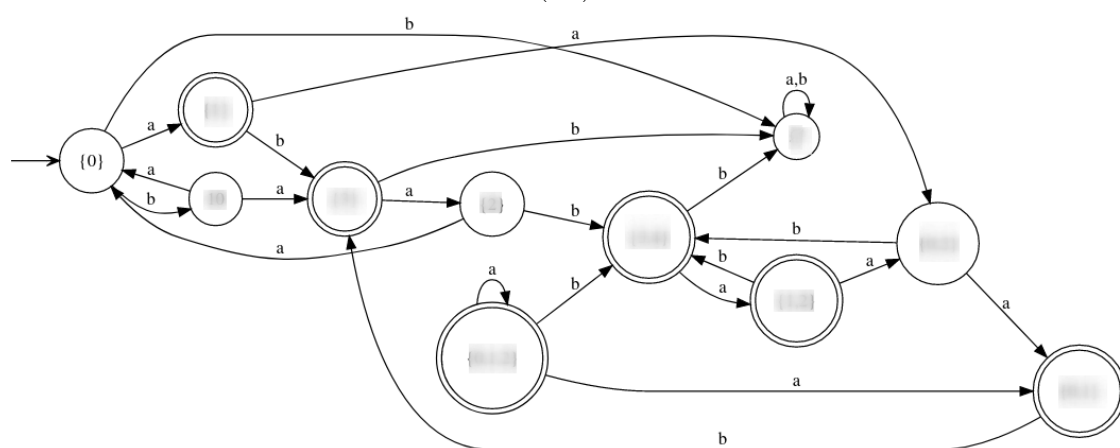
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

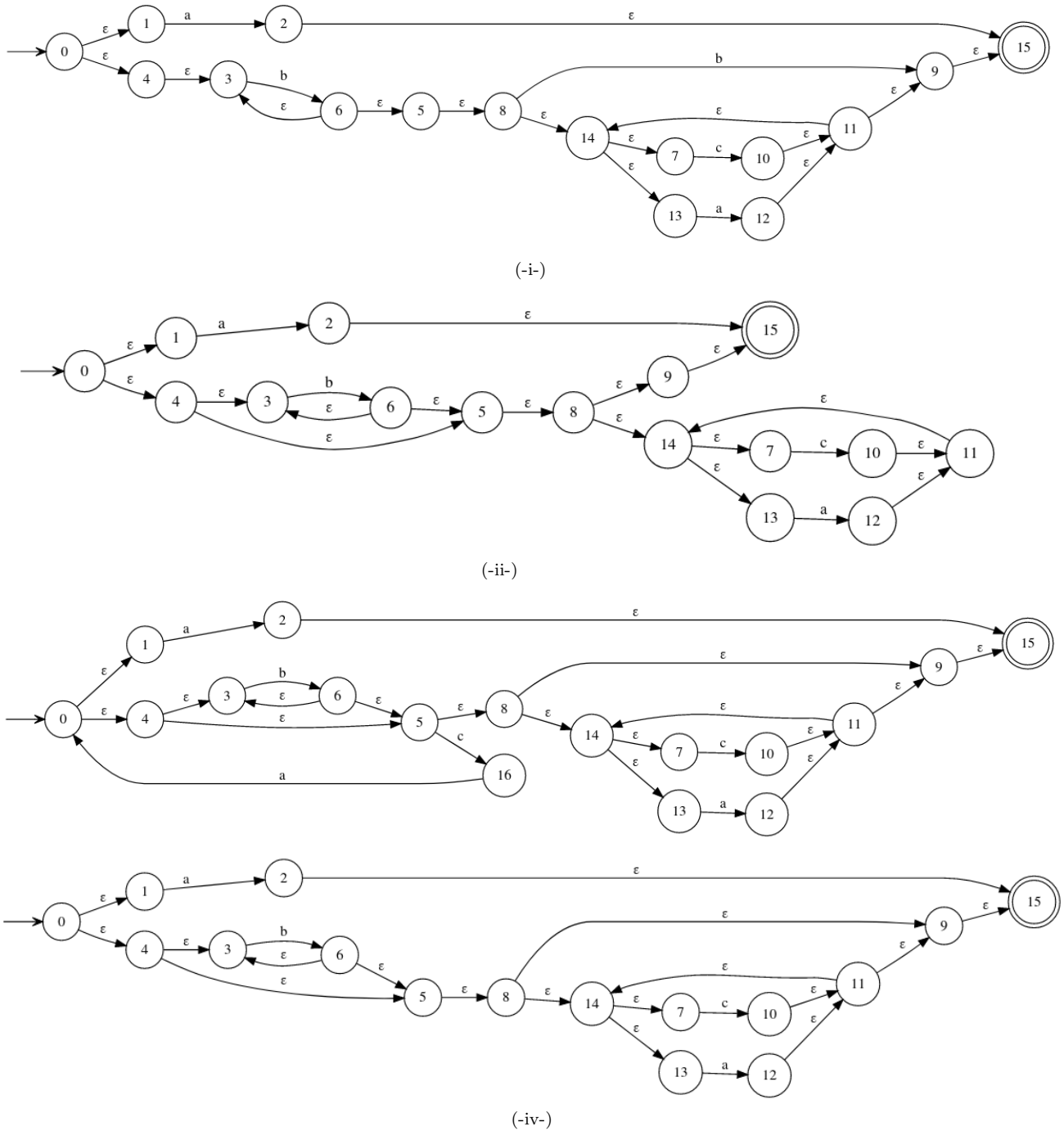
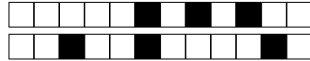


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

	b		d	e

Question 4 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 5 :

	b		d	e		g		i	j

Question 6 :

	b	c	d		f				j	k

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b				f						l	m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

		c	d	e	f	g		i	j	k		m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

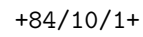
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ A accepte le langage universel.

☐ A possède un état puits

☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ u est accepté par A .

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ A est complet.

☐ A a des états accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

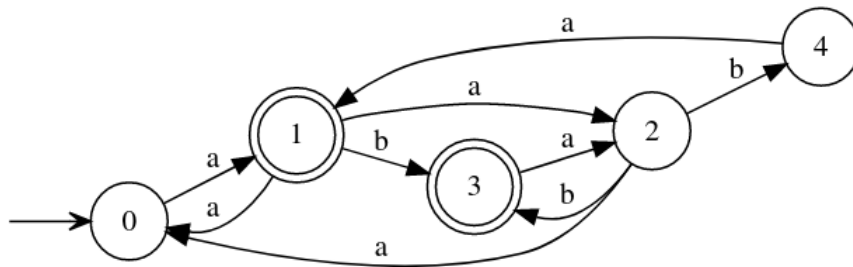
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

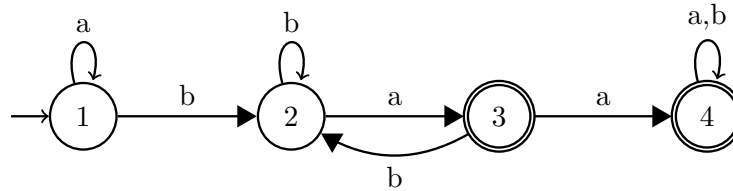
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

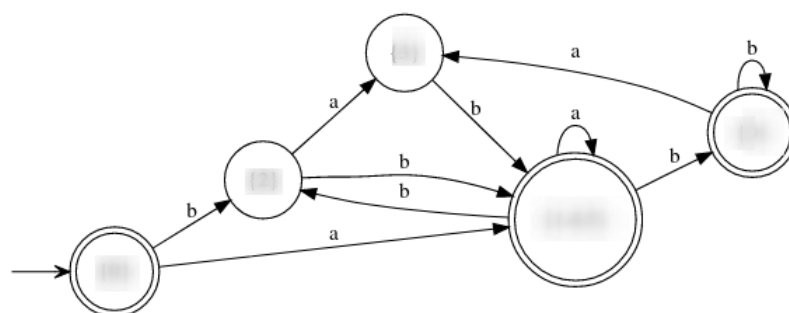
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 3 ☐ c 6 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 1

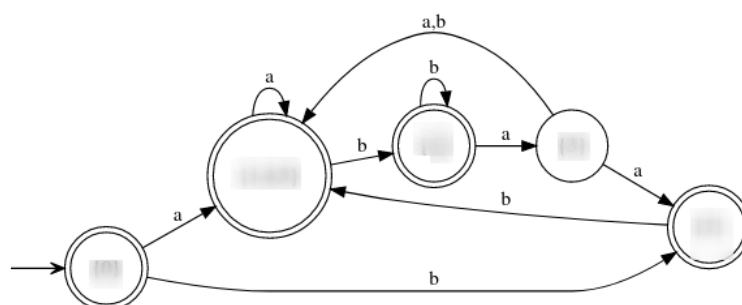
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

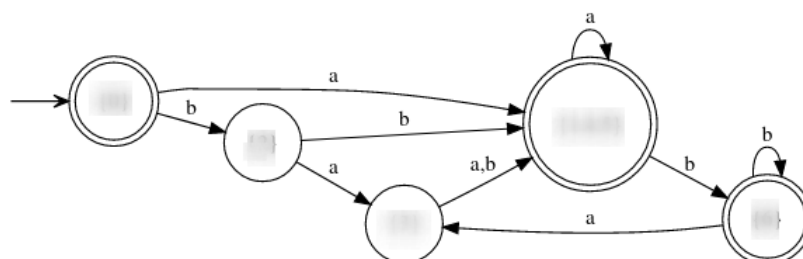
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



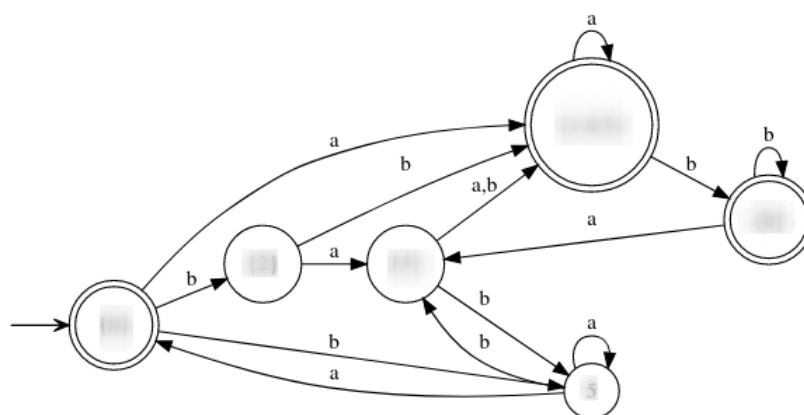
(-i-)



(-ii-)

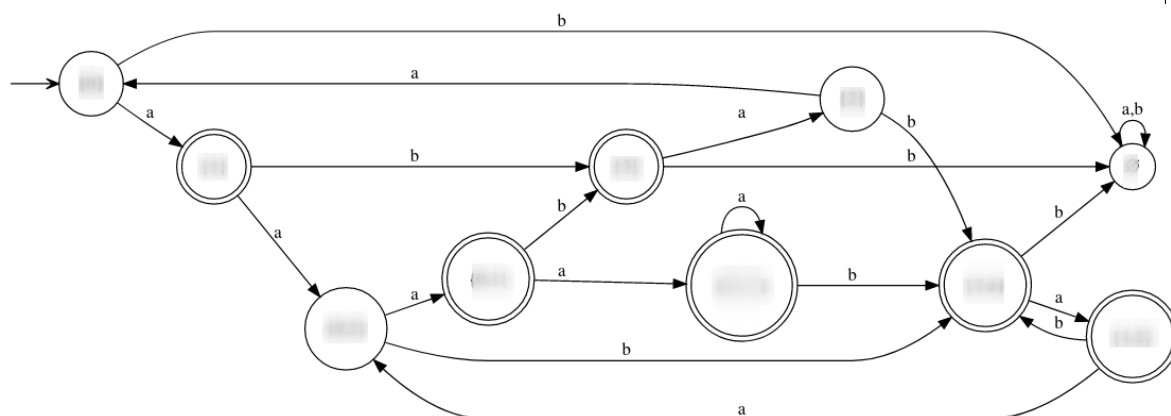


(-iii-)

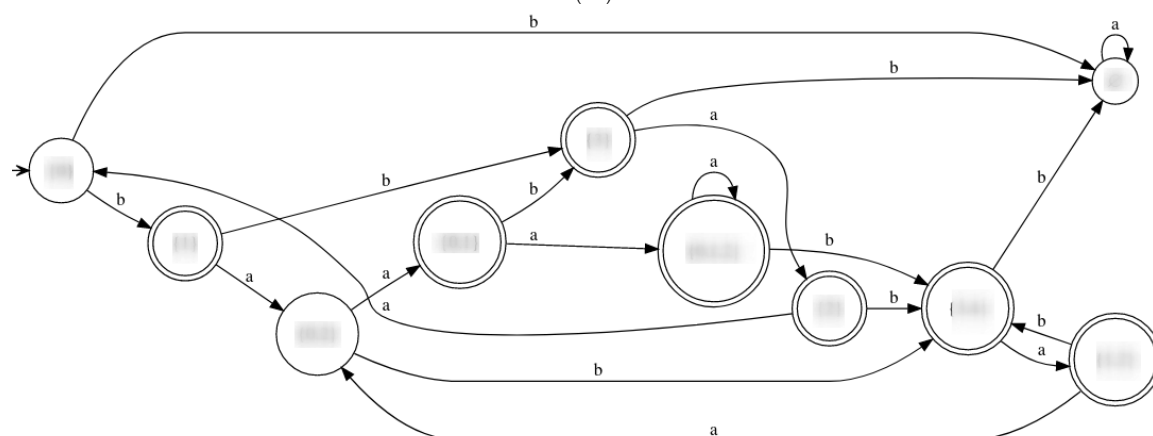


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

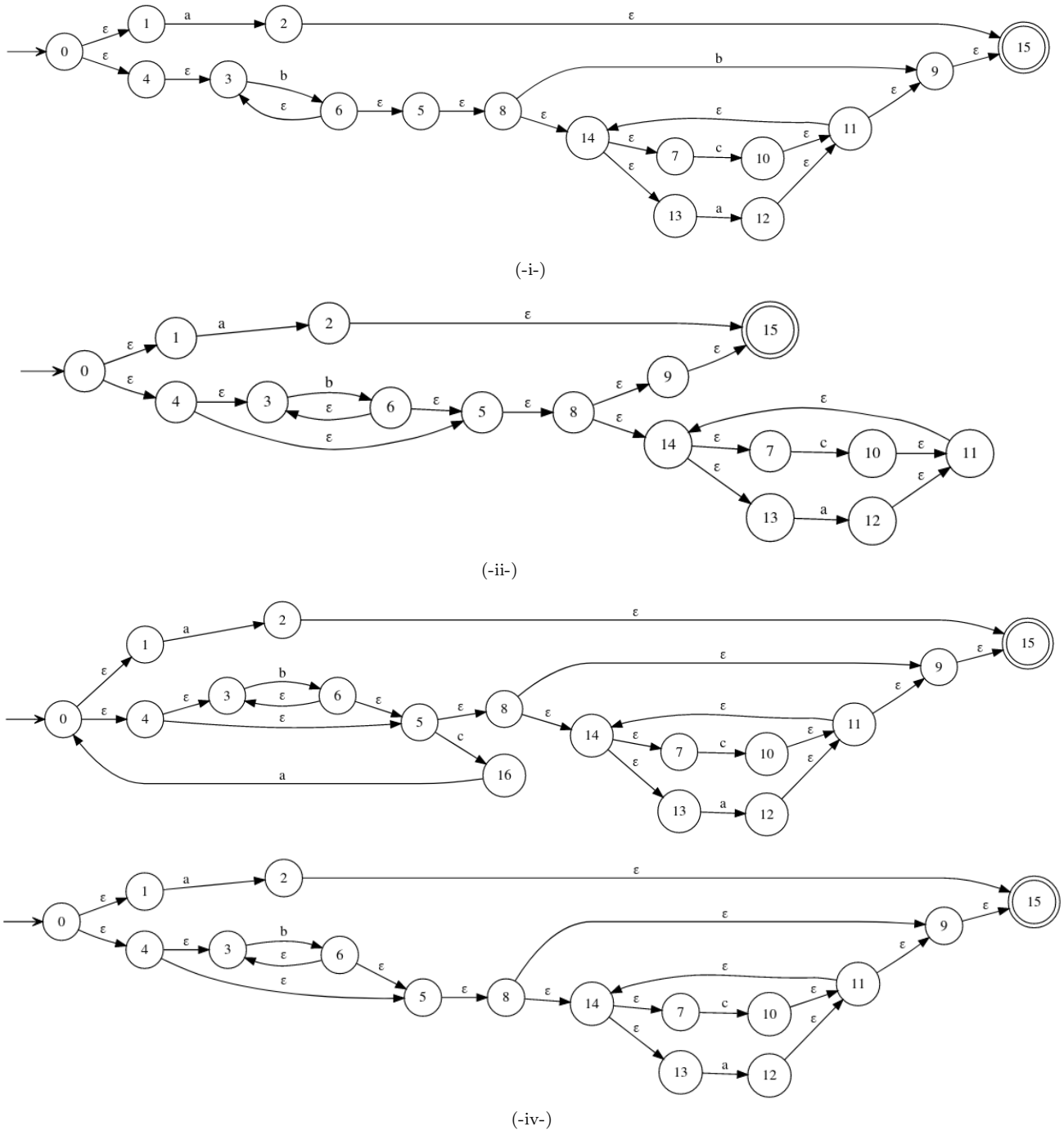


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 :   ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g 

Question 5 :  ☐ b     ☐ g   ☐ j ☐ k  ☐ m ☐ n

Question 6 :    ☐ d  ☐ f ☐ g  ☐ i ☐ j ☐ k

Question 7 :   ☐ c ☐ d ☐ e   ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d 

Question 9 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b  ☐ d

Question 11 :   ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f  ☐ h ☐ i ☐ j  ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e  ☐ g ☐ h

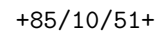
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 :  ☐ b

Question 17 :  ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a u est accepté par A . ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a des états accepteurs.

☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.

☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une fonction.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot peut être infini.

☐ Un mot est une application. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A possède un état puits
☐ c A accepte le langage universel. ☐ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ b A n'a pas d'état accepteur. ☐ c A n'est pas complet.
☐ d A a au moins un état co-accessible. ☐ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ g u n'est pas accepté par A .
☐ h A a au moins un état accessible. ☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Σ^* est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ f Σ est fermé par facteur.
☐ g Σ^* est fermé par suffixe. ☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j					$X_3 = aX_2 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

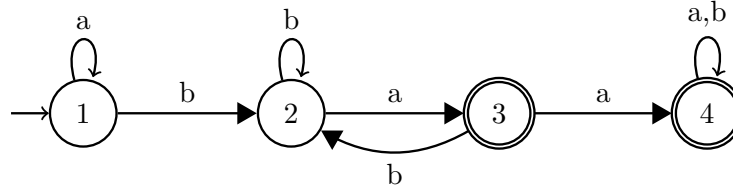
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 0 ☐ d 6 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

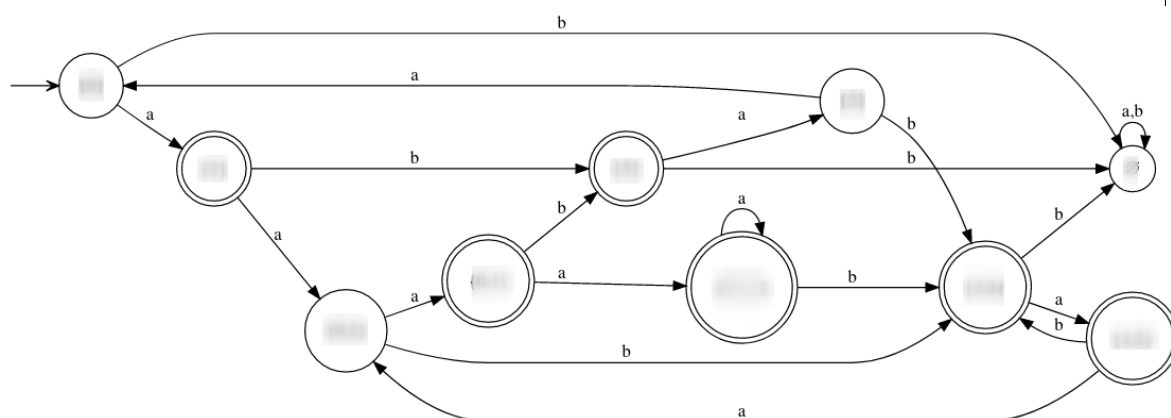


(-iii-)

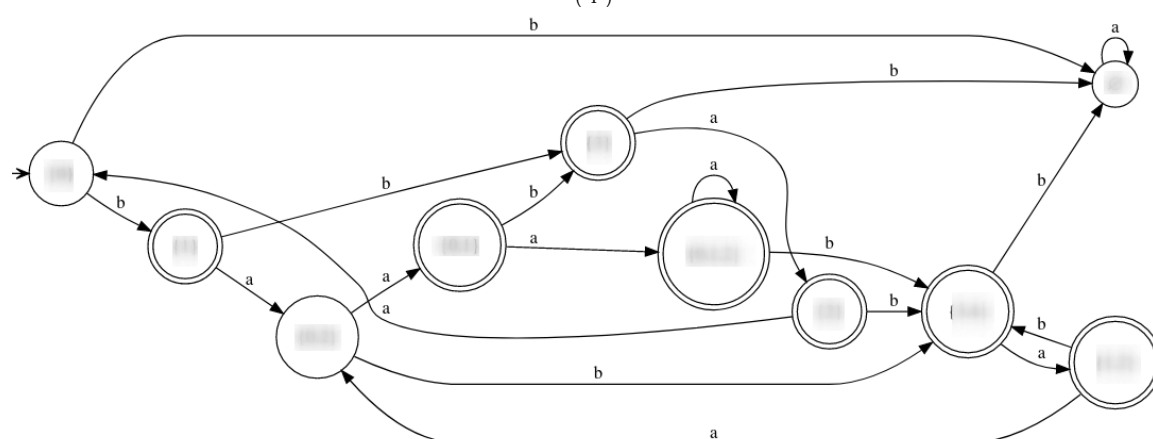


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



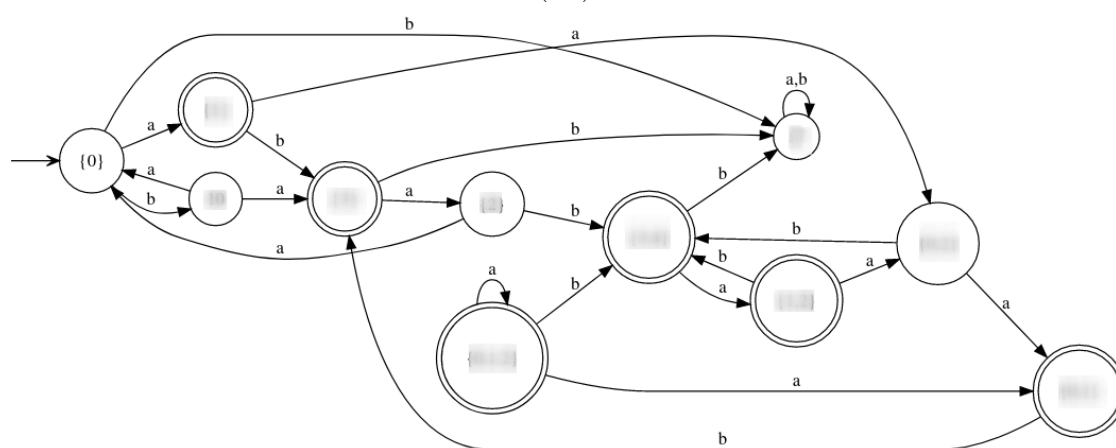
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

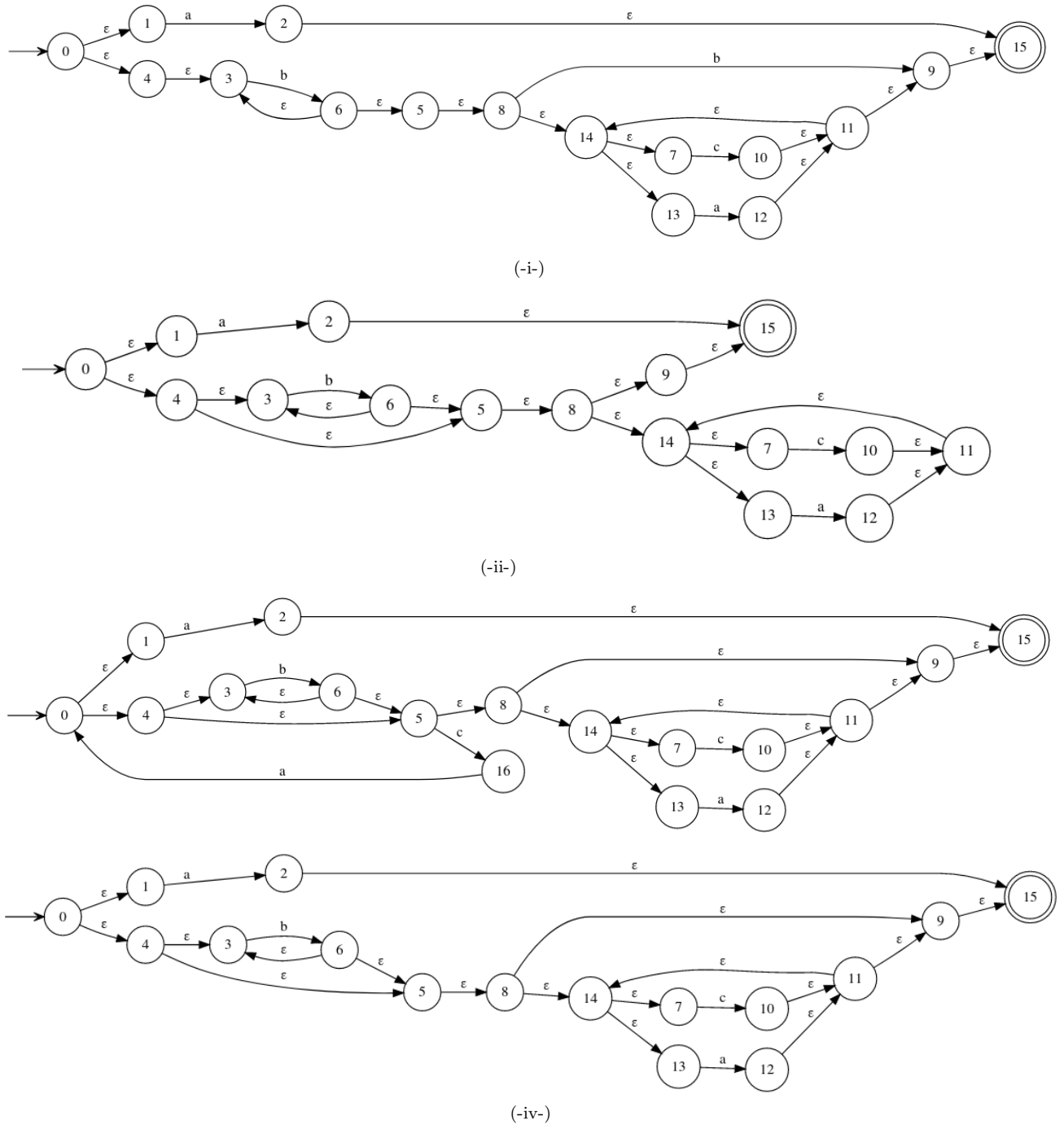


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :  b c   f     k  m n

Question 5 : a b c   f g h i

Question 6 : a b c d 

Question 7 :  b  d  f   i j k

Question 8 :    d e f  h i j

Question 9 : a b c  e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b  d   g h i j  l m

Question 12 : a b c d e  g h

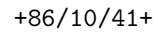
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c A accepte le langage universel. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ d u est accepté par A . ☐ e A est complet.

☐ f A a des états accepteurs.

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ A n'est pas complet. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ d A a au moins un état co-accessible. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot peut être infini. ☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Un mot est une application. ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

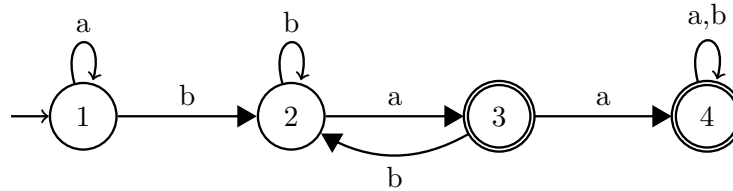
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 2

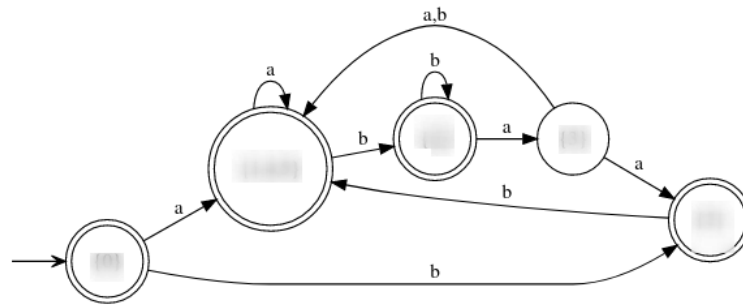
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



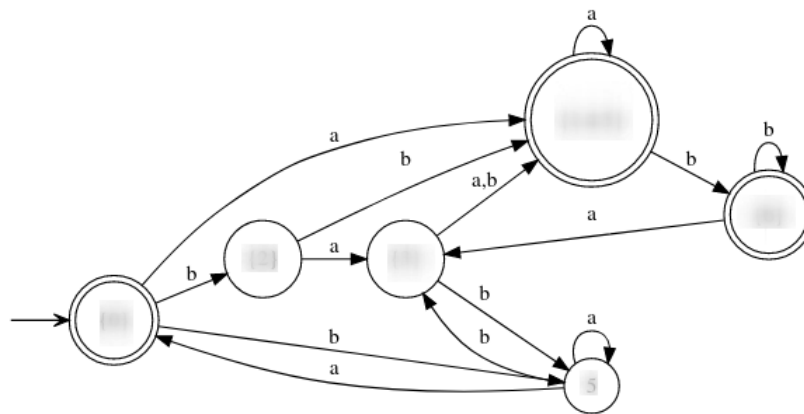
(-i-)



(-ii-)

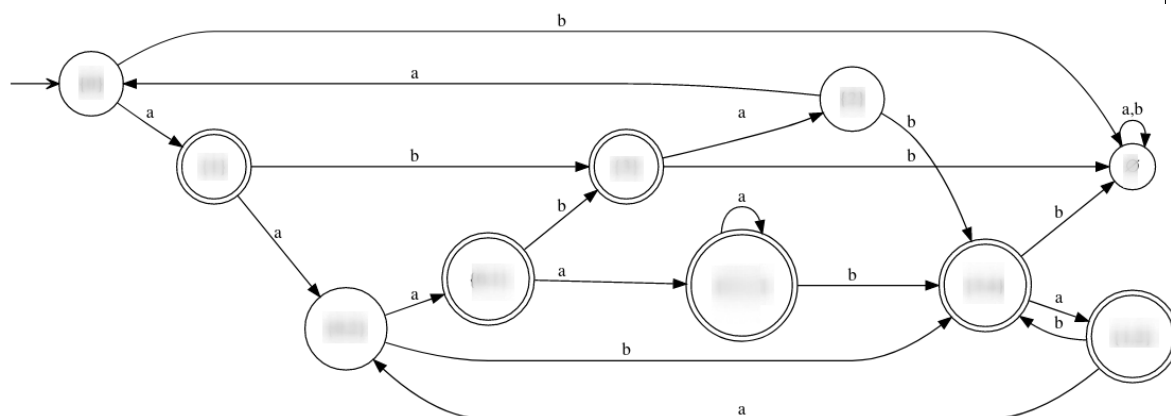


(-iii-)

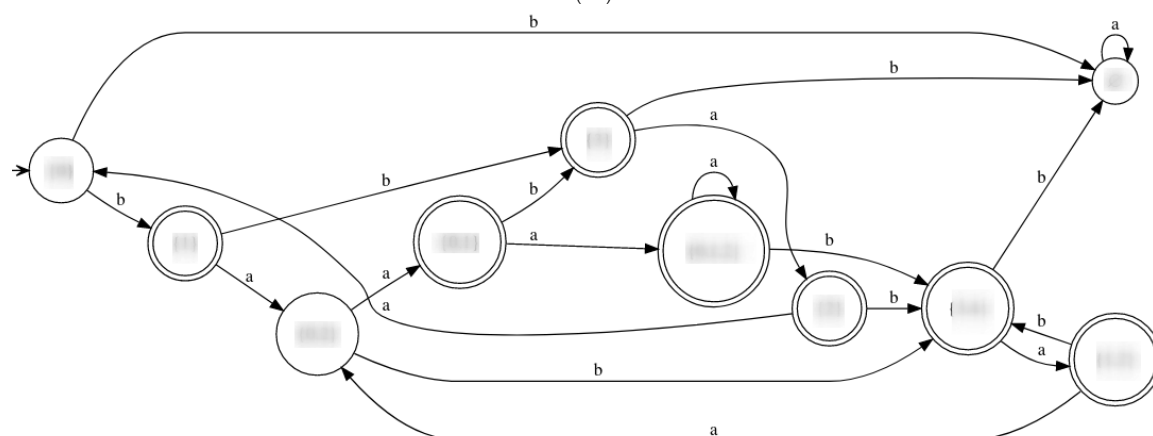


(-iv-)

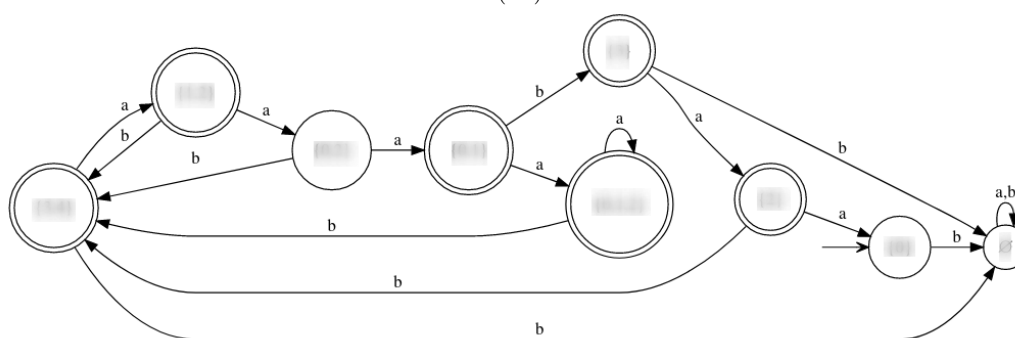
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



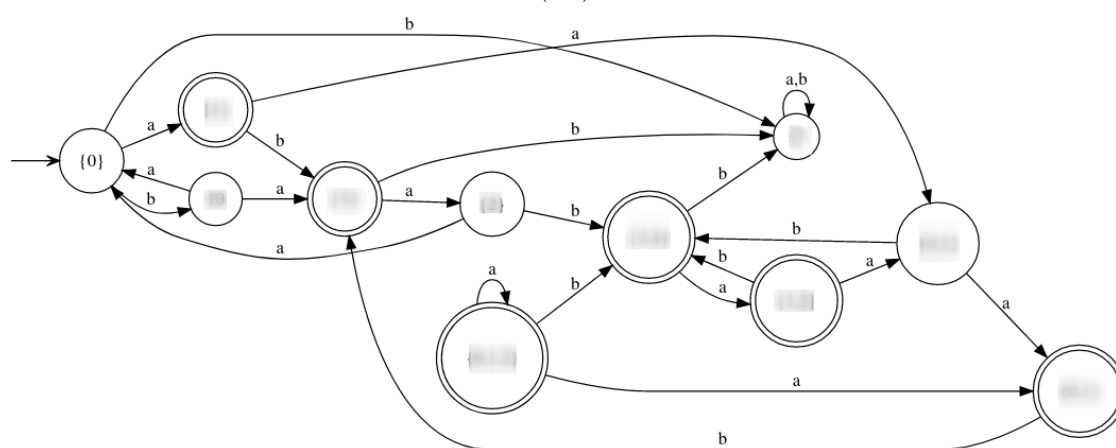
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

			d	e	f			i	j	k

Question 7 :

a	b	c			f			i	j

Question 8 :

a		c		e						k		m	n

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b		d		f	g	h	i	j	k		m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

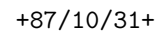
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits

☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ f Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ h A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

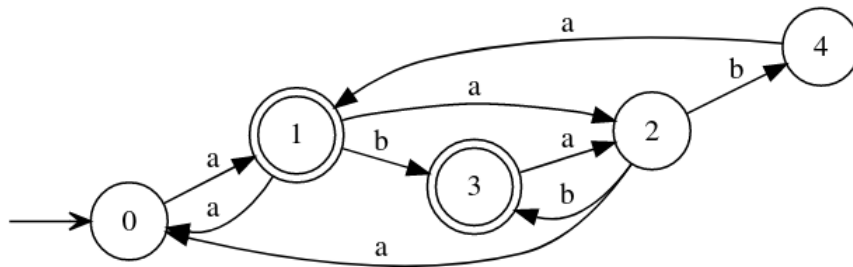
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ b	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

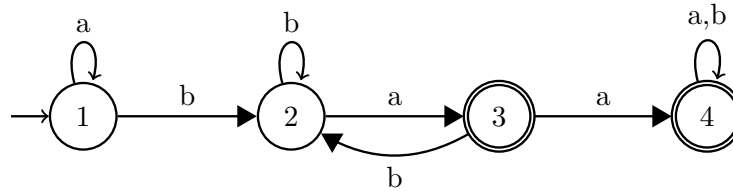
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

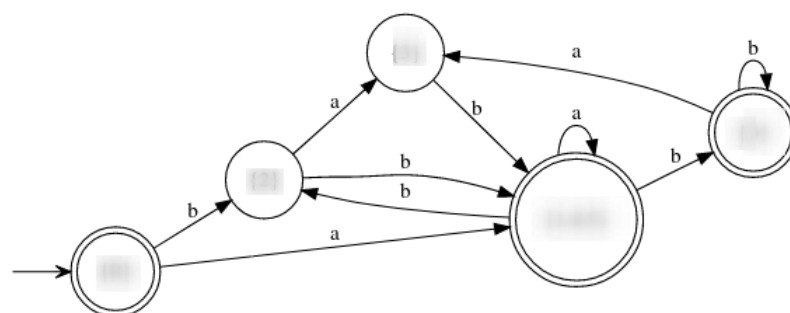
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 0 ☐ f 3 ☐ g 2

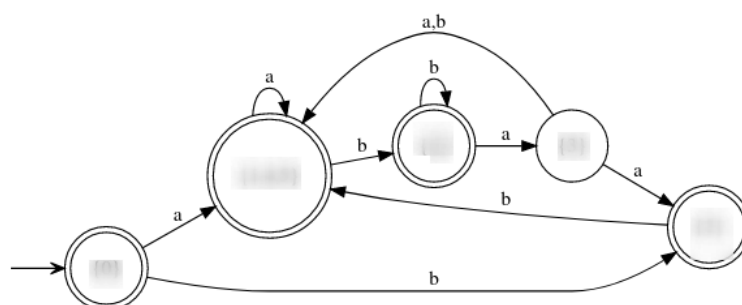
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

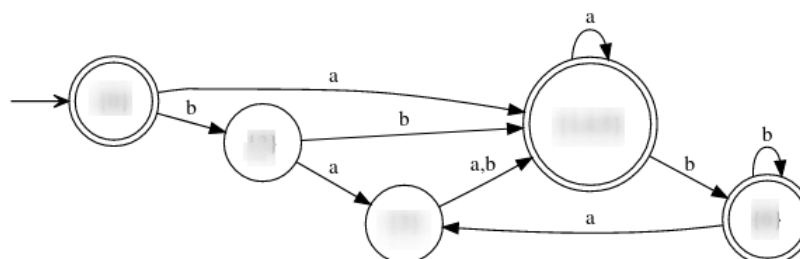
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



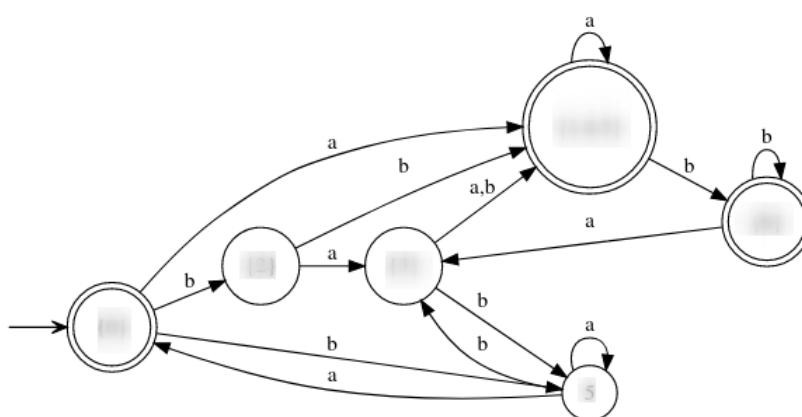
(-i-)



(-ii-)

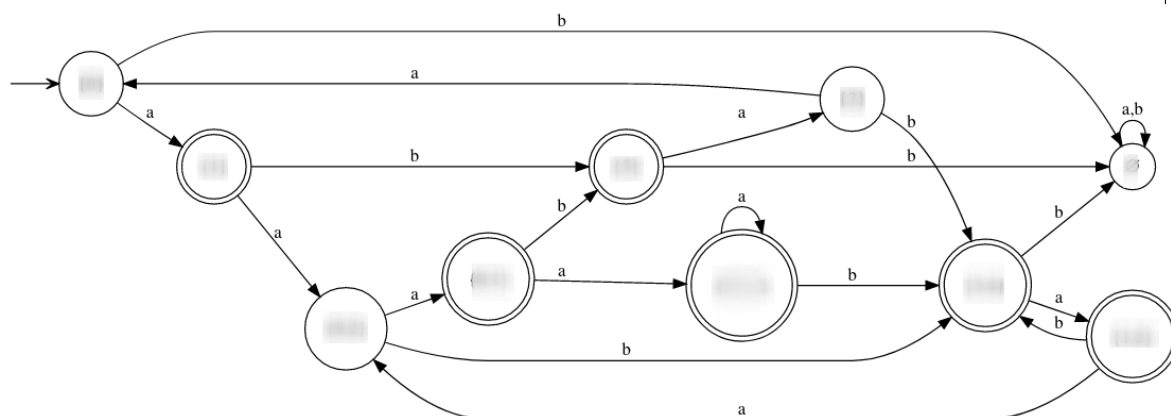


(-iii-)

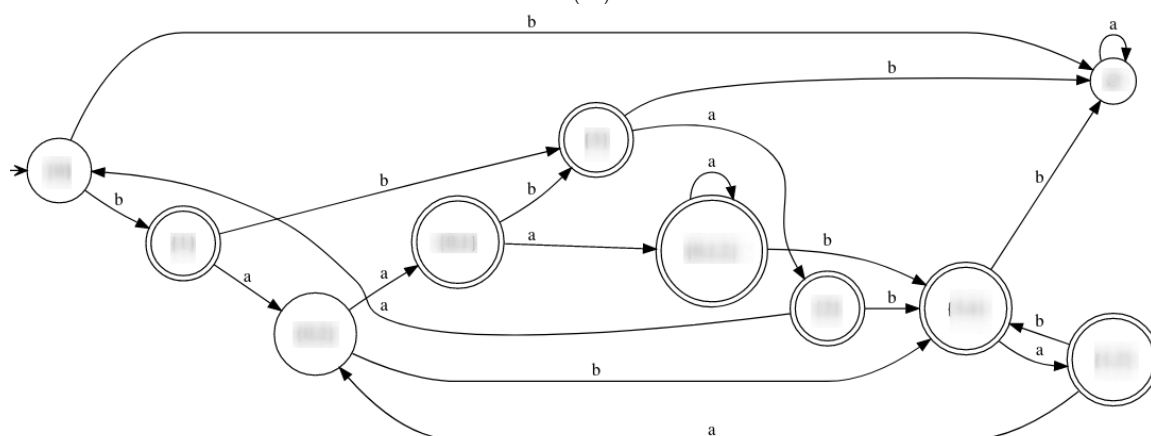


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



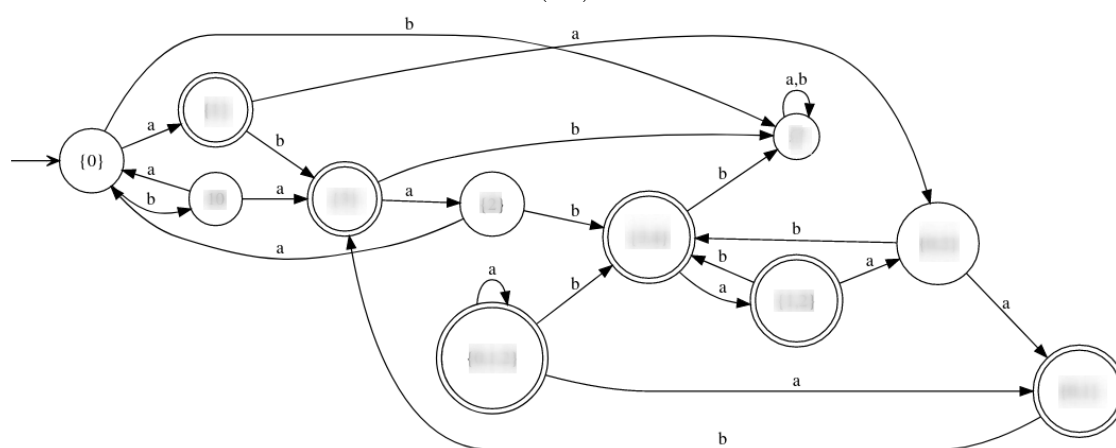
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

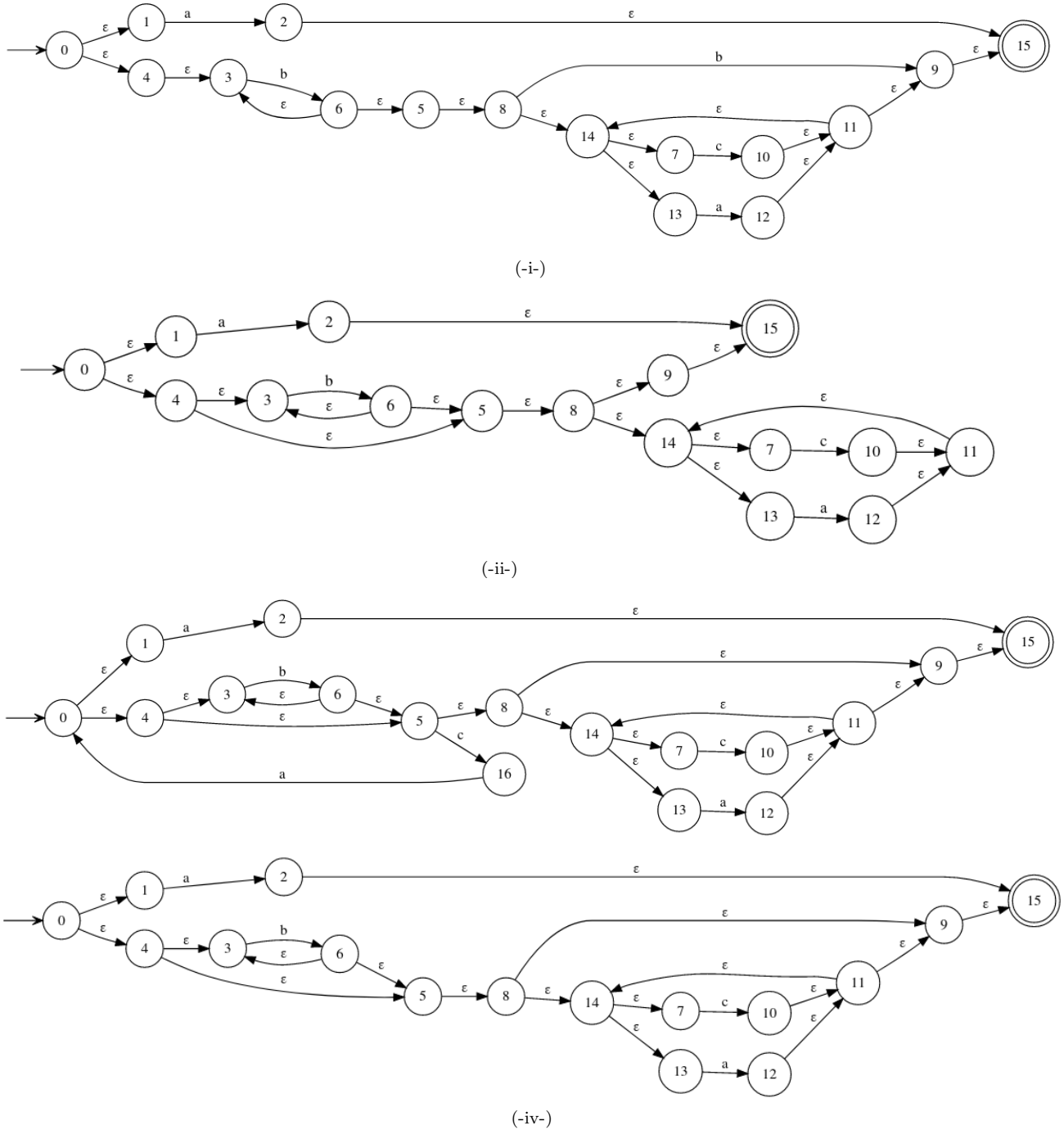
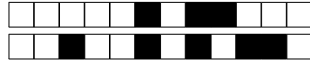


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ h ☐ i

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 5 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 6 : ☐ a ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ ☐ h ☐ ☐ ☐ k ☐ ☐ m ☐ n

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ ☐ j ☐ k

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐ i ☐ ☐ ☐ l ☐

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

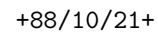
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐	☐ g Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	☐ h Un mot peut être infini.
☐	Un mot est une application.	☐	☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .		
☐	A a au moins un état accessible.	☐	$u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐	☐ d A n'a pas d'état accepteur.		
☐	☐ e A a au moins un état non co-accessible.	☐	A n'est pas complet.
☐	☐ g A a au moins un état non accessible.	☐	☐ h A a au moins un état co-accessible.
☐	☐	☐	u n'est pas accepté par A .
☐	☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.		
☐	☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.		

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐	☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐	☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐	☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐	☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d A accepte le langage universel. ☐ e A possède un état puits
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-.
- ☐ b la Figure 3-iv-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-.
- ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-.
- ☐ b la Figure 4-iii-.
- ☐ la Figure 4-i-.
- ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

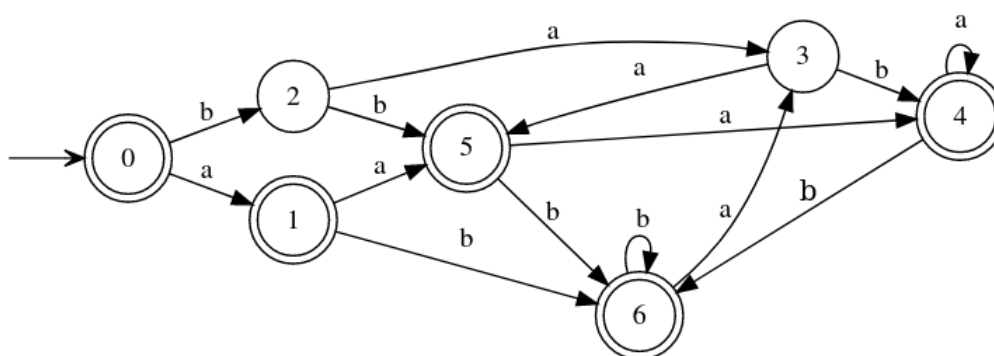
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

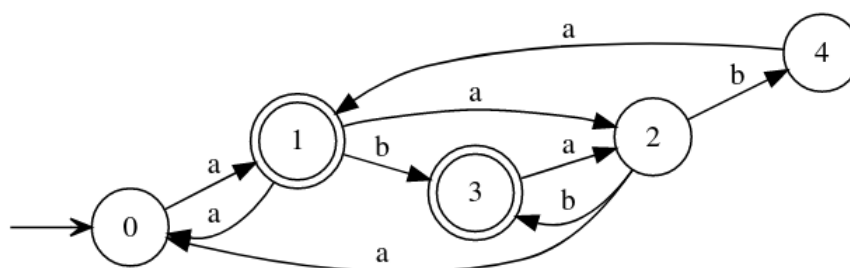
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

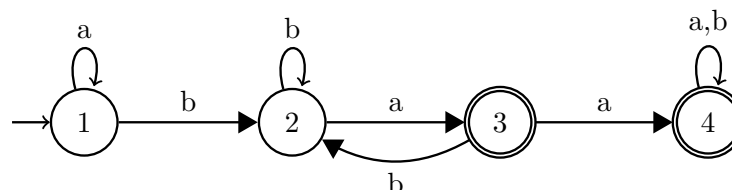
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

- ☐ a 0 ☐ b 1 ☐ c 2 ☒ d 4 ☐ e 5 ☐ f 3 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

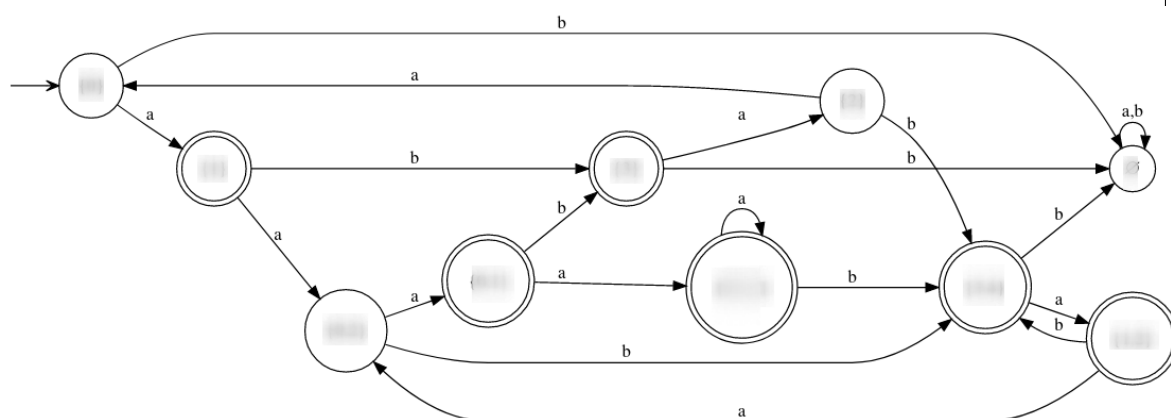


(-iii-)

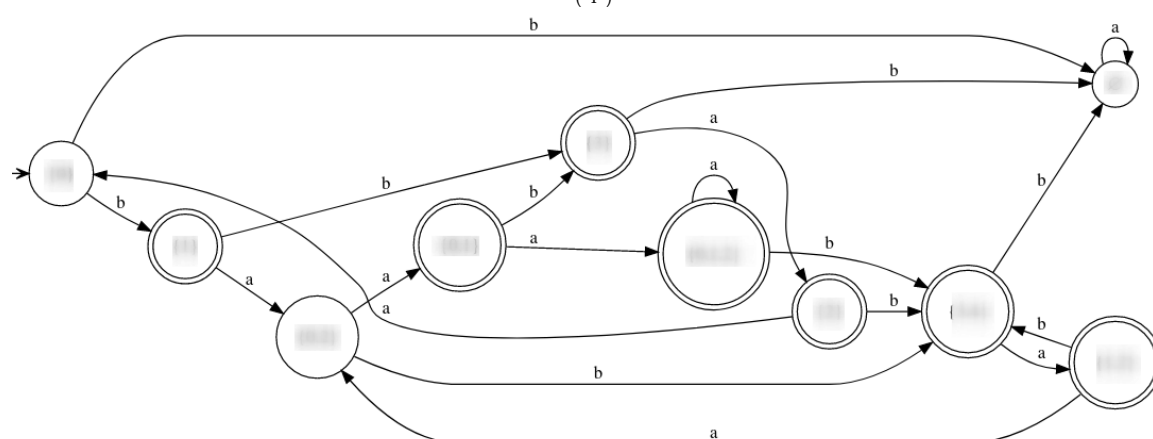


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

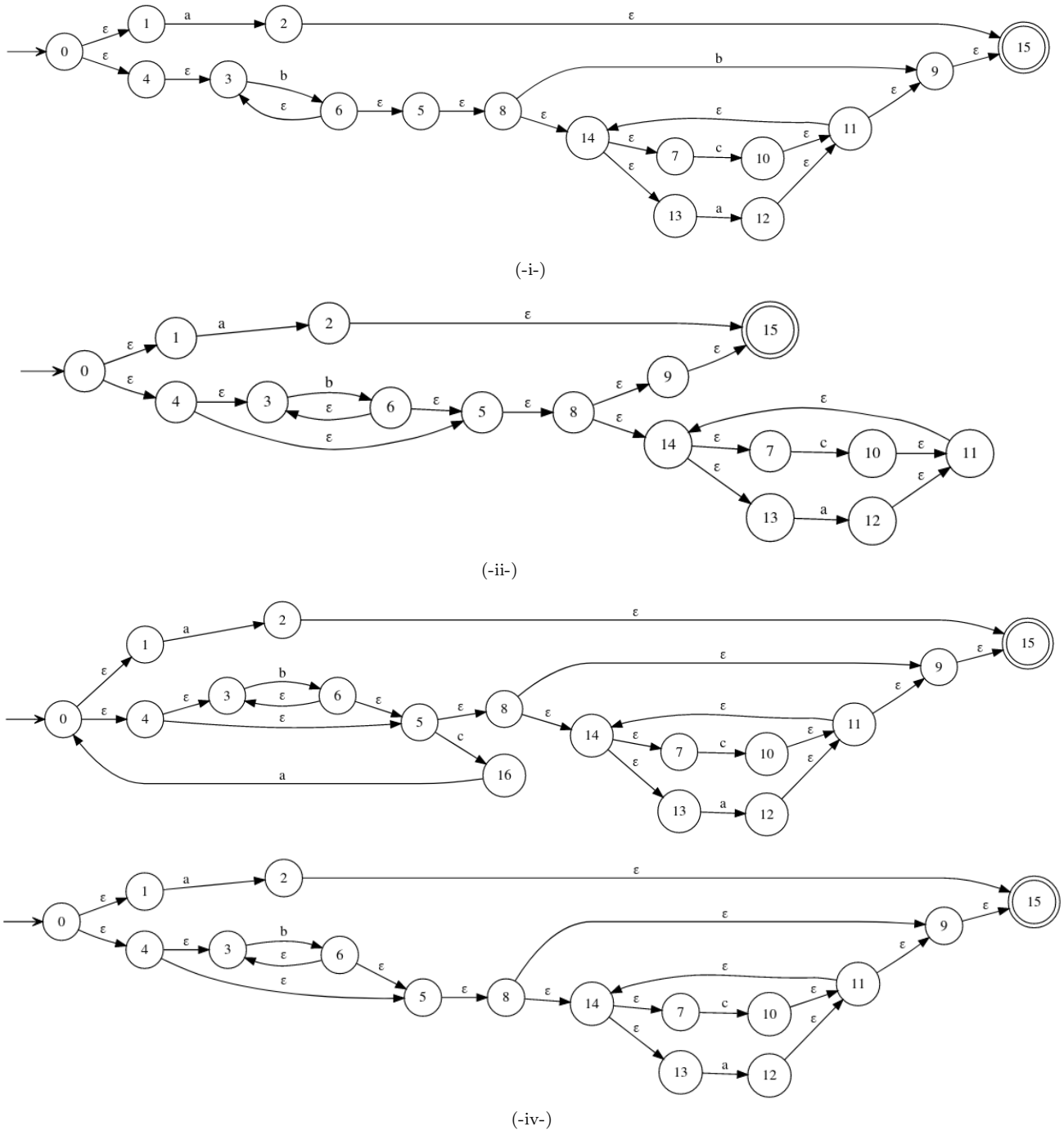
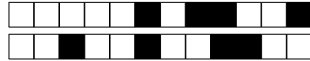


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :       g h  j  l m n

Question 3 :    d e  g h  j k

Question 4 : a b c d 

Question 5 :   c d e

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :   c d  f g  i j

Question 8 : a   d e f g h i

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a b  d e f g h    l m

Question 12 : a b c d  f g h

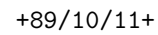
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ b Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ e Un mot peut être vide. ☒ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ g Un mot est une application. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ i Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ j Un mot est une fonction.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
	☐ $X_4 = a + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^+aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^+aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

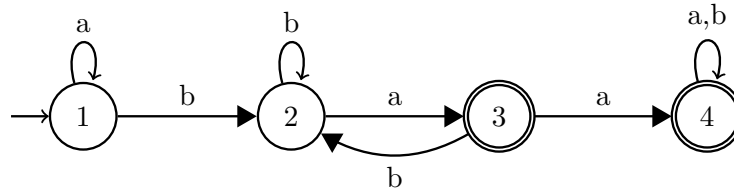
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 0 ☐ c 2 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

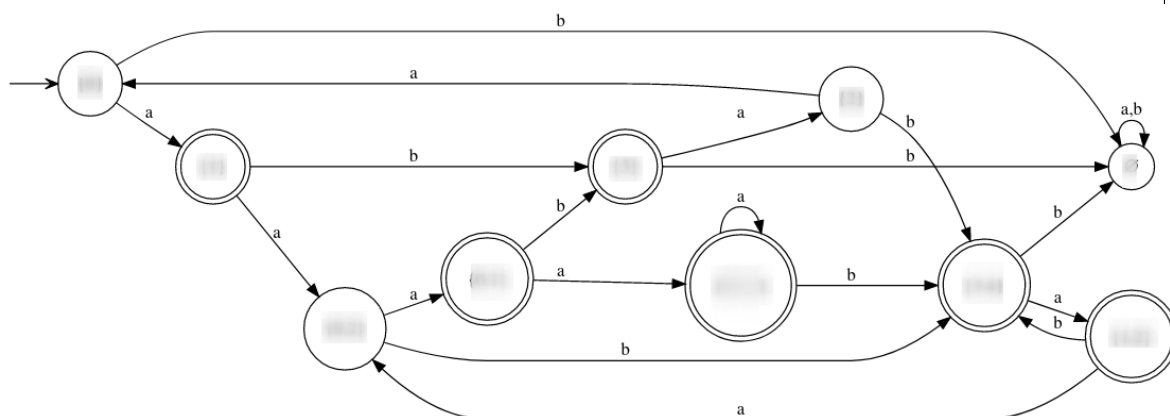


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

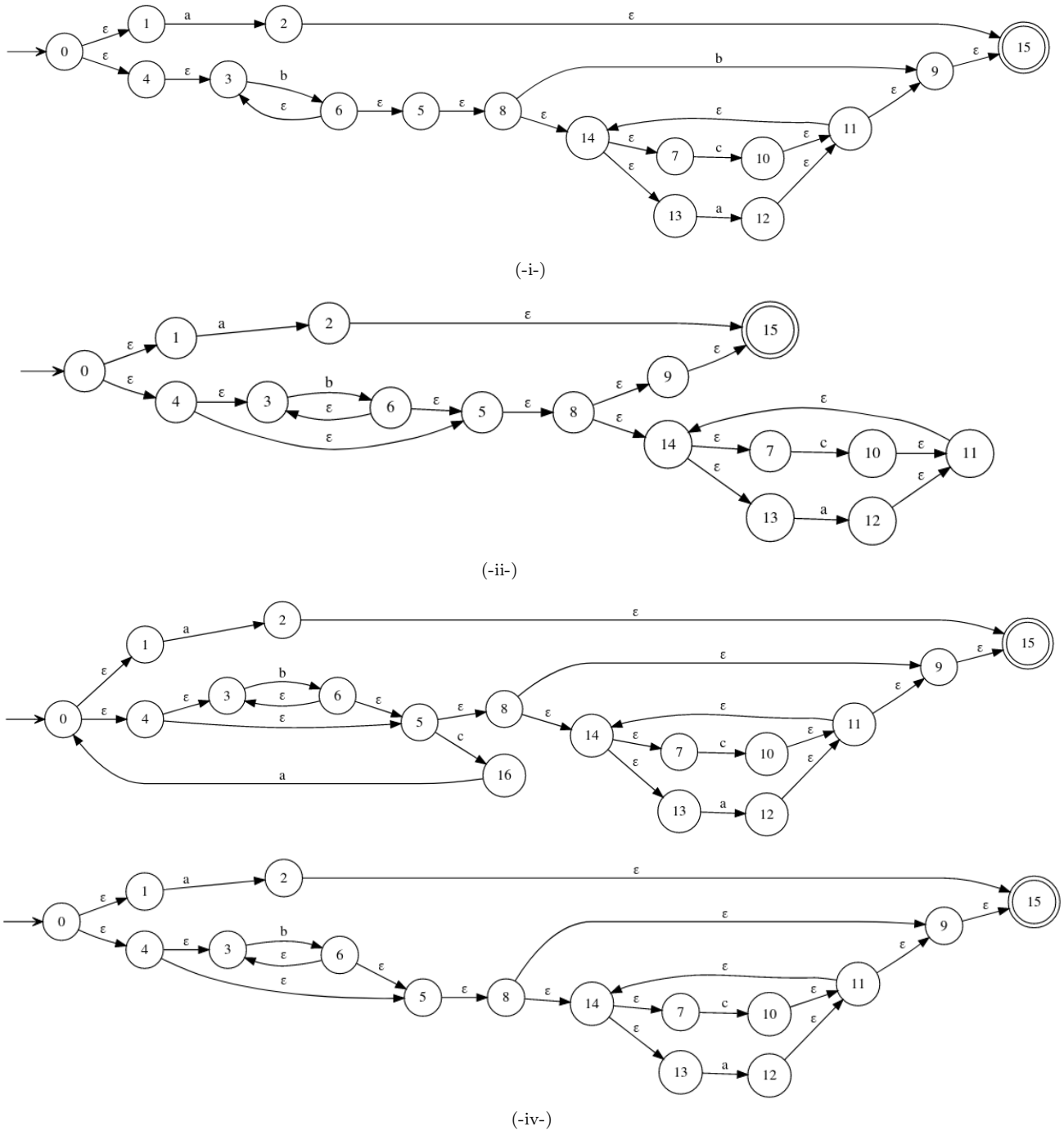
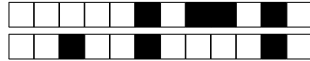


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

			d				h			k	l	m	n

Question 5 :

		c		e		g	h		j	k

Question 6 :

a	b	c					h	i	j

Question 7 :

a	b		d	e		g	h	i

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d		f	g	h	i			l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

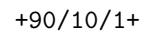
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être infini.

☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Un mot est une application. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u est accepté par A . ☐ A a des états accepteurs.

☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u $\notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ i A a au moins un état co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_4 = (a+b)X_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a+b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

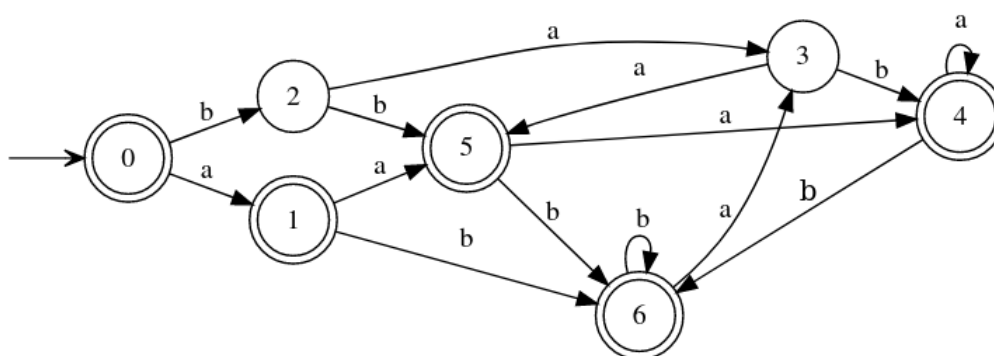
☐ a	$X_3 = a(a+b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

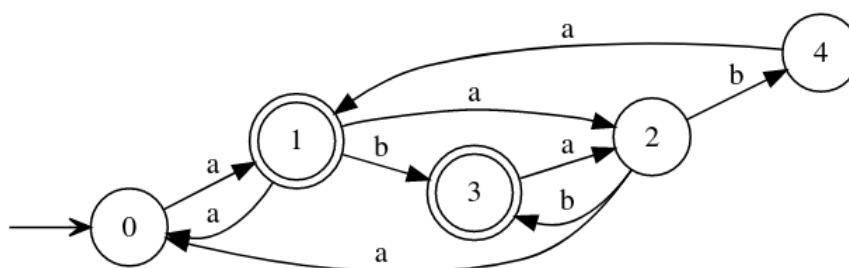
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

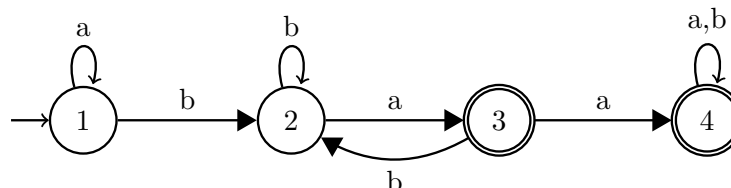
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 6 ☐ c 2 ☒ d 4 ☐ e 3 ☐ f 0 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

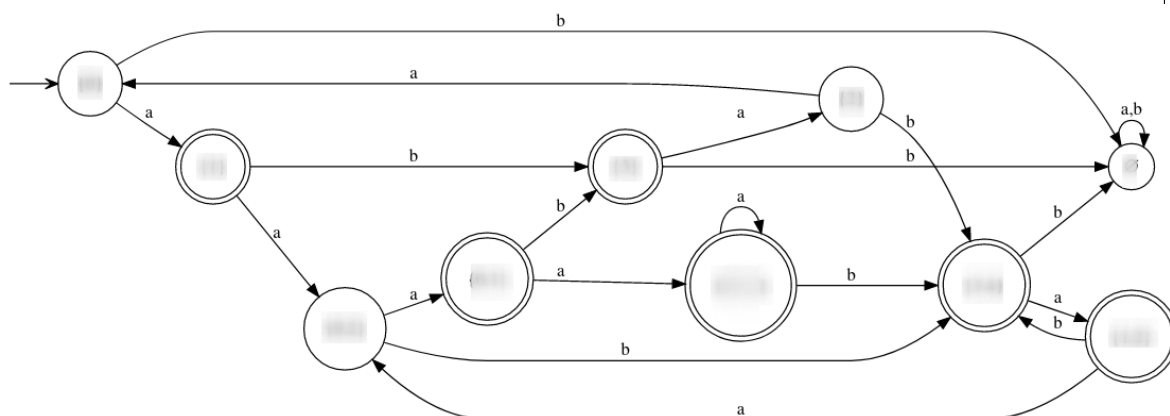


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 :    d  f  h i    m n

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c d 

Question 6 :  b c d     i j k

Question 7 : a b  d e f  h i

Question 8 : a   d e   h i j

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a b c     h i j k l m

Question 12 : a b c d  f g h

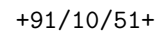
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f A possède un état puits ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'est pas complet. ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
☐ c Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ d $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ e A a au moins un état accessible. ☐ f u n'est pas accepté par A .
☐ g A a au moins un état non accessible. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.

- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par facteur.
- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

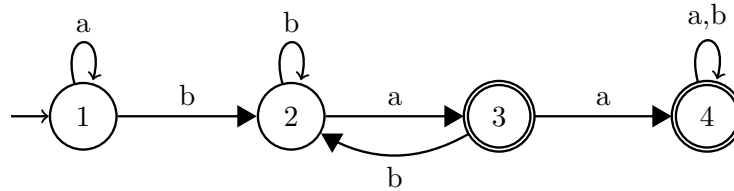
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 3 ☐ d 5 ☐ e 6 ☐ f 0 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

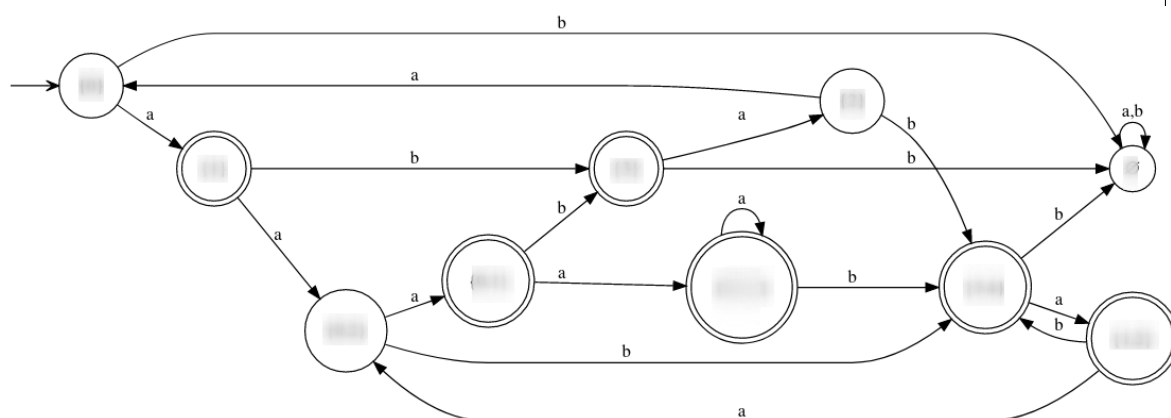


(-iii-)

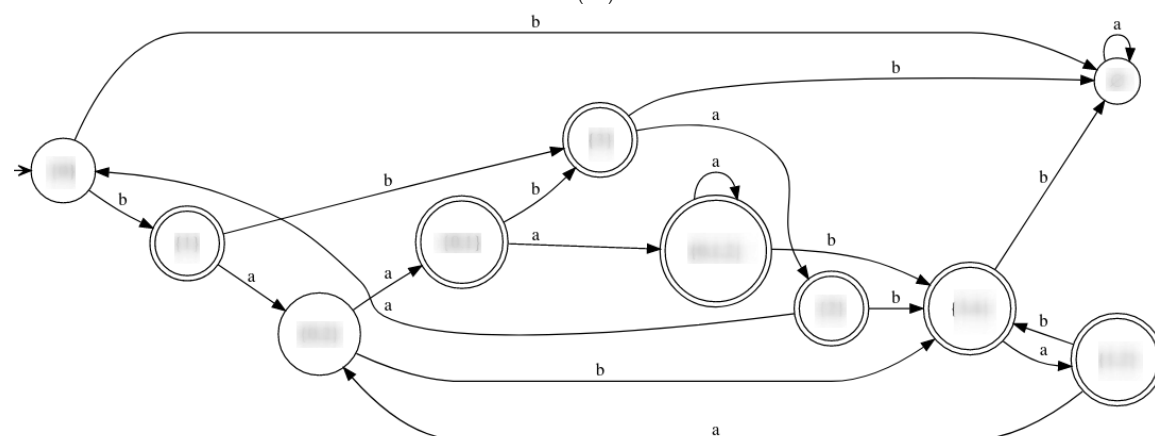


(-iv-)

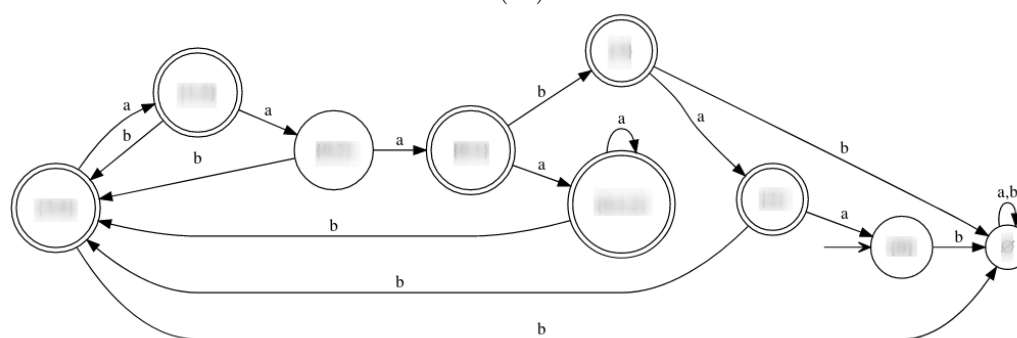
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



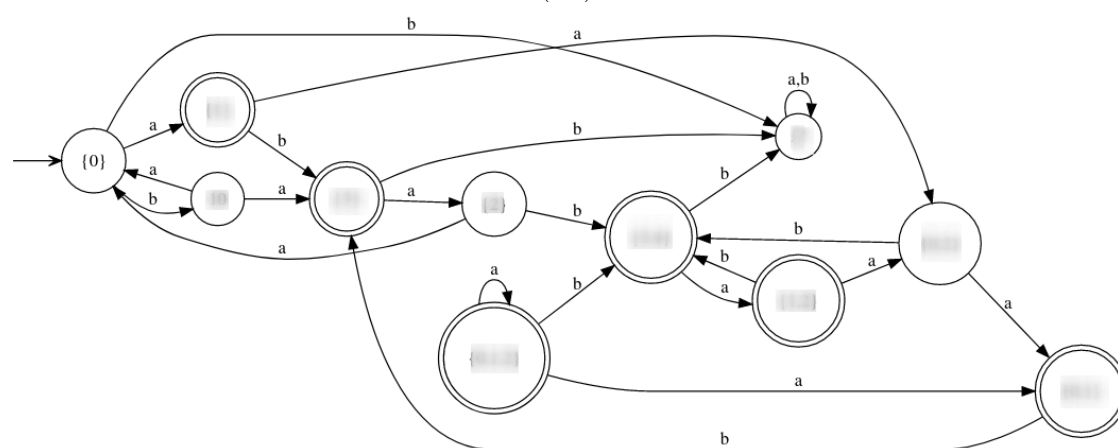
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

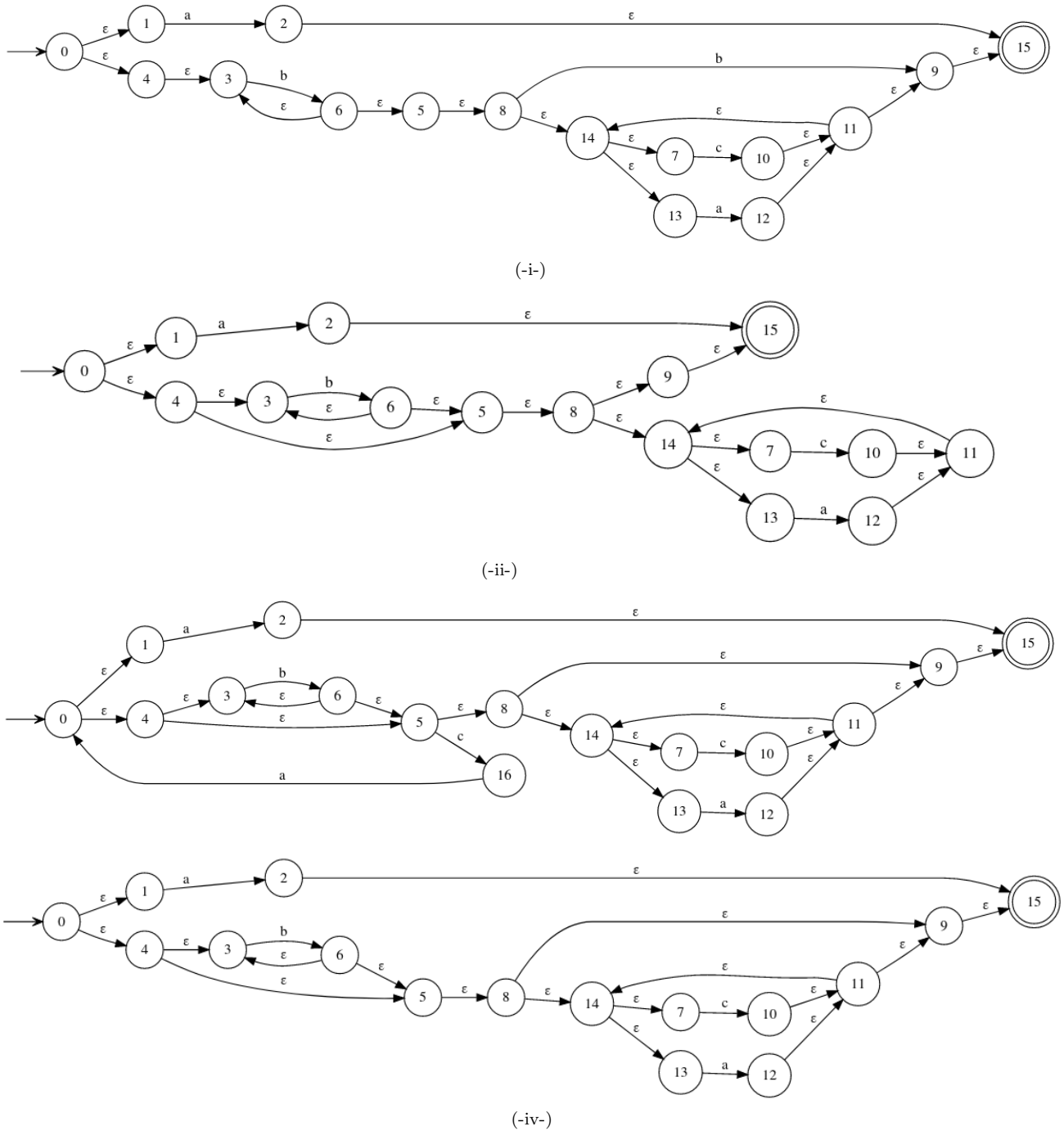


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 3 :

	b					g	h	i	j	k

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

	b		d	e

Question 6 :

a				e	f		h	i	j

Question 7 :

		c		e						k	l	m	n

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

		c	d	e	f	g	h			k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

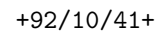
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ f A possède un état puits
- ☐ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être vide. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ i Un mot peut être infini. ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot est une application. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e u est accepté par A . ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

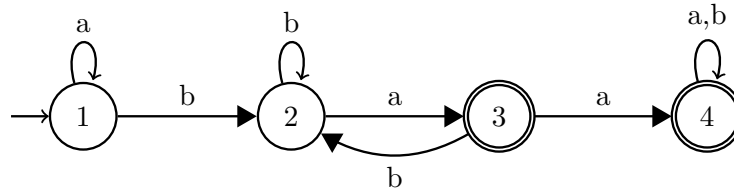
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

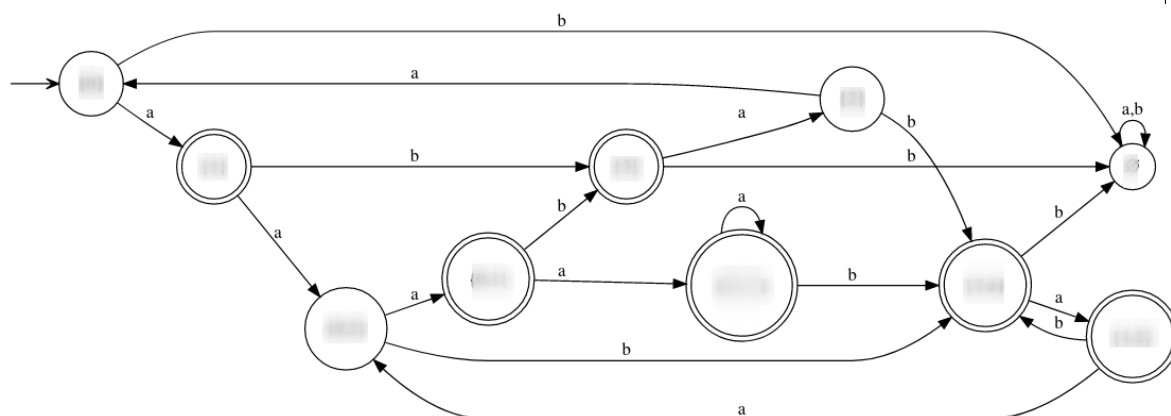


(-iii-)

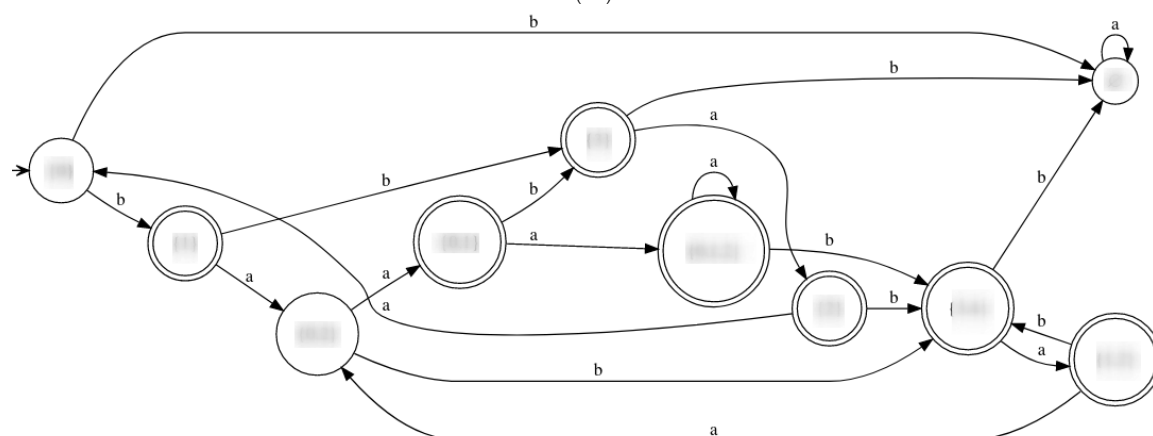


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

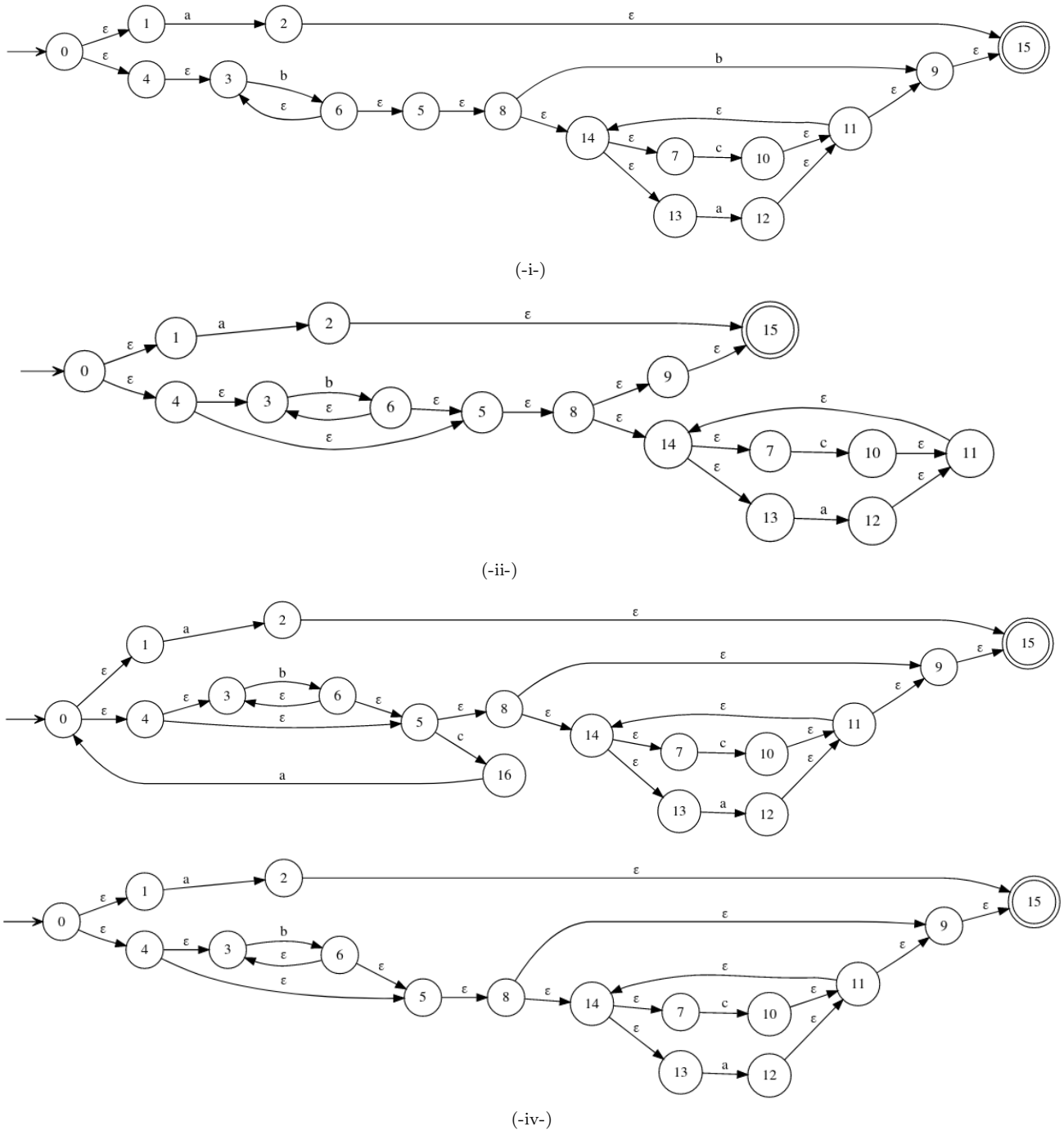


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e   h i j

Question 3 :  b  d e   i j k

Question 4 :  b  d e

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a b c d  f  h i

Question 7 :  b     i j  l m n

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a  c d e  g h   k l m

Question 12 : a b c d  f g h

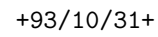
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.
☐ e A est complet. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☒ c A a au moins un état accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☒ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ g u n'est pas accepté par A . ☒ h A n'est pas complet. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A possède un état puits
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g
		$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$	
☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

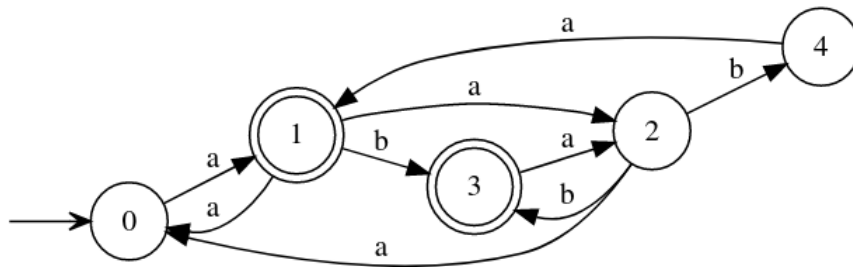
☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

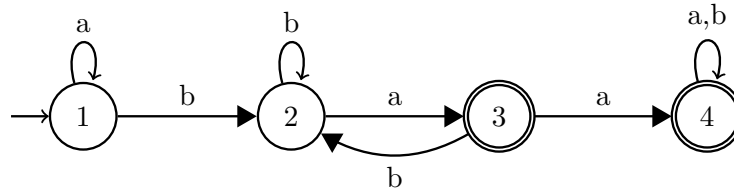
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

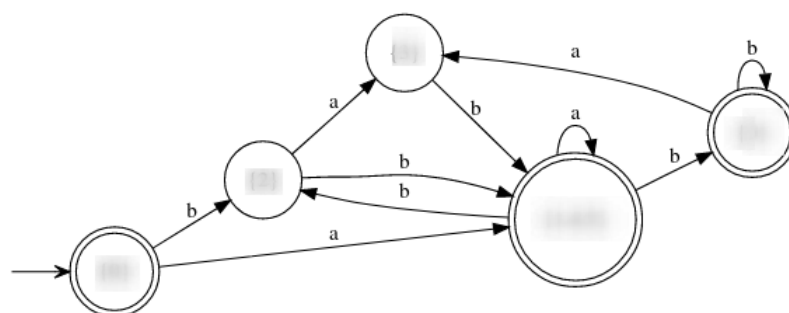
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 0 ☐ d 6 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 5

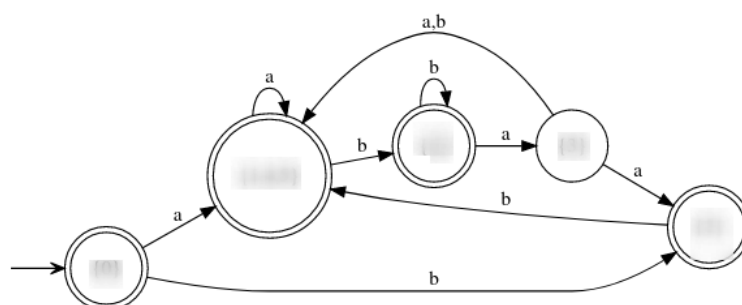
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

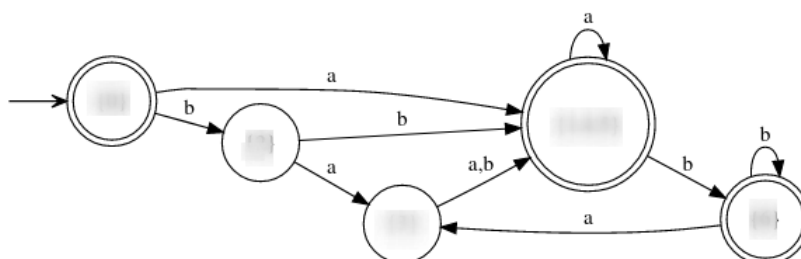
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



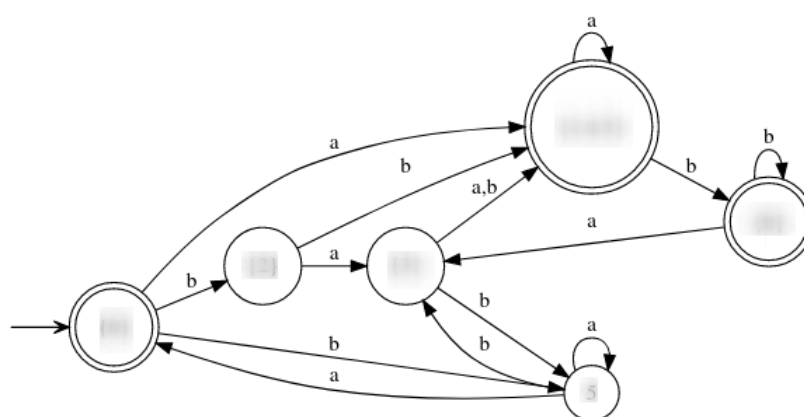
(-i-)



(-ii-)

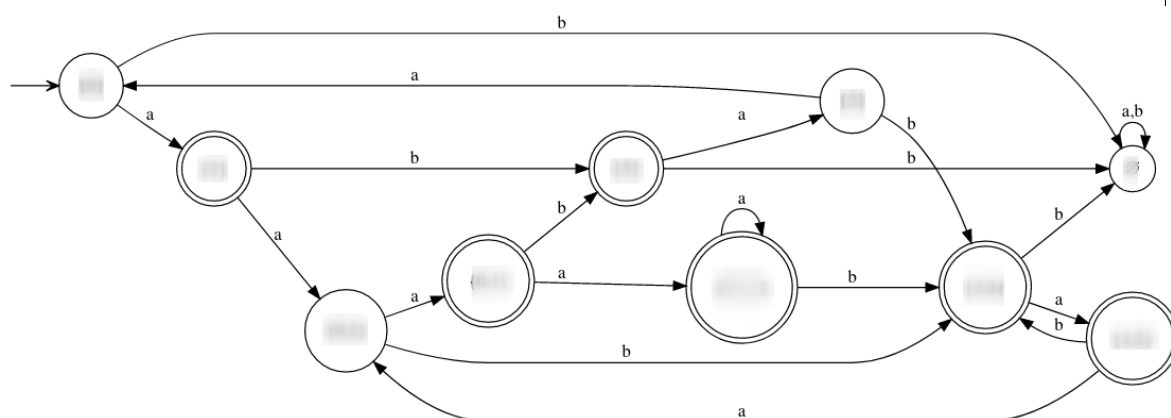


(-iii-)

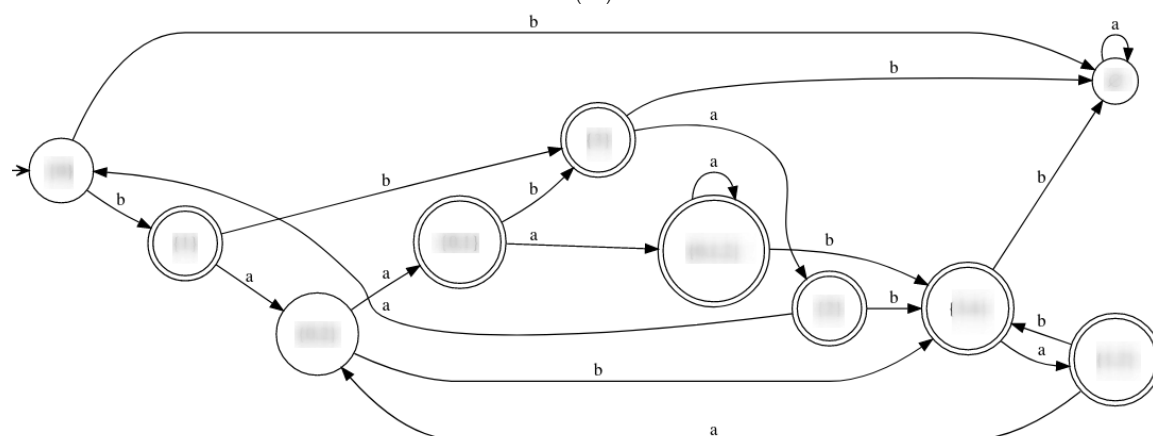


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



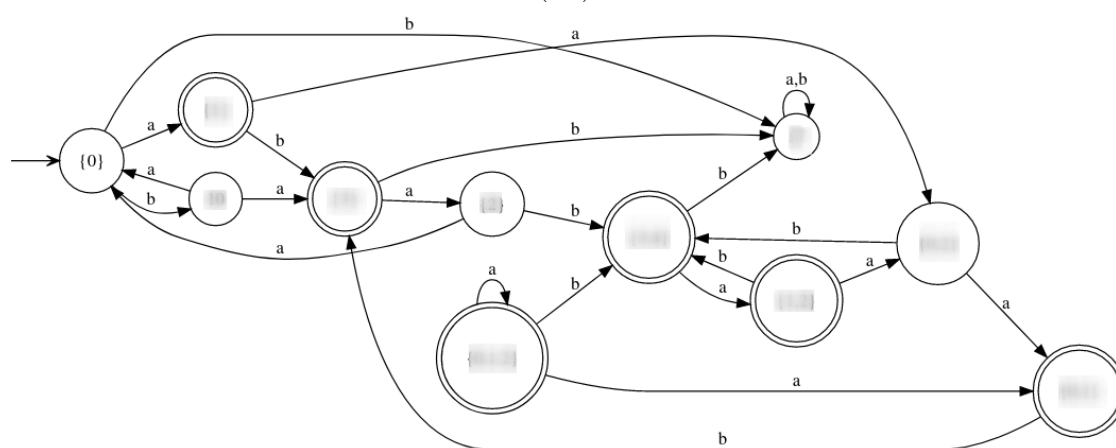
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

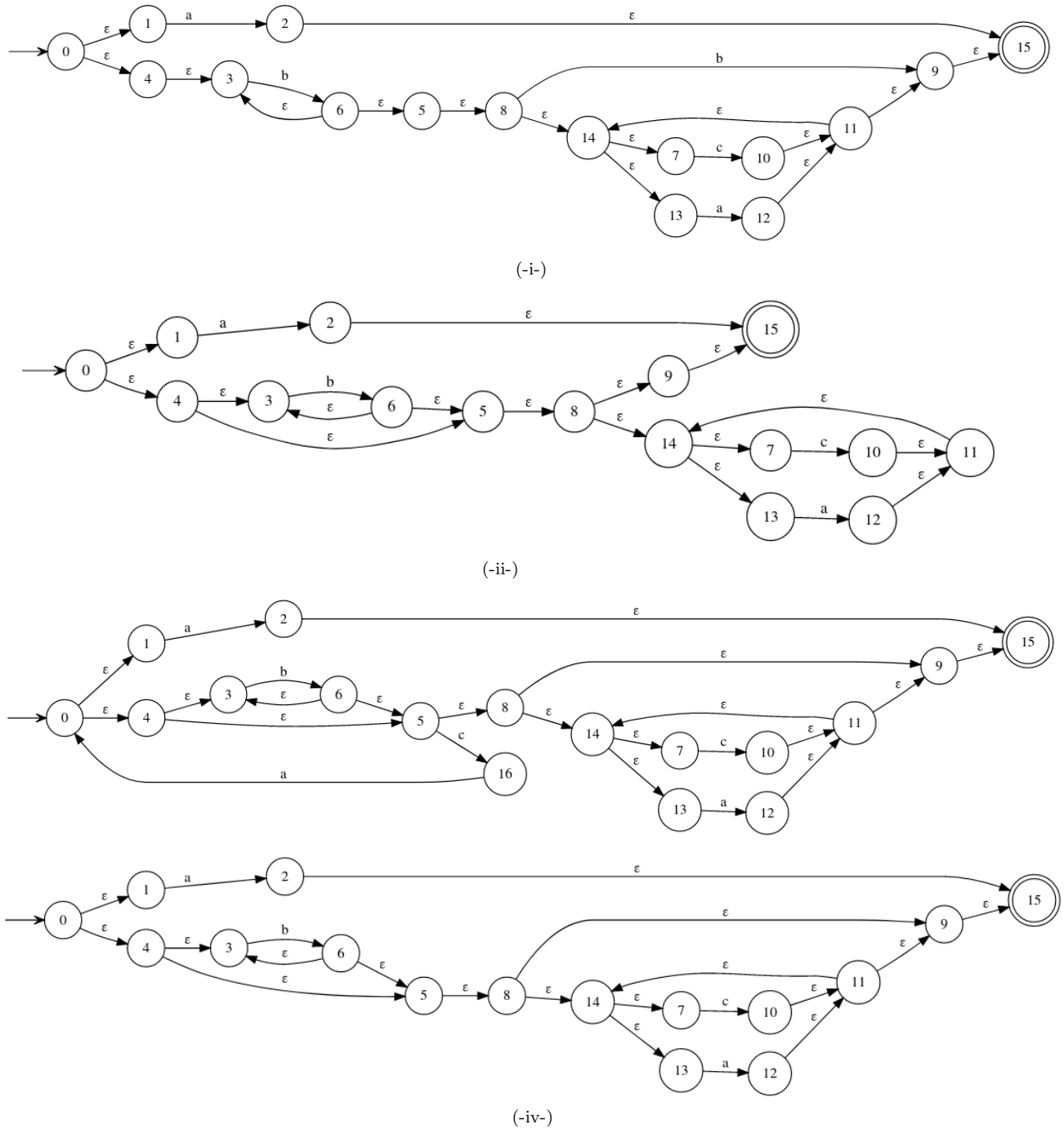
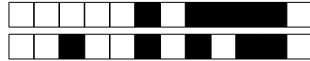


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b		d					i	j	k

Question 4 :

	b		d	e

Question 5 :

	b	c	d	e	f		h	i

Question 6 :

a		c	d		f			i	j

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a						g		i	j			m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e		g	h			k	l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

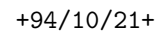
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

☐ d Tous les états de A sont accepteurs.

☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ f A accepte le langage universel. ☐ g A possède un état puits

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c A est complet.

☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e u est accepté par A .

☐ f A a des états accepteurs.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.

☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ d Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ^* est fermé par suffixe.

☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Σ^* est fermé par préfixe.

☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état non accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot est une application.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être vide. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

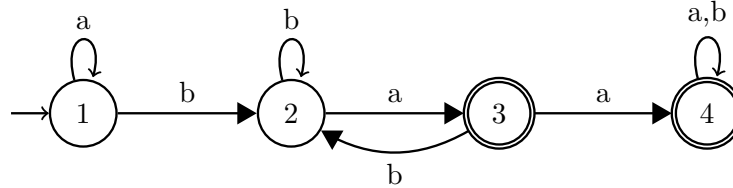
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

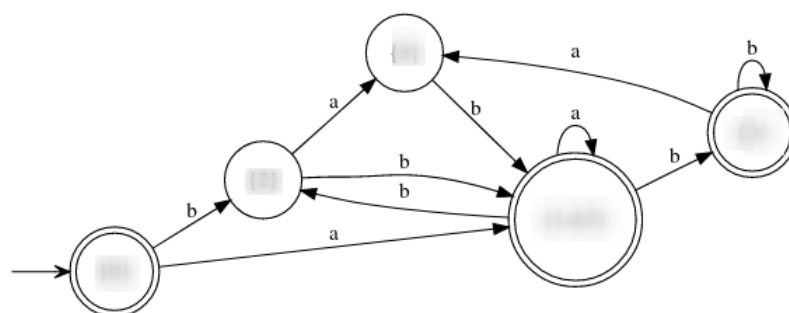
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 5

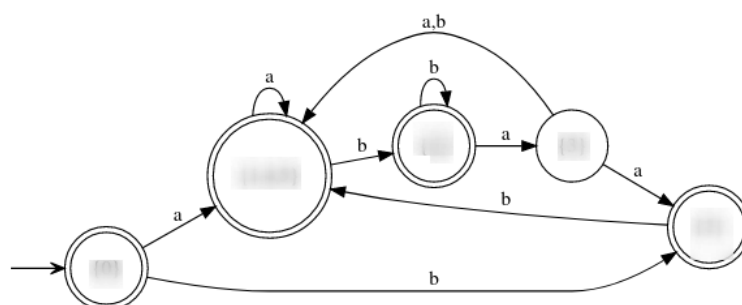
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

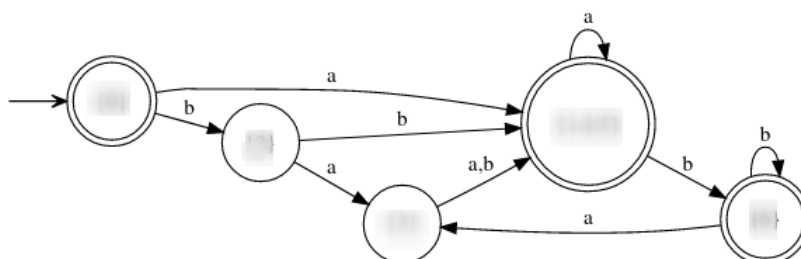
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



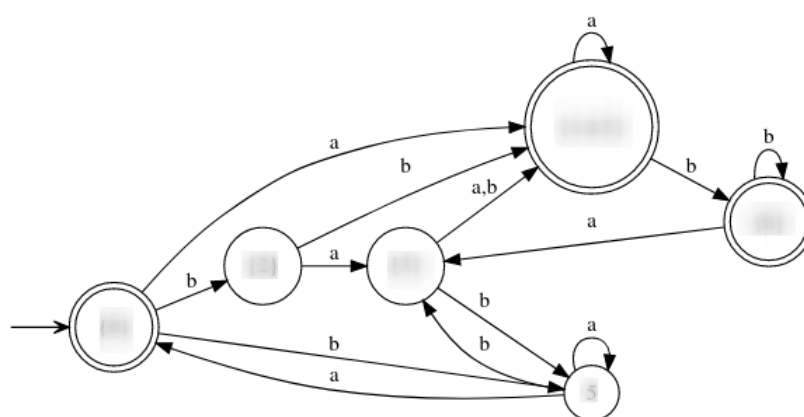
(-i-)



(-ii-)

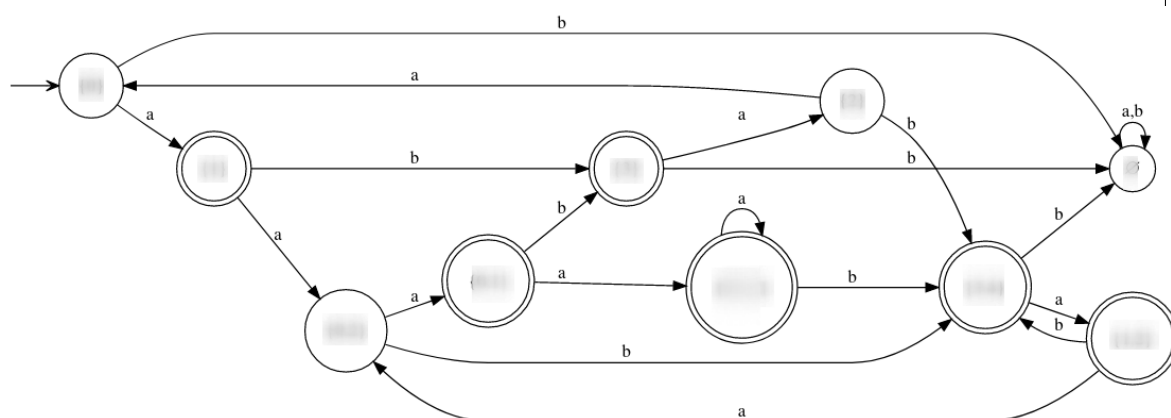


(-iii-)

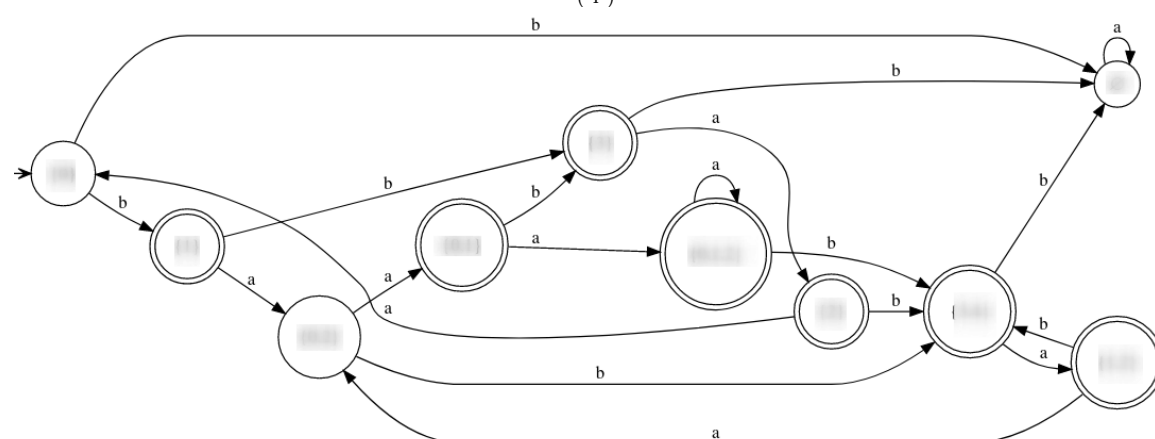


(-iv-)

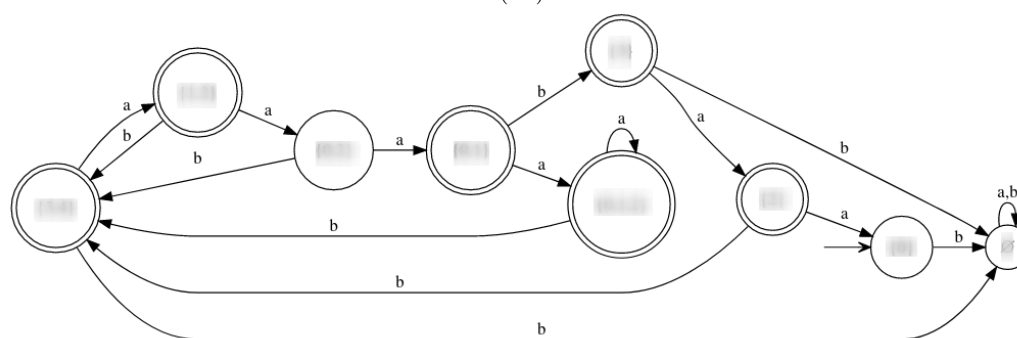
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



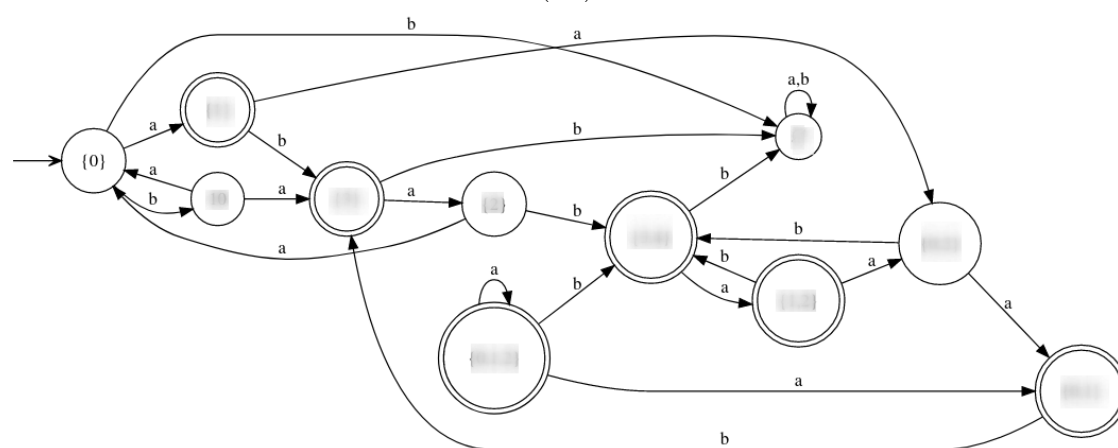
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

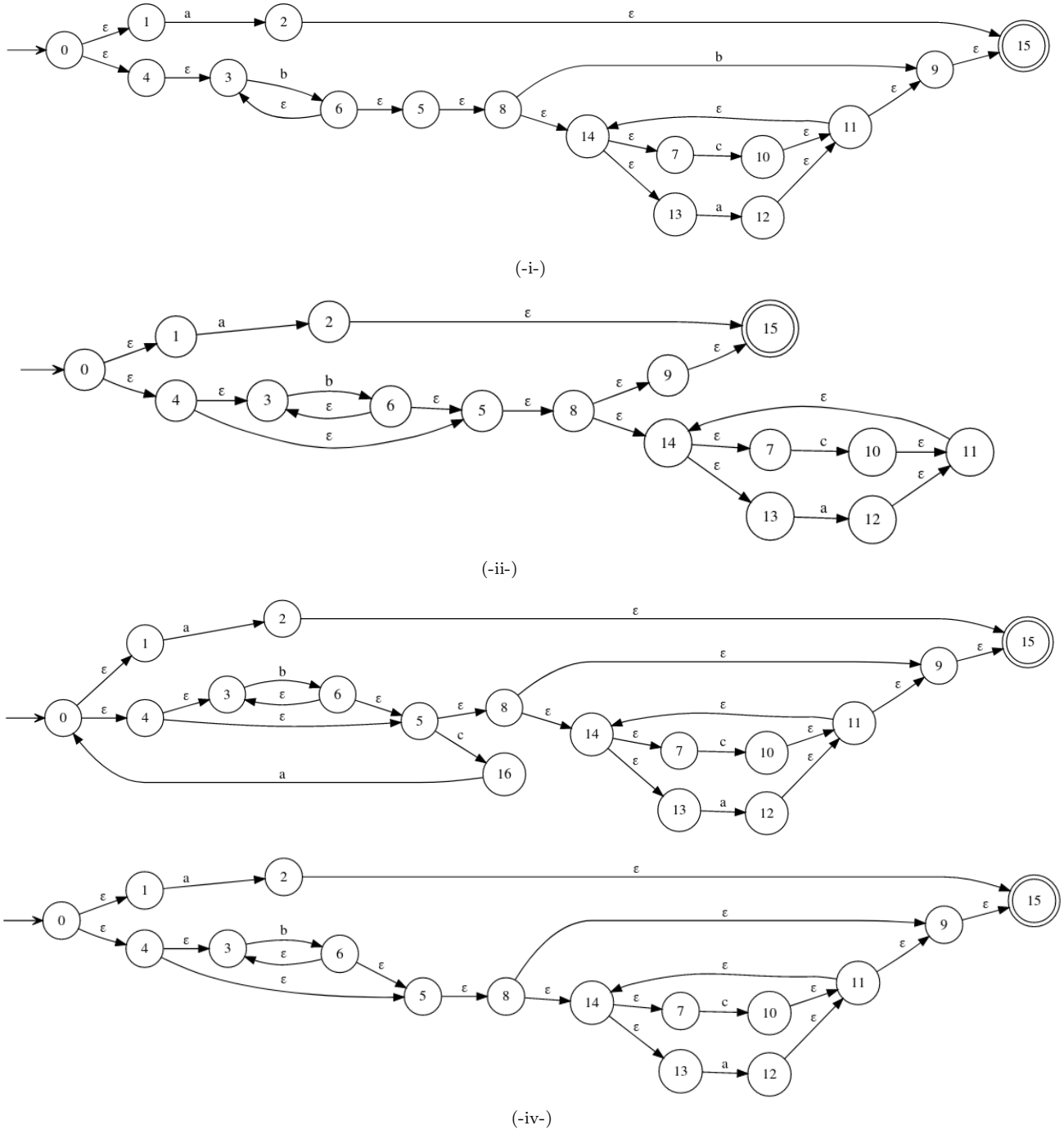
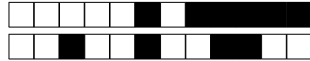


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

	b	c			f		h	i	j

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a	b				f	g			j	k

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

		c					h	i			l	m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b		d	e	f		h		j		l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

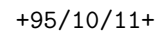
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b A possède un état puits
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par facteur.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☐ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ h Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b P est forcément déterministe.

- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ d Un mot est une application.
- ☐ e Un mot peut être infini. ☐ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot est une fonction. ☐ h Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ i Un mot peut être vide. ☐ j Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ b u n'est pas accepté par A .
- ☐ c A a au moins un état accessible. ☐ d $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ f A n'est pas complet.
- ☐ g A a au moins un état co-accessible. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$				

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
☐	☐ Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐	☐ e Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

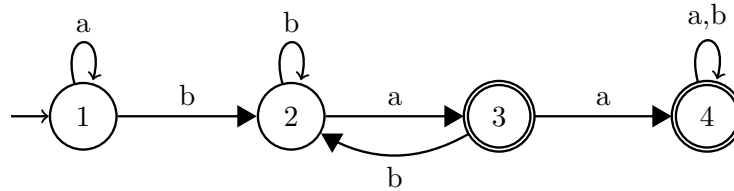
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

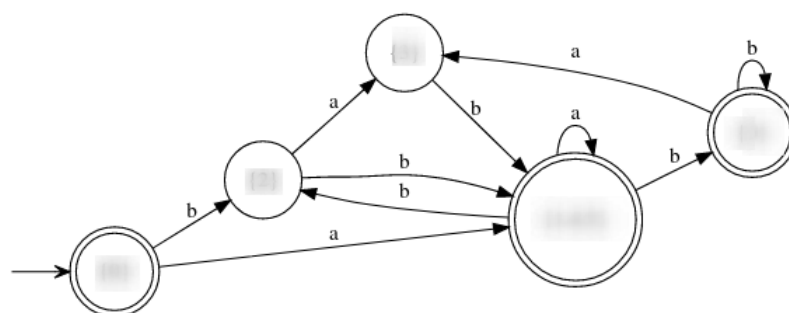
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 6 ☐ c 1 ☐ d 2 ☐ e 5 ☐ f 0 ☐ g 3

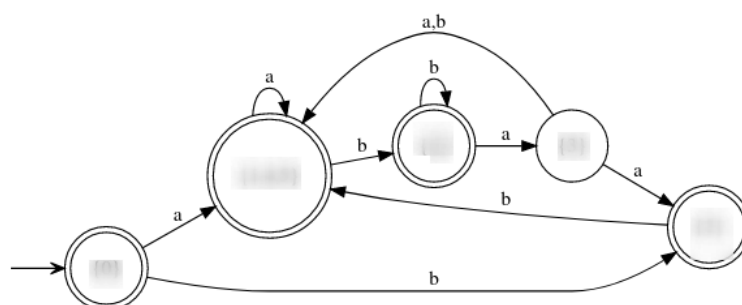
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

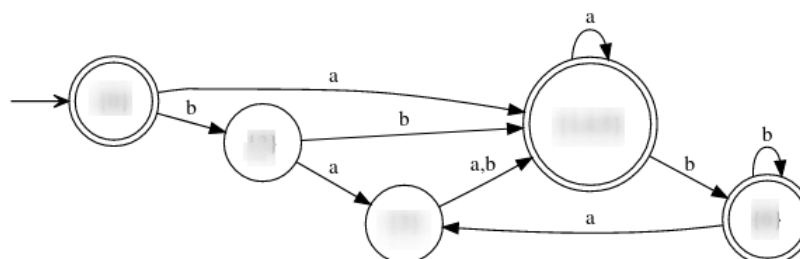
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



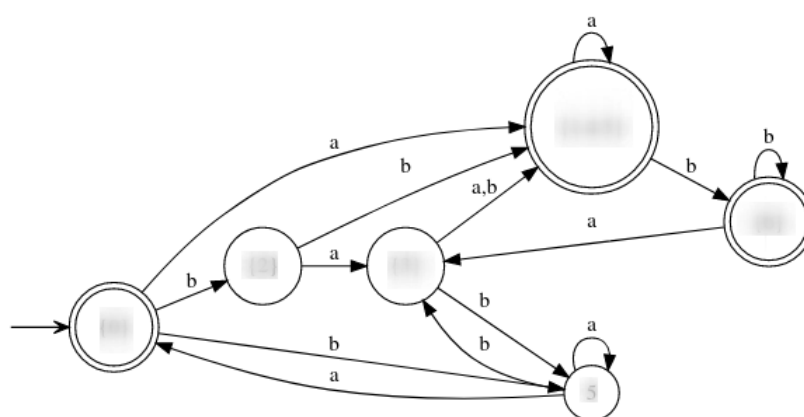
(-i-)



(-ii-)

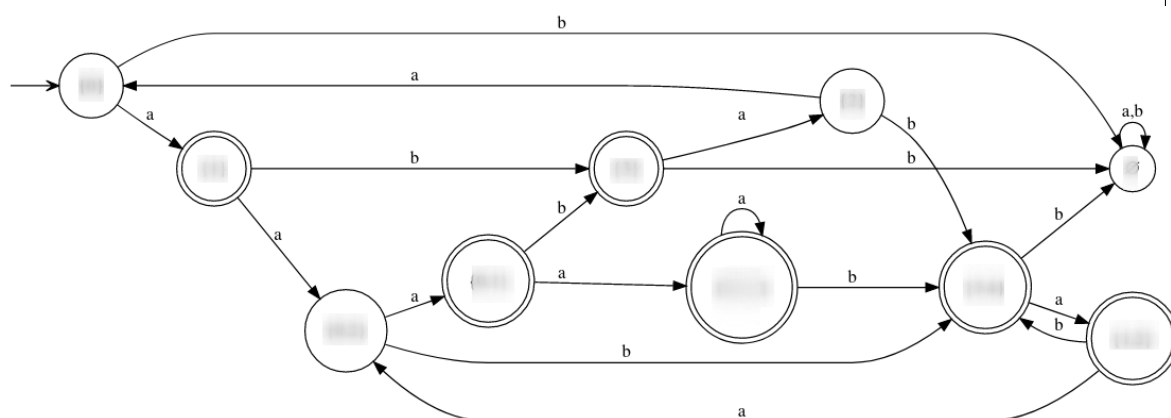


(-iii-)

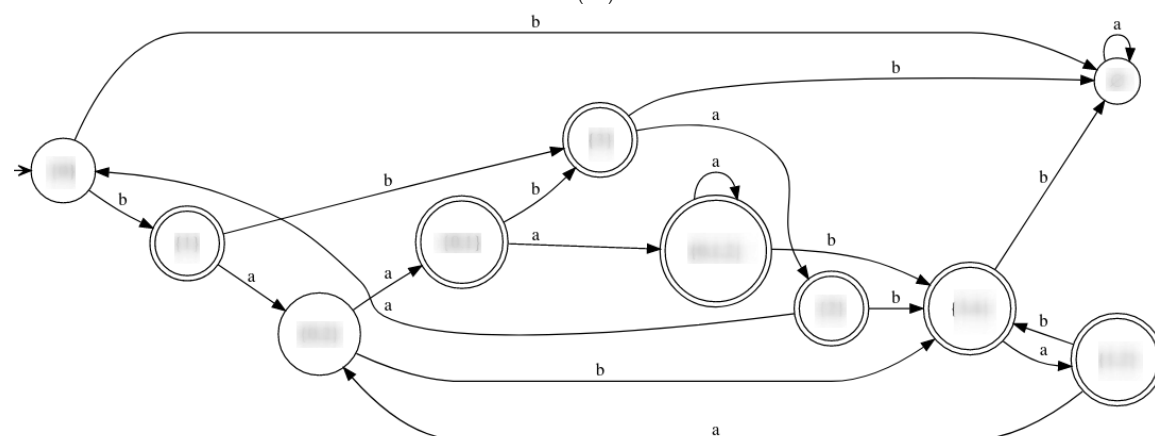


(-iv-)

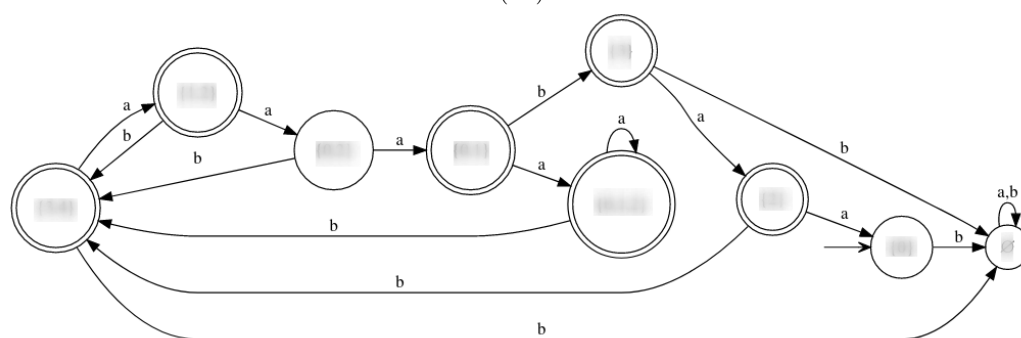
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



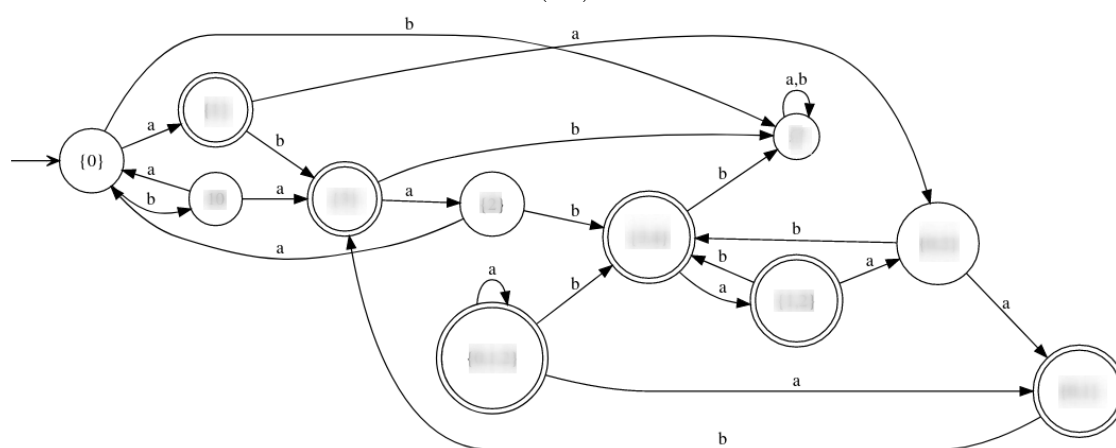
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

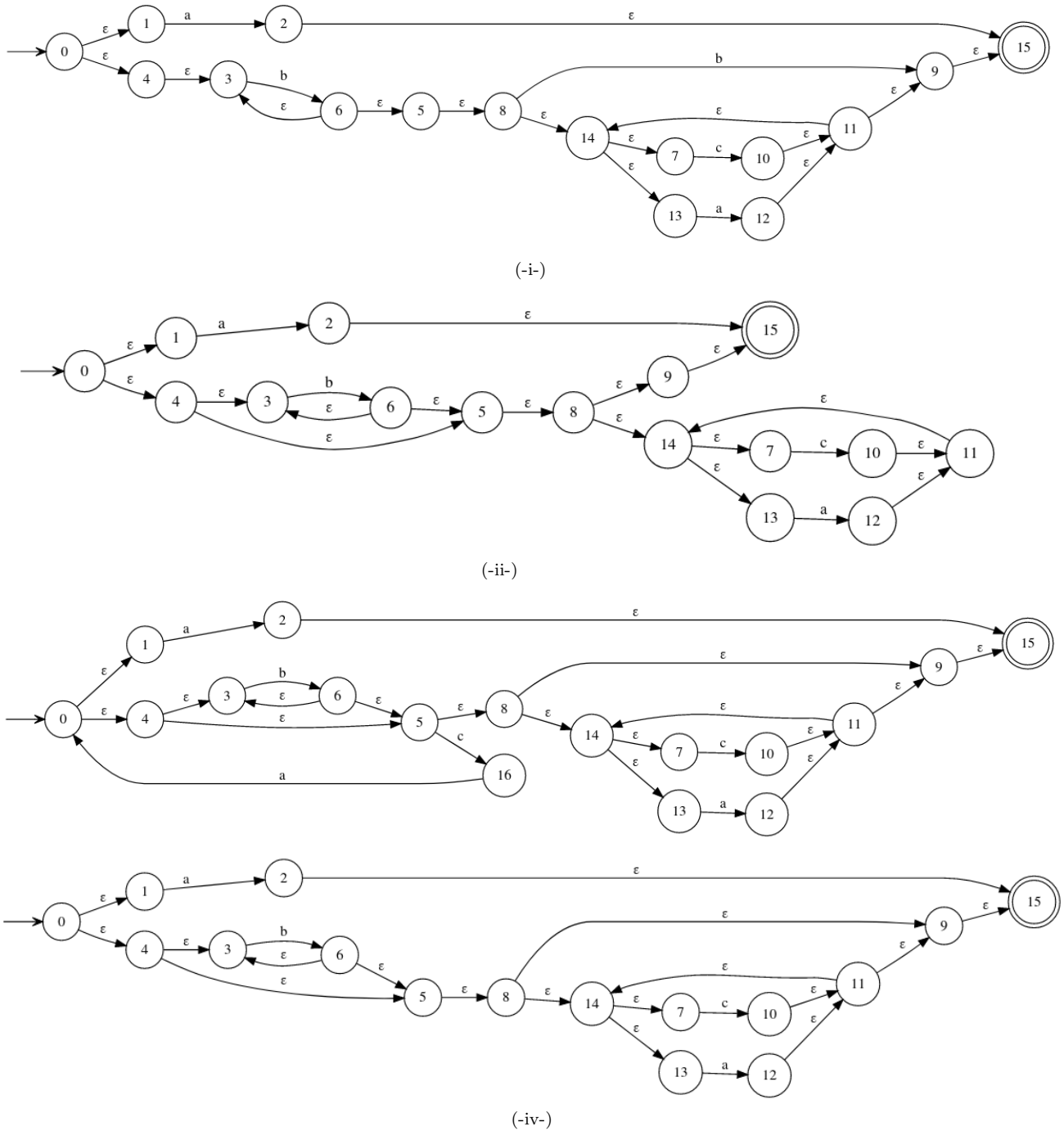


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 3 :

	b	c		e	f			i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

a	b			e							l	m	n

Question 7 :

a				e		g	h		j	k

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b			e	f	g	h	i	j			m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

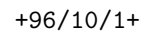
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A possède un état puits
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d A accepte le langage universel. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c u est accepté par A .
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état co-accessible.

☒ u n'est pas accepté par A .

☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☒ A n'est pas complet. ☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ h A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☒ Un mot est une application. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ k Un mot peut être infini. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

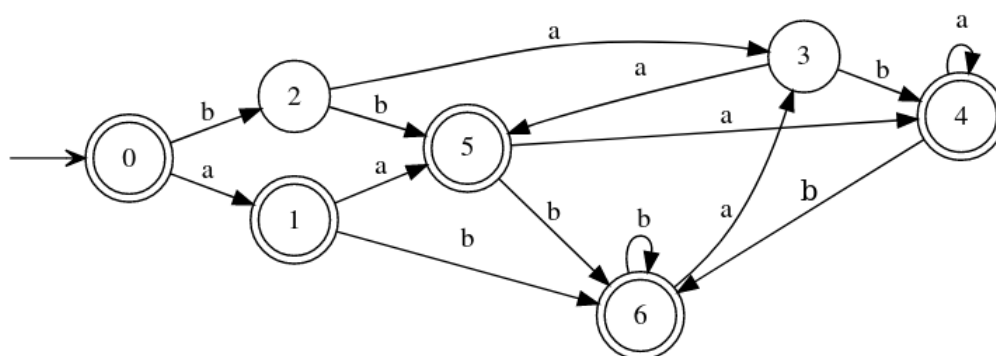
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

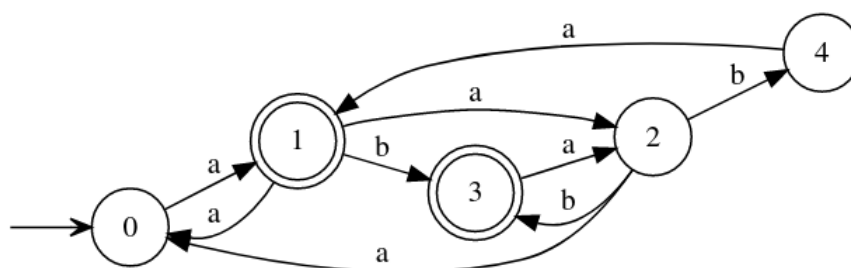
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

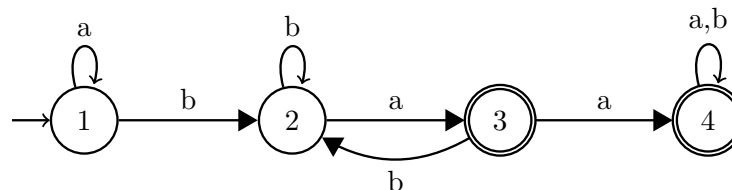
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 1 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 6 ☐ f 5 ☐ g 3

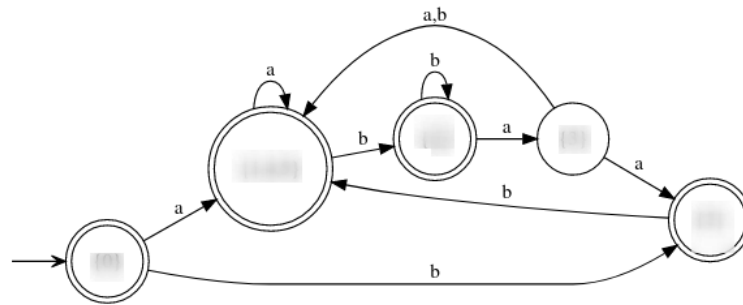
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

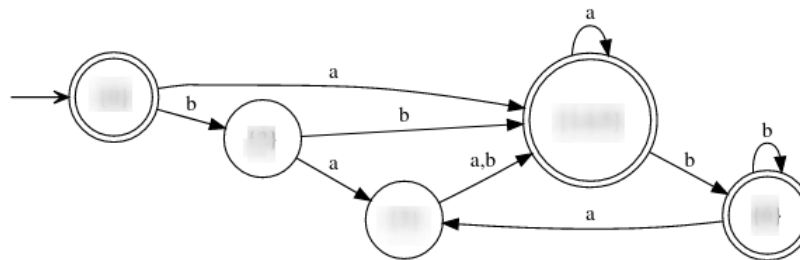
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



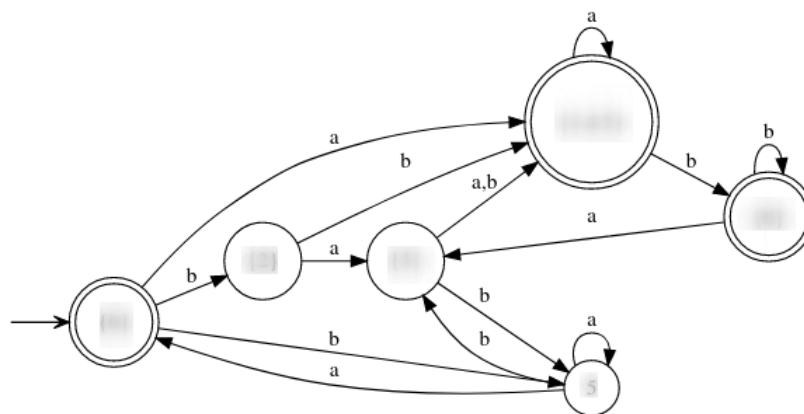
(-i-)



(-ii-)

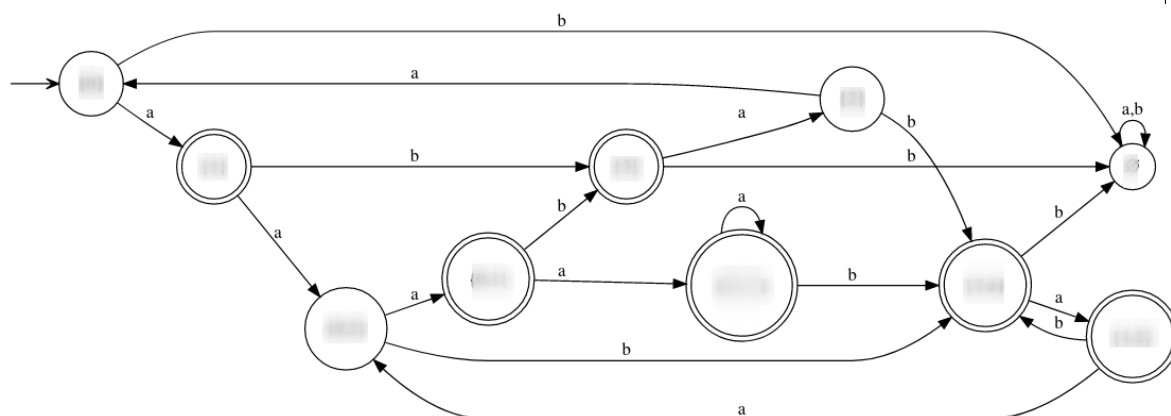


(-iii-)

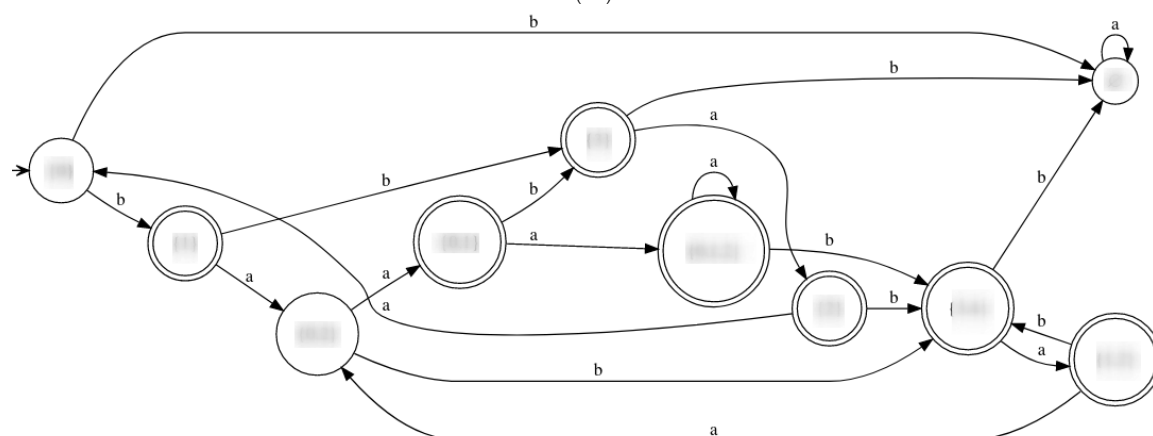


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 3 :

a		c	d				h	i	j

Question 4 :

	b		d	e

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b				f		h		j	k

Question 8 :

		c							j	k	l	m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e			h	i		k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

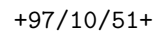
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ désigne l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être infini.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être vide.

☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☐ e A n'est pas complet.
☐ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ g A a au moins un état accessible. ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
☐ i u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e A accepte le langage universel. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

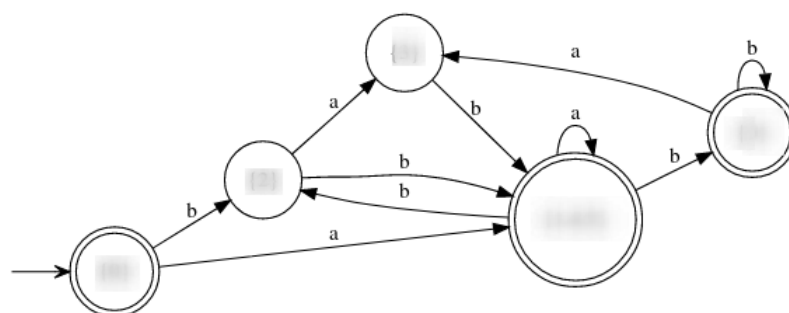
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 6 ☐ d 0 ☐ e 5 ☐ f 3 ☐ g 2

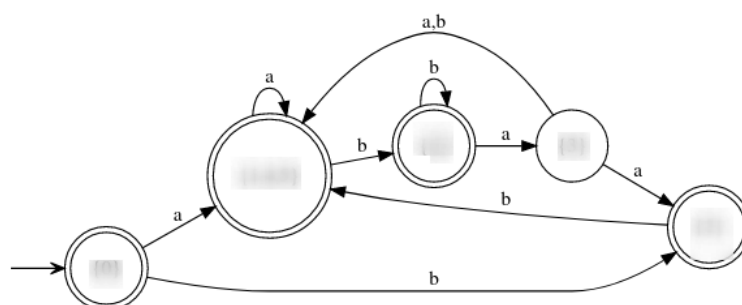
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

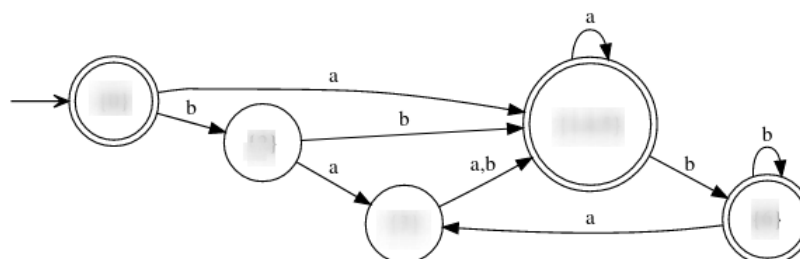
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



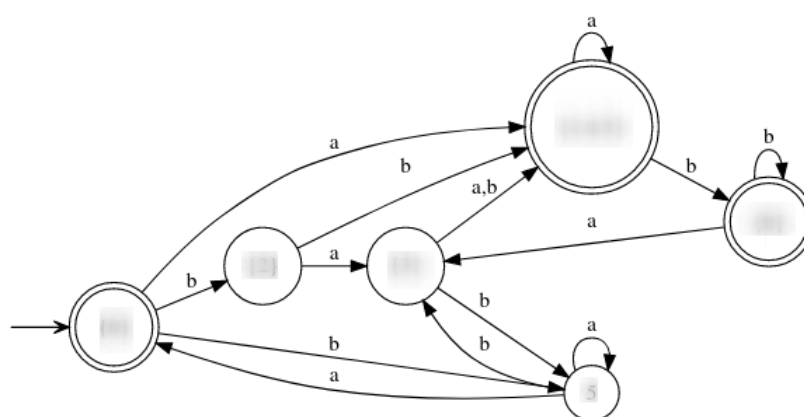
(-i-)



(-ii-)

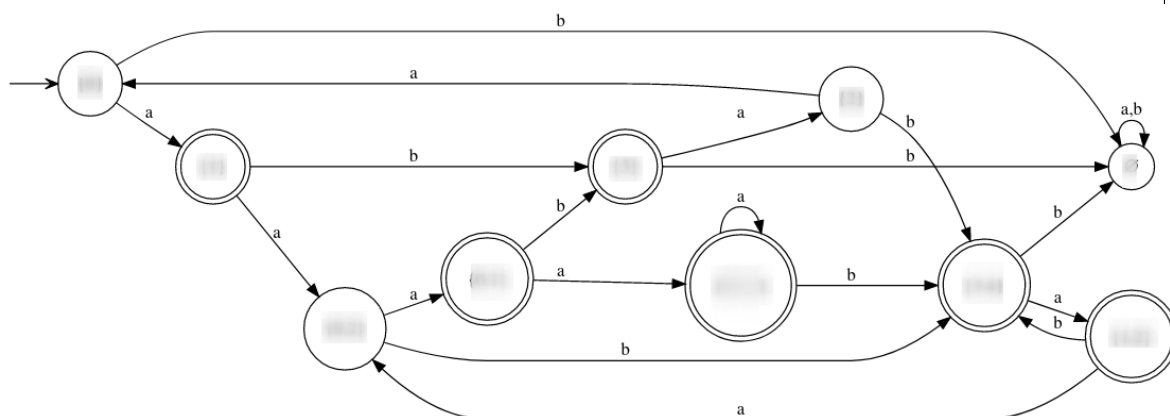


(-iii-)

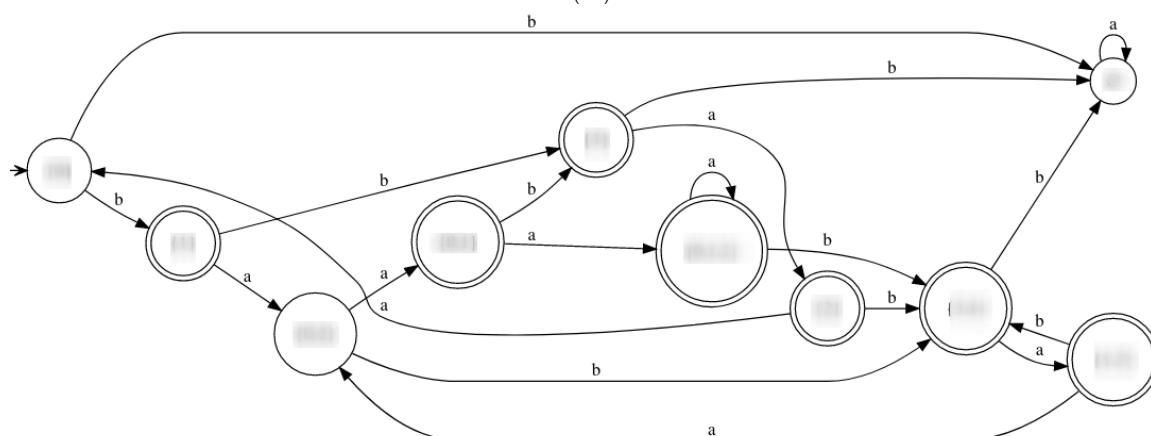


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



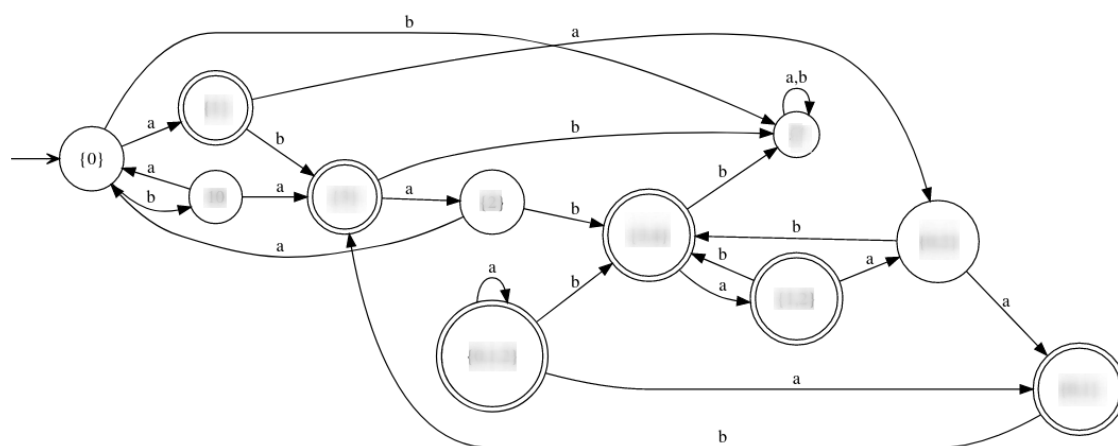
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

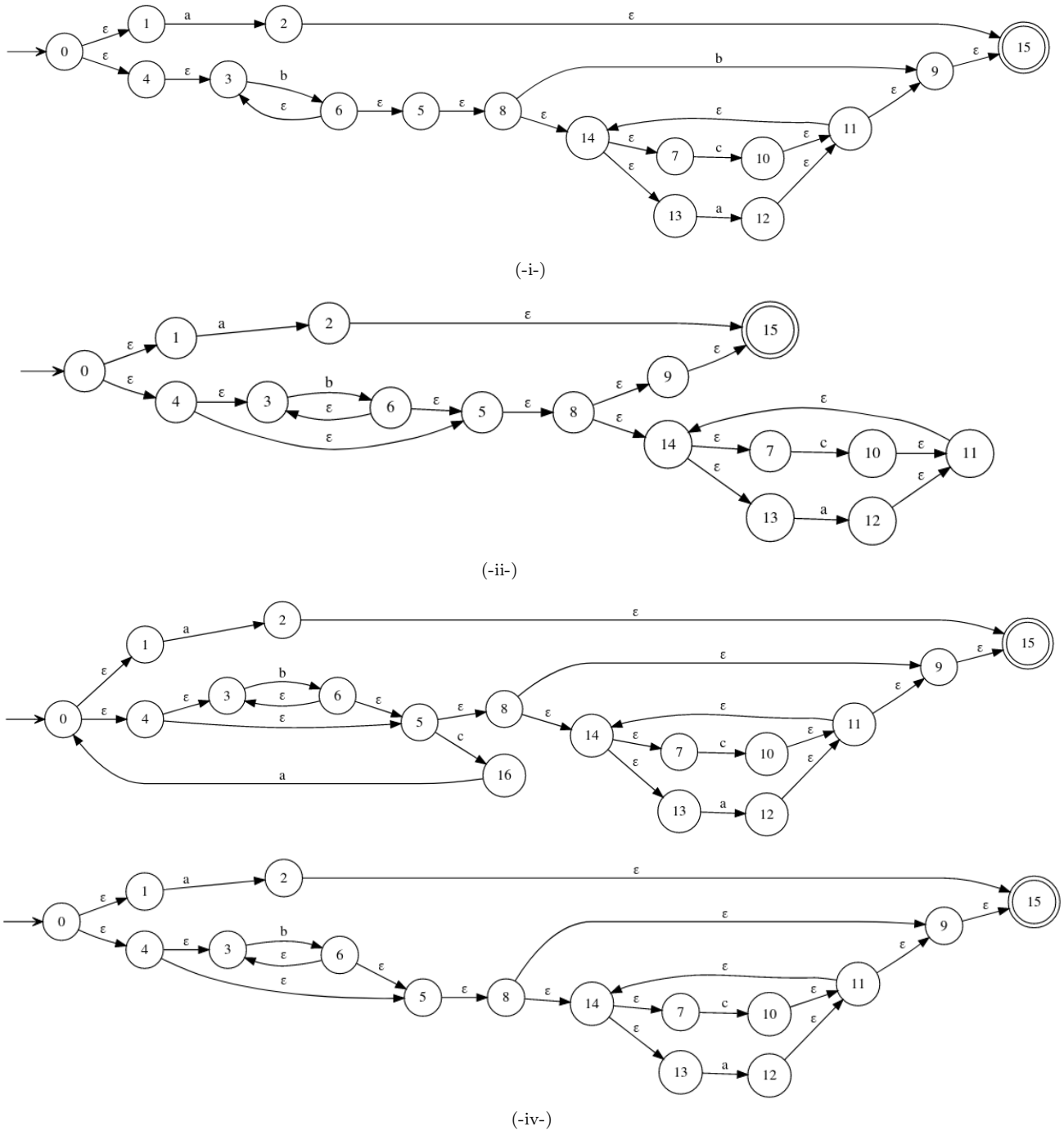


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 :  b  d e  g  i j

Question 4 : a b c        l m n

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :  b c d   h  j k

Question 7 : a b   e f g h i

Question 8 : a b c d 

Question 9 : a  c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d    h  j k l m

Question 12 : a  c d e f g h

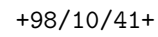
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ u est accepté par A . ☐ A a des états accepteurs.
☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f A accepte le langage universel. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☐ f Σ est fermé par facteur. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☒ A a au moins un état accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ g A a au moins un état non accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
	☐ $X_4 = a + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

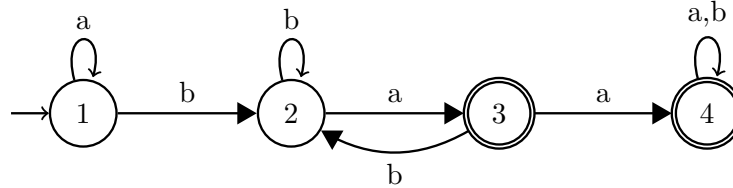
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ 4 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 0 ☐ f 1 ☐ g 6

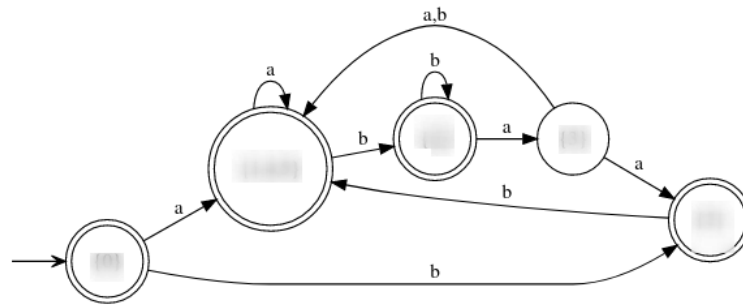
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



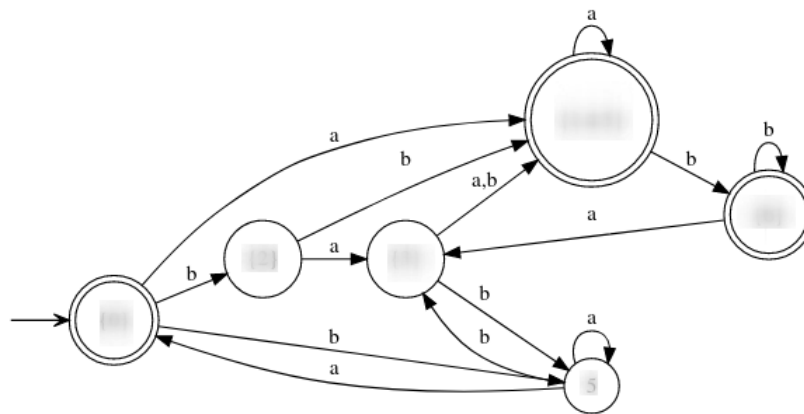
(-i-)



(-ii-)

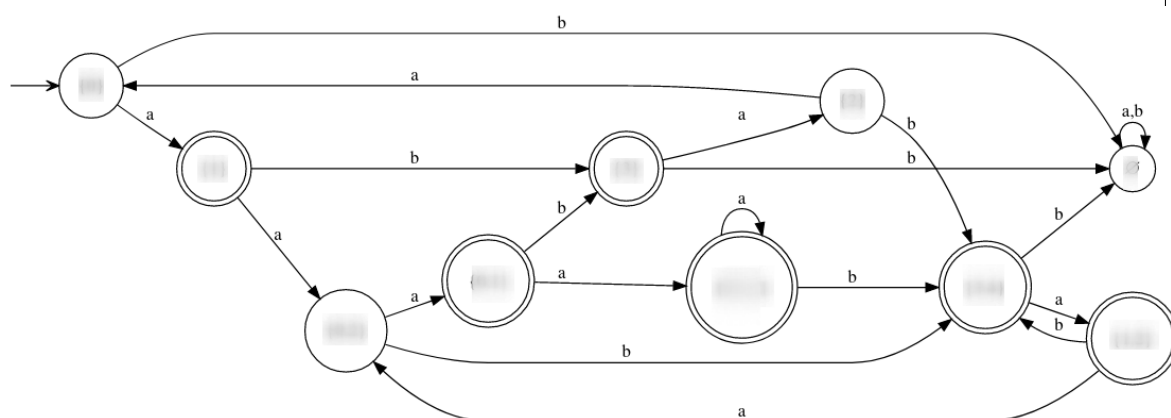


(-iii-)

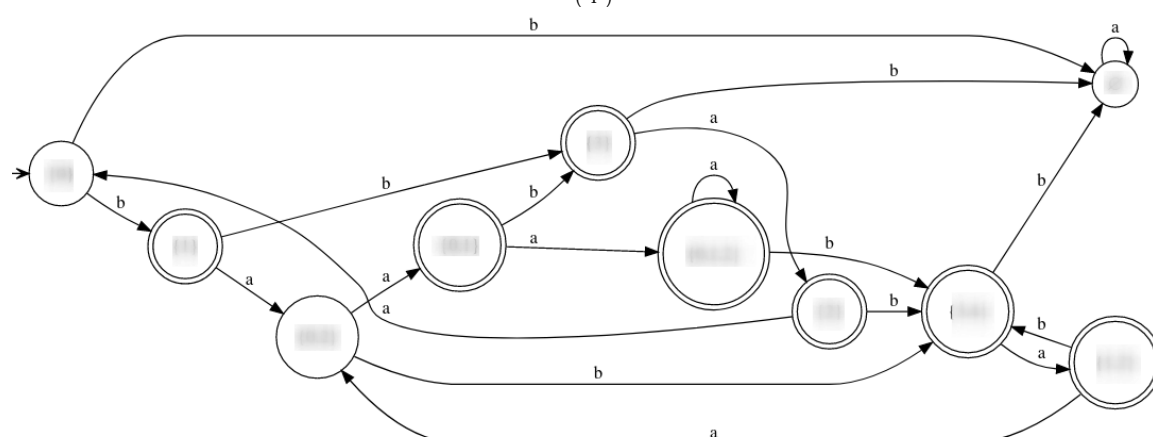


(-iv-)

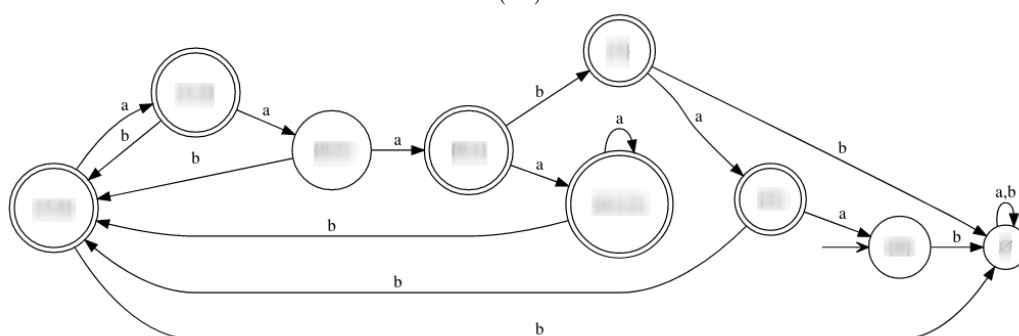
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

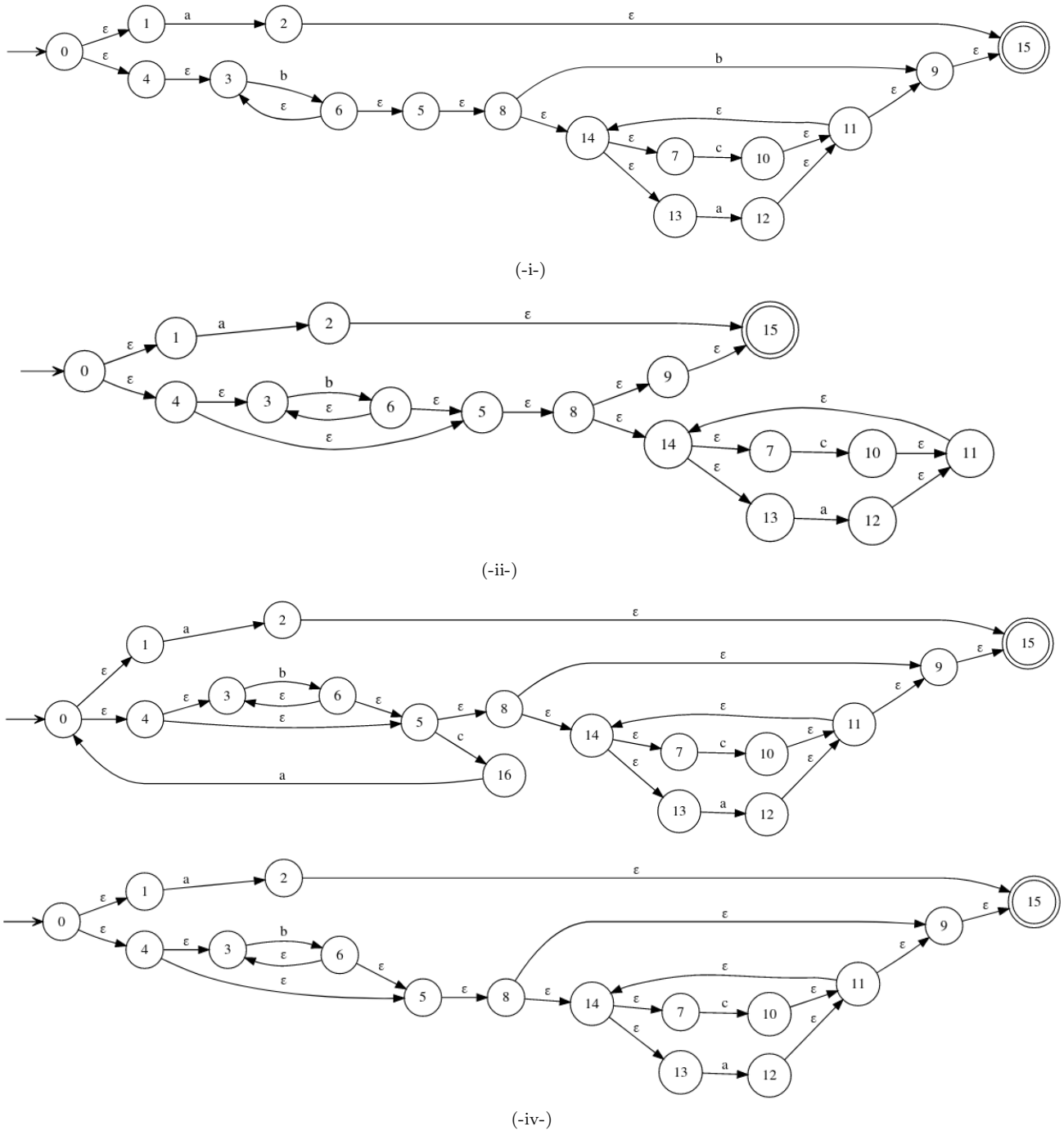


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d   g   j  l m n

Question 3 :  b  d e

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a  c d  f g h i

Question 6 :  b c  e f   i j

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a  c d   g   j k

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 :   c d   g h i j k l m

Question 12 : a b c d  f g h

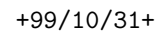
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ b P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ b Un mot peut être vide.
☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ d Un mot est une application.
☒ e Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot peut être infini. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ i Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ k Un mot est une fonction. ☒ l Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b A possède un état puits ☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
☐ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible.
☐ b Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ c A n'est pas complet. ☐ d A a au moins un état non accessible.
☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☐ f $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ g A a au moins un état accessible.
☐ h u n'est pas accepté par A . ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ^* est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ e Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
☐ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e $X_4 = (a + b)X_4$	☐ f $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i $X_4 = a + b$
☐ j $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l $X_3 = aX_3 + cX_4$
	☐ m $X_1 = aX_1 + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a $X_4 = (a + b)X_4$	☐ b $X_4 = a + b$	☐ c $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ e $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f $X_4 = a^* + b^*$	☐ g Aucune des équations proposées.	
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b $X_1 = a^+bX_2$	☐ c $X_1 = a^*b$	☐ d $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ c $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ e Aucune des équations proposées.		
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

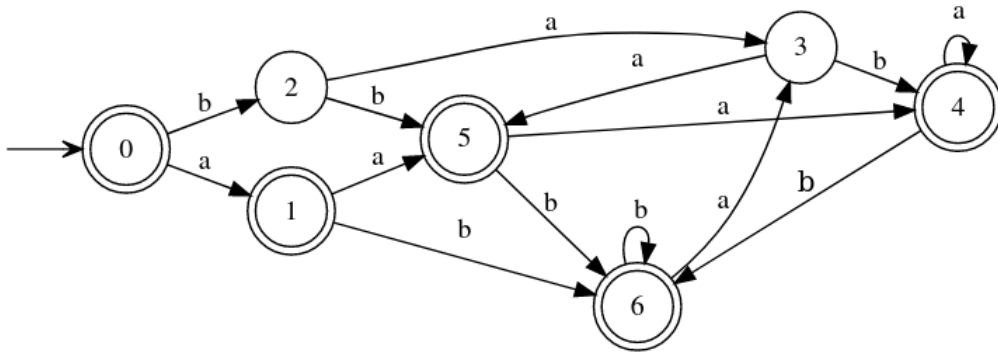
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = a(a + b)^*$	☐ e Aucune des équations proposées.	
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

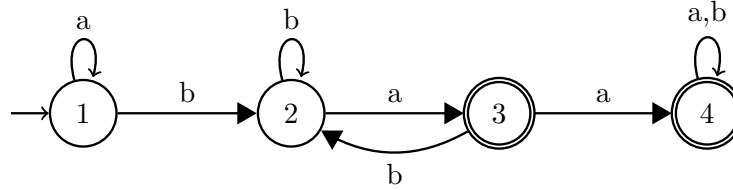
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

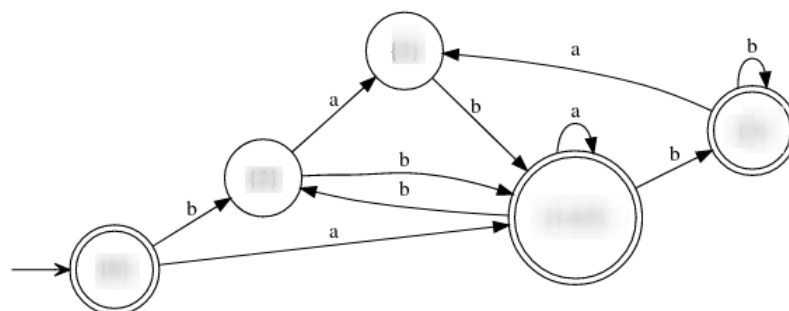
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 0 ☐ c 3 ☐ d 2 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 5

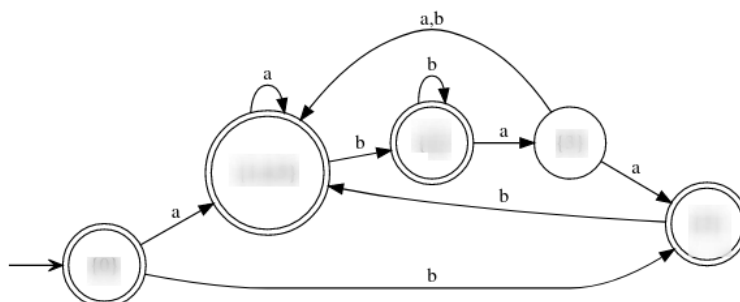
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

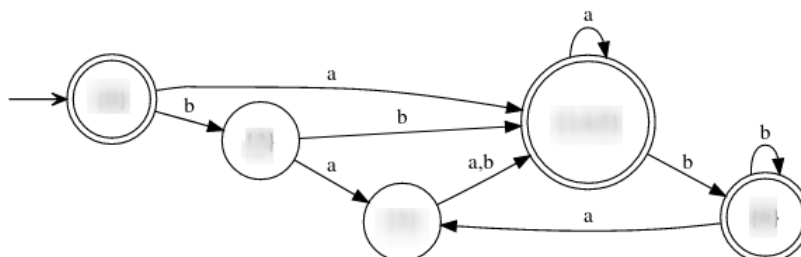
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



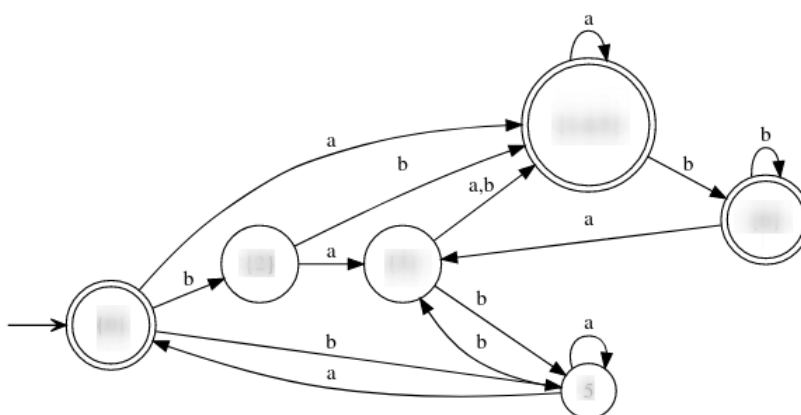
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

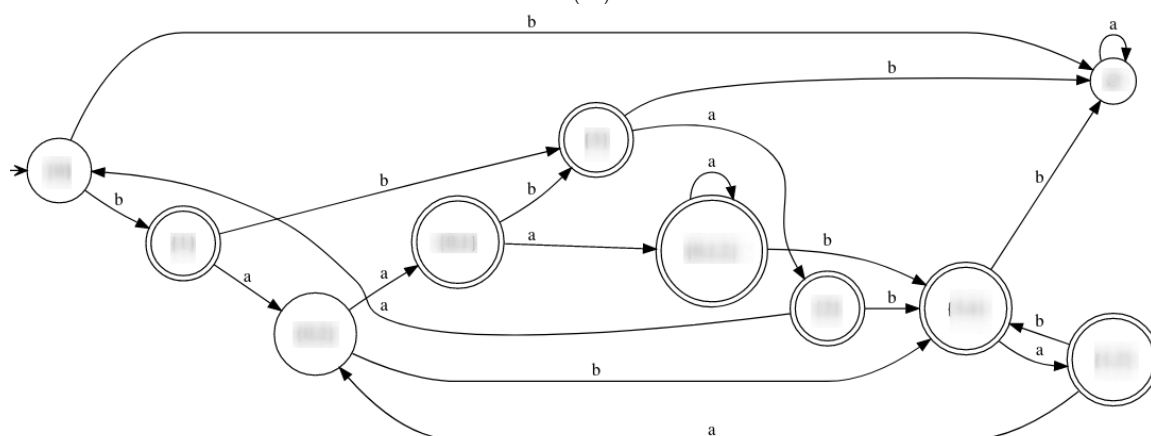


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

		c				g	h		j			m	n

Question 5 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 6 :

a			d	e				i	j	k

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a	b		d			g		i	j

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

				e	f	g	h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

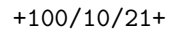
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ d A accepte le langage universel.
- ☐ e A possède un état puits
- ☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☒ b Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☒ e Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ g Σ est fermé par facteur.
- ☒ h Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
- ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d A est complet.
- ☐ e Les états de A sont tous accessibles.

- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ j Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ h A a au moins un état co-accessible.
- ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

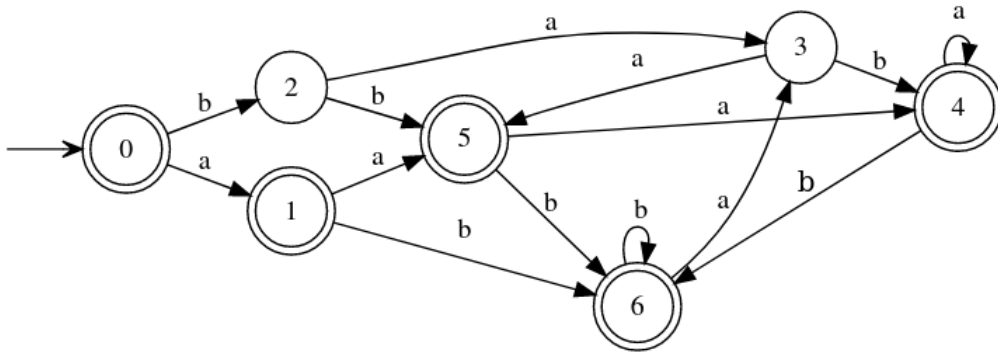
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

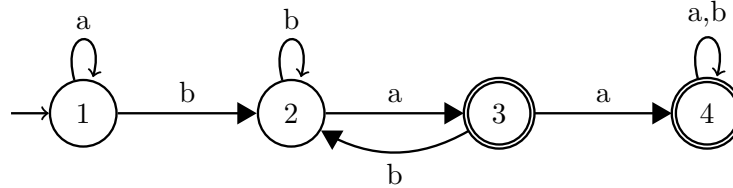
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

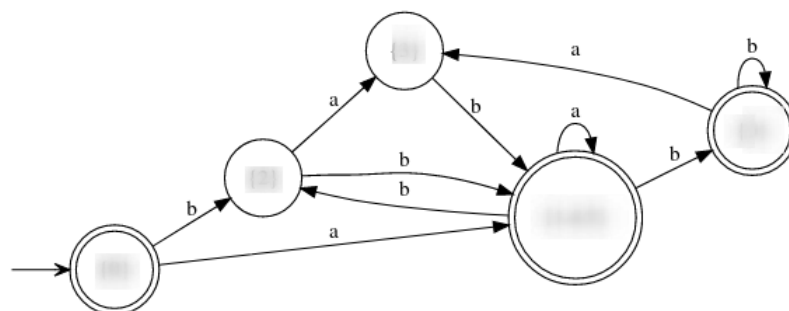
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☐ c 6 ☐ d 5 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 2

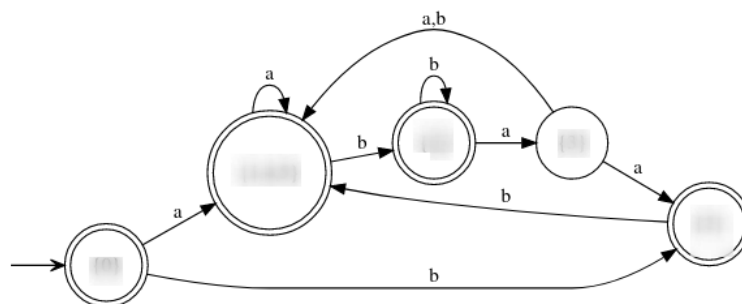
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

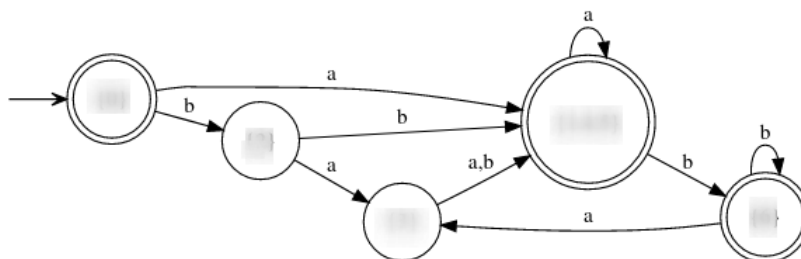
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



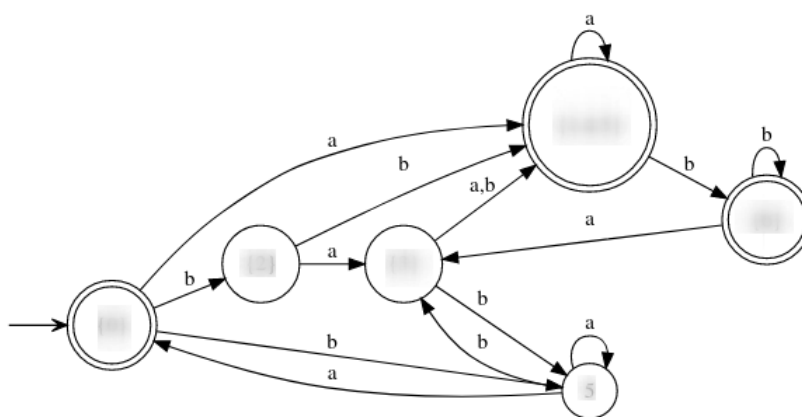
(-i-)



(-ii-)

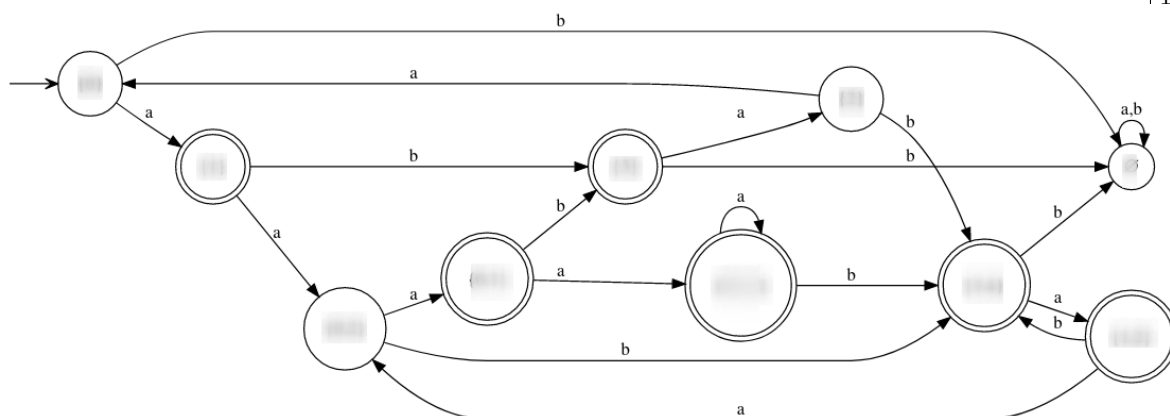


(-iii-)



(-iv-)

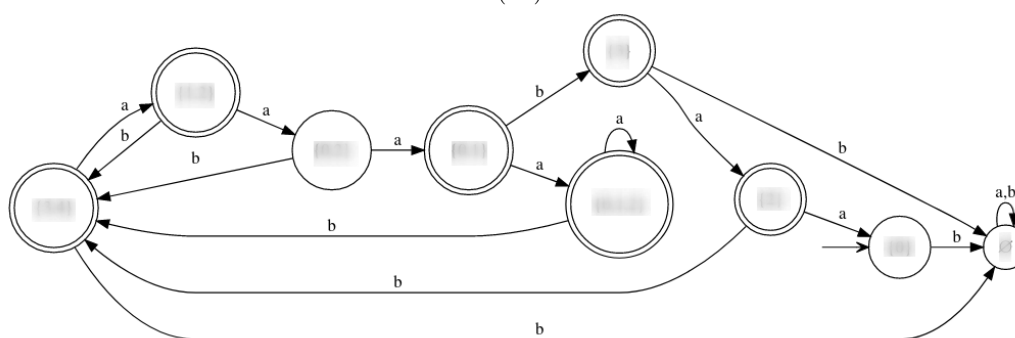
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 4 :

		c	d		f	g		i	j

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

				e		g			j		l	m	n

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a			d				h	i	j	k

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d	e	f	g	h	i			l	

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

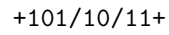
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A possède un état puits
- ☐ c A accepte le langage universel.
- ☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ e Un mot peut être vide. ☐ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ h Un mot est une application.
- ☐ i Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Un mot peut être infini. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ c Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ g Σ est fermé par préfixe. ☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b u est accepté par A .
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
☐ e A est complet. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a au moins un état non co-accessible.
☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ f A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

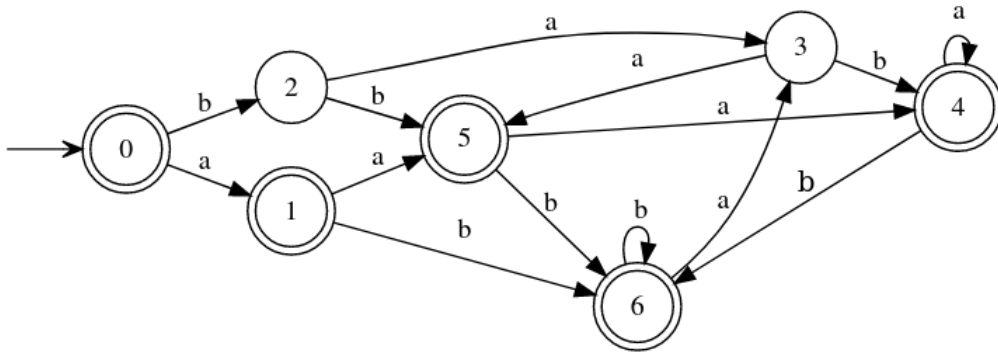
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

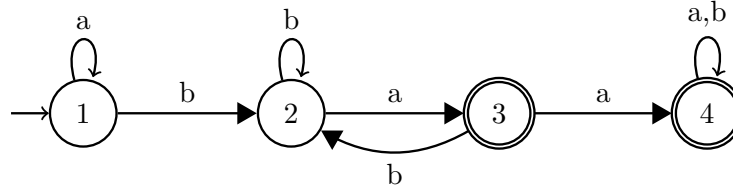
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

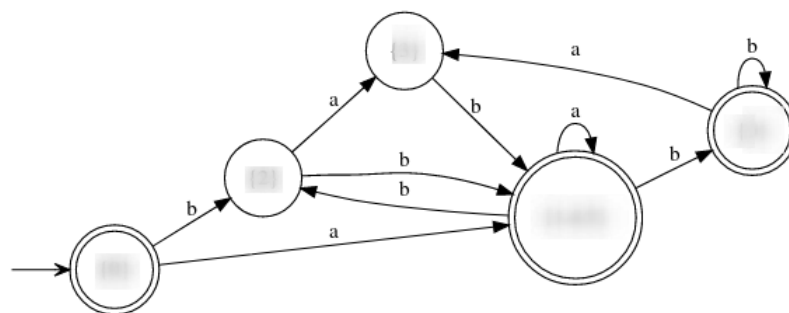
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ 0 ☐ 5 ☐ 1 ☐ 3 ☐ 6 ☐ 2

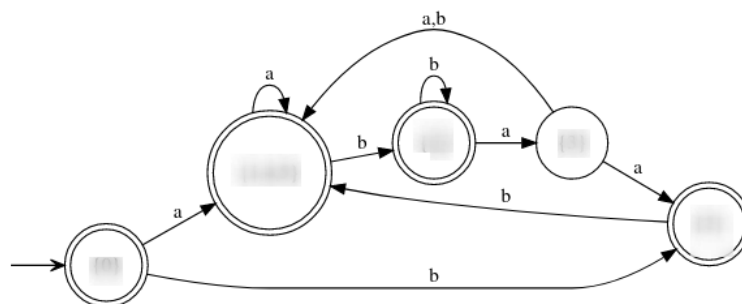
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

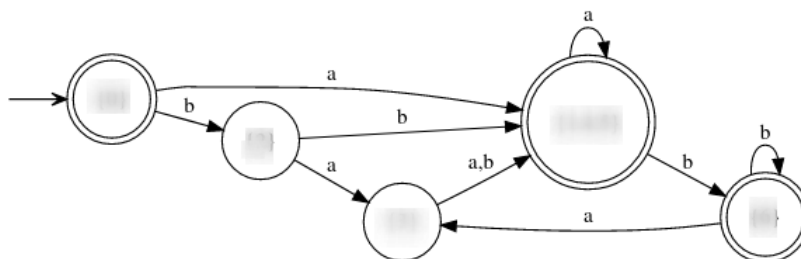
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



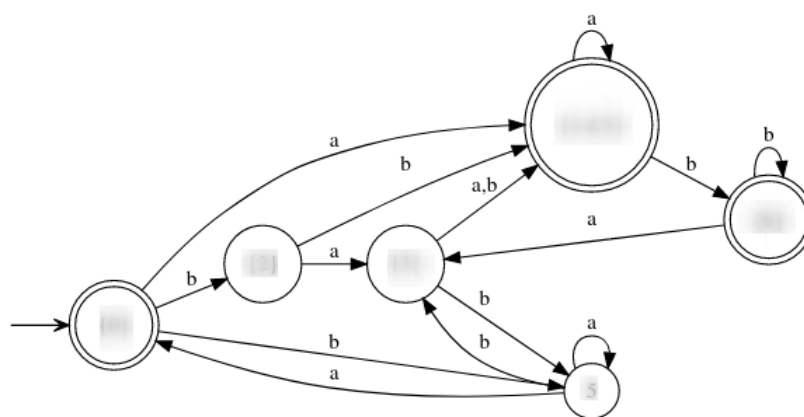
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

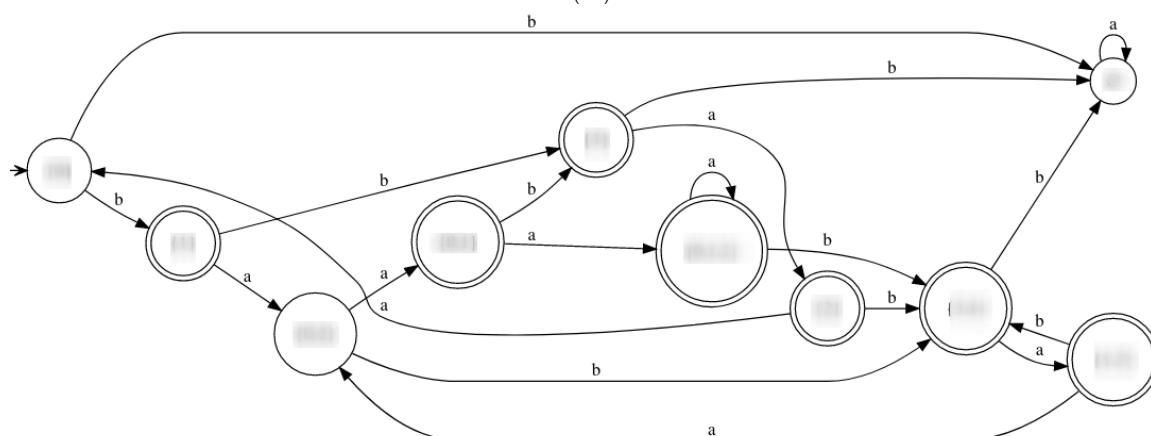


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

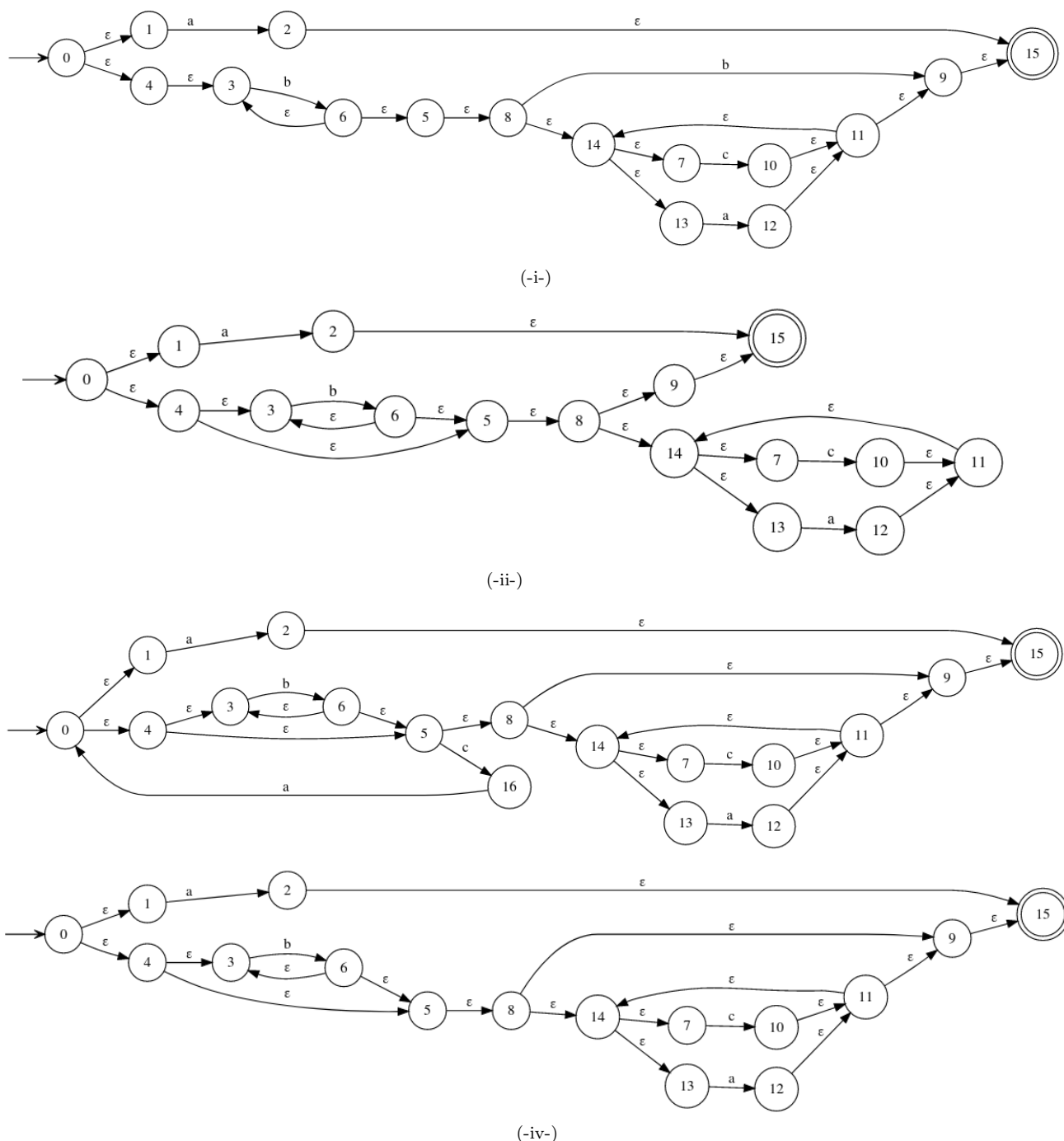


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 3 :

	b		d	e

Question 4 :

a						g				k	l	m	n

Question 5 :

a		c				g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

		c	d		f		h		j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b		d				h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

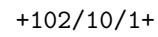
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
 ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
 ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$.
 ☐ e u est accepté par A .
 ☐ f A est complet.
 ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
 ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut être vide.
 ☐ b Un mot peut être infini.
 ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe.
 ☒ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ e Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☒ g Un mot est une fonction.
 ☒ h Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☒ i Un mot est une application.
 ☒ j Un mot possède une infinité d'extensions.
 ☒ k Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
 ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe.
 ☒ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☒ c Σ^* est fermé par préfixe.
 ☒ d Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☒ f Σ^* est fermé par facteur.
 ☐ g Σ est fermé par suffixe.
 ☐ h Σ est fermé par facteur.
 ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
 ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a u n'est pas accepté par A .
 ☐ b A a au moins un état co-accessible.
 ☒ c $u \notin \mathcal{L}(A)$.
 ☒ d A a au moins un état accessible.
 ☐ e A n'a pas d'état accepteur.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ A possède un état puits
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

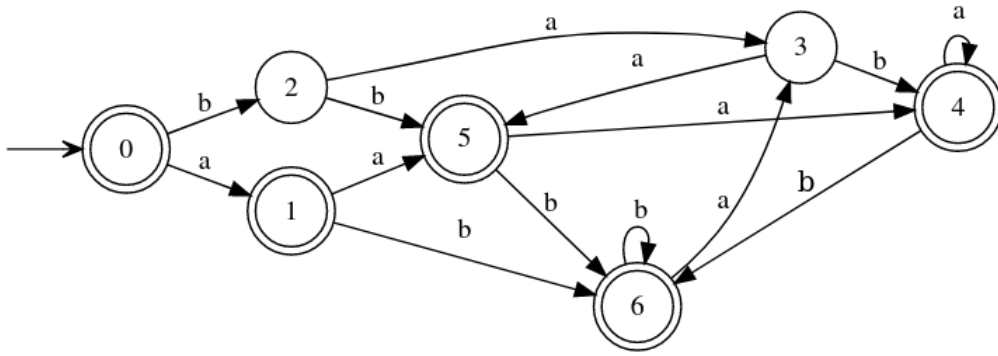
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

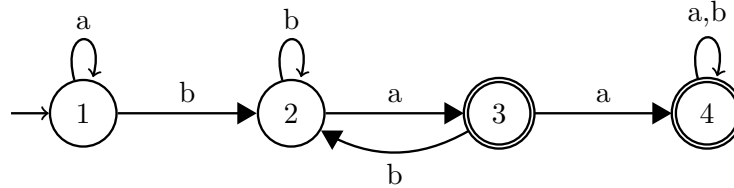
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

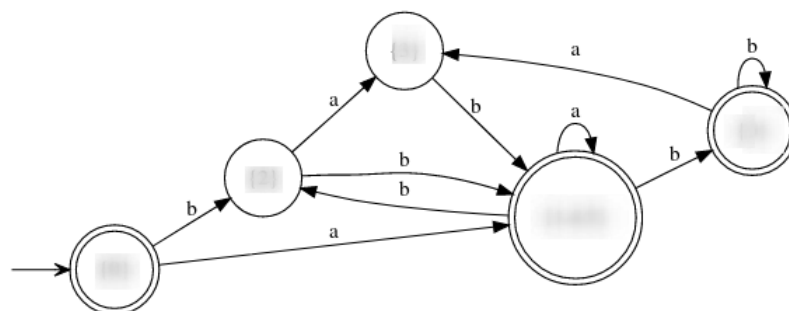
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 0 ☐ d 1 ☐ e 2 ☐ f 3 ☐ g 6

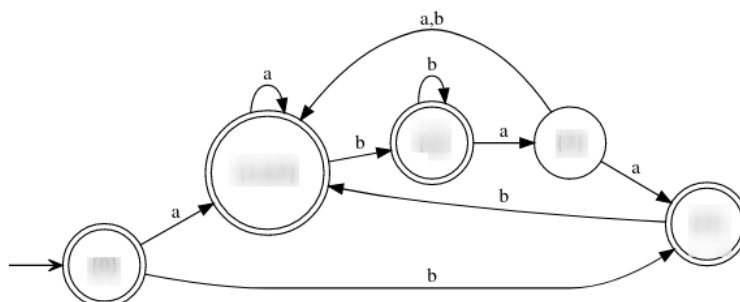
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

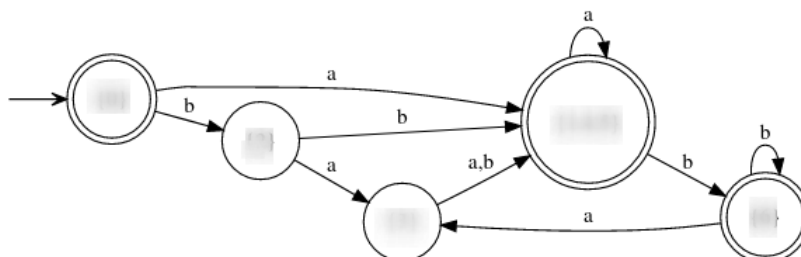
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



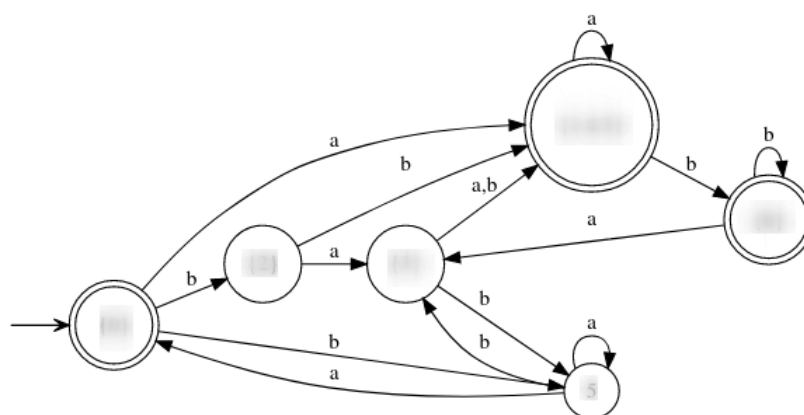
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

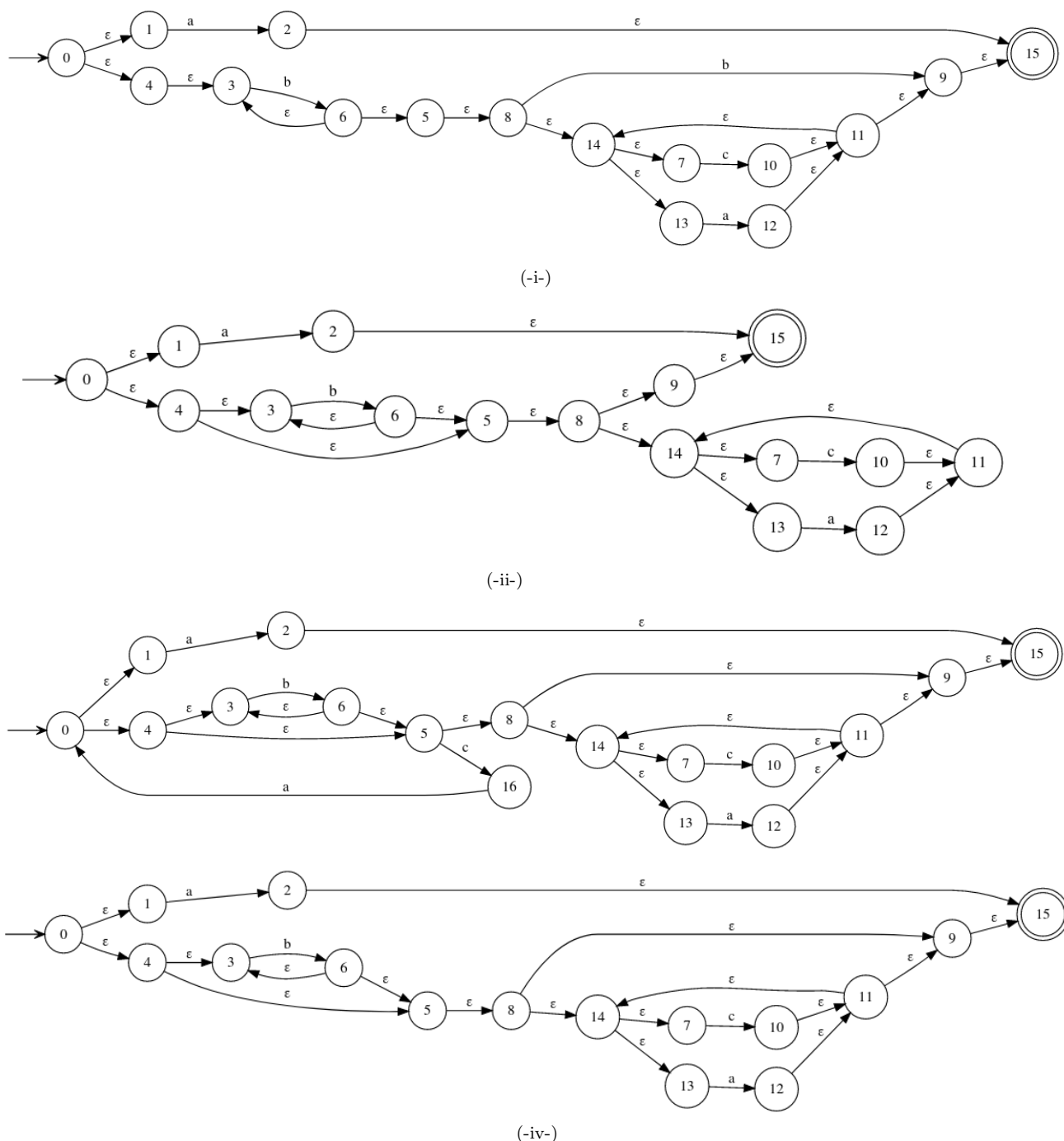


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b	c		e							l	m	n

Question 4 :

a				e		g	h	i	j

Question 5 :

	b			e		g		i	j	k

Question 6 :

	b		d	e	f	g	h	i

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c		e	f			i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

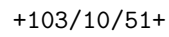
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c A accepte le langage universel.
- ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ e A possède un état puits
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☒ c A n'a pas d'état accepteur.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ e A a au moins un état co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet.
☒ u n'est pas accepté par A . ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b u est accepté par A . ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e A est complet.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Un mot est une application.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ f Σ est fermé par facteur.
☐ g Σ est fermé par préfixe. ☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

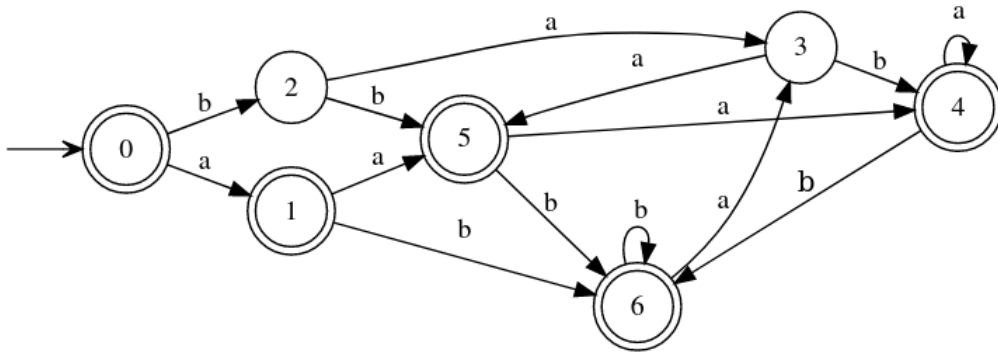
☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^* (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a+b)^*$
☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

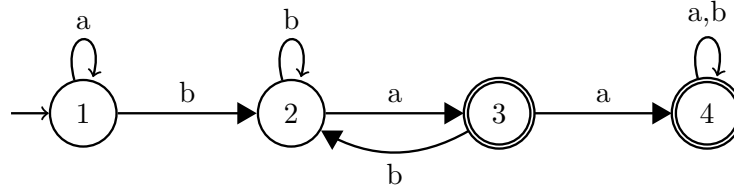
☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

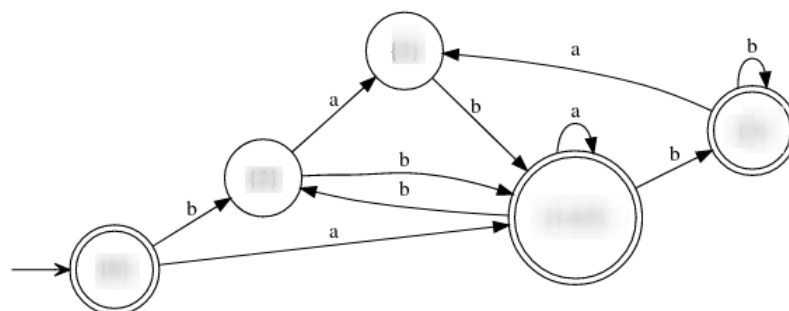
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 5 ☒ 4

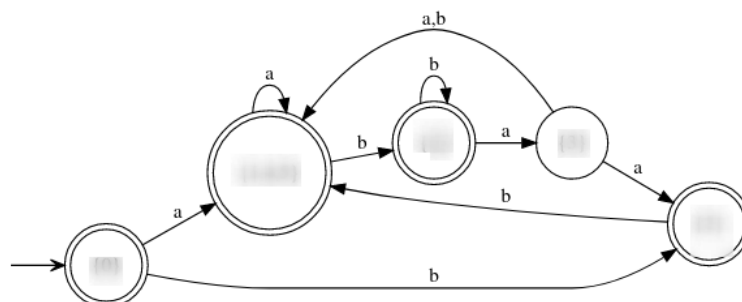
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

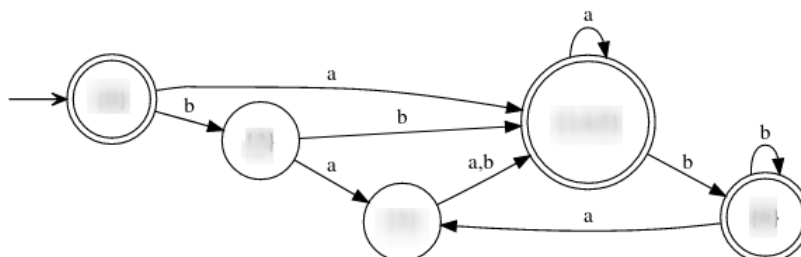
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



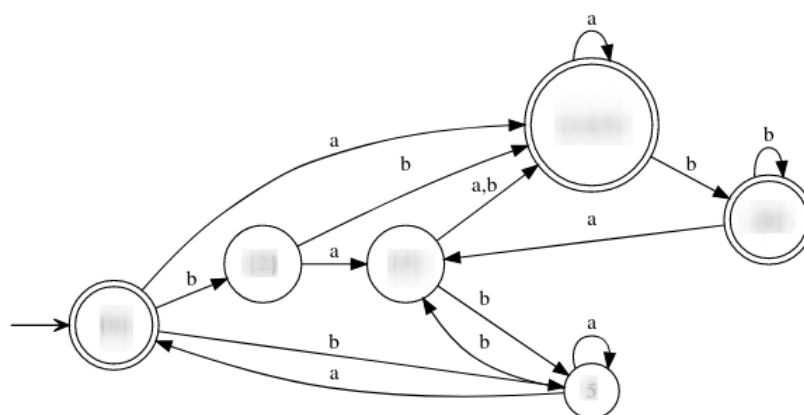
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

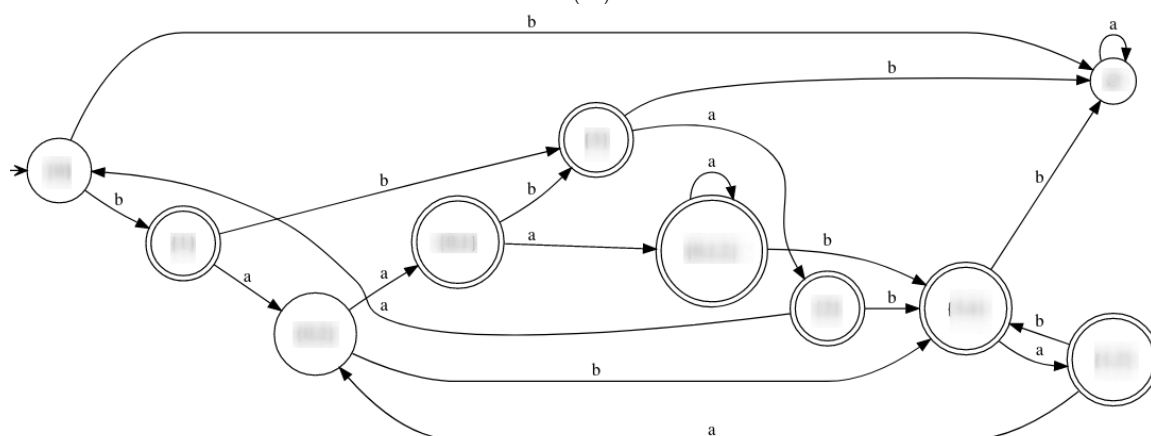


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c	d	e	f	g	h	i

Question 4 :

	b		d	e

Question 5 :

a		c		e				i	j	k

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b		d	e								m	n

Question 8 :

a					f	g	h	i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

	b	c	d	e	f	g		i	j			m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

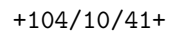
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.

☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ A a des états accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A accepte le langage universel.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ A possède un état puits ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

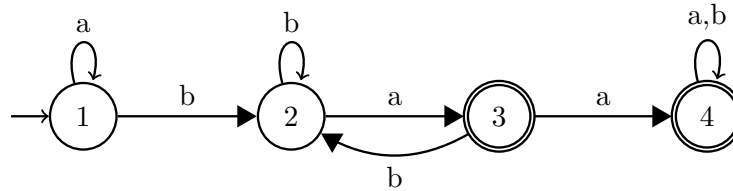
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

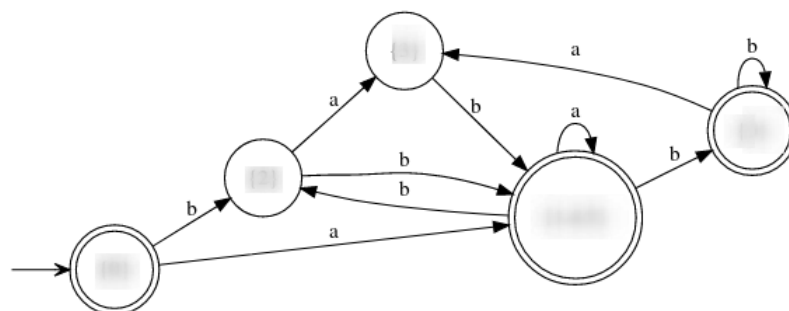
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 6 ☐ c 2 ☐ d 0 ☐ e 1 ☐ f 3 ☐ g 5

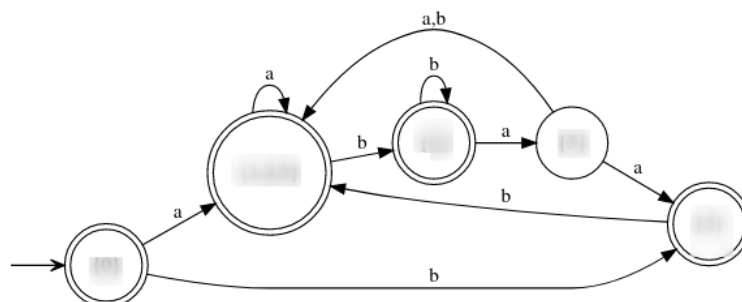
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

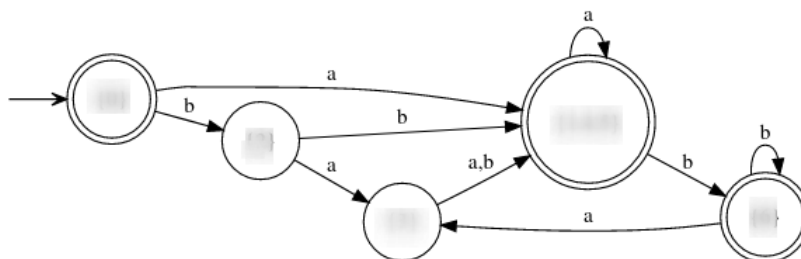
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



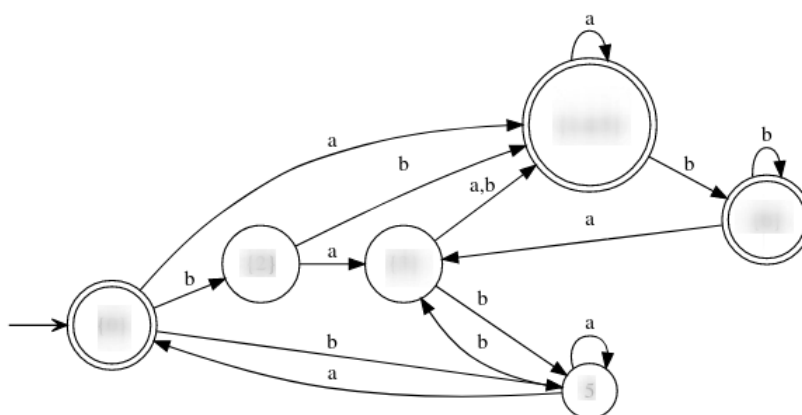
(-i-)



(-ii-)

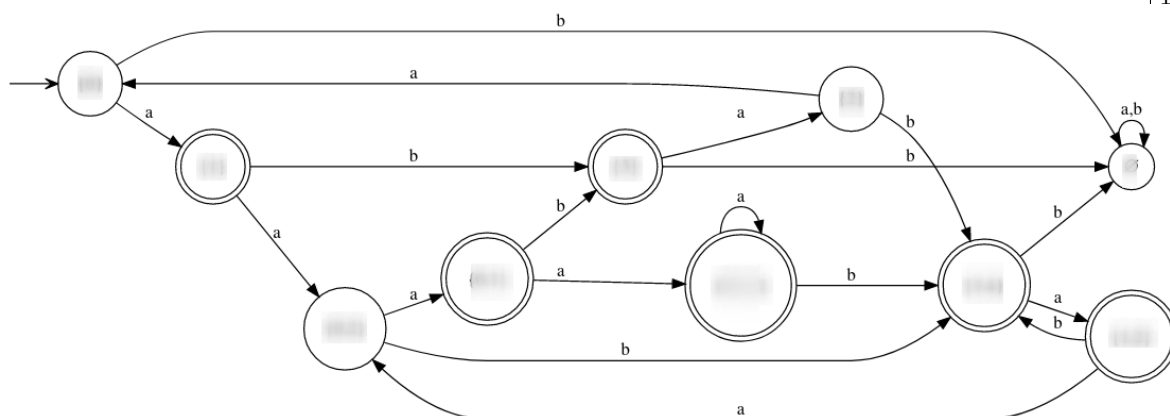


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

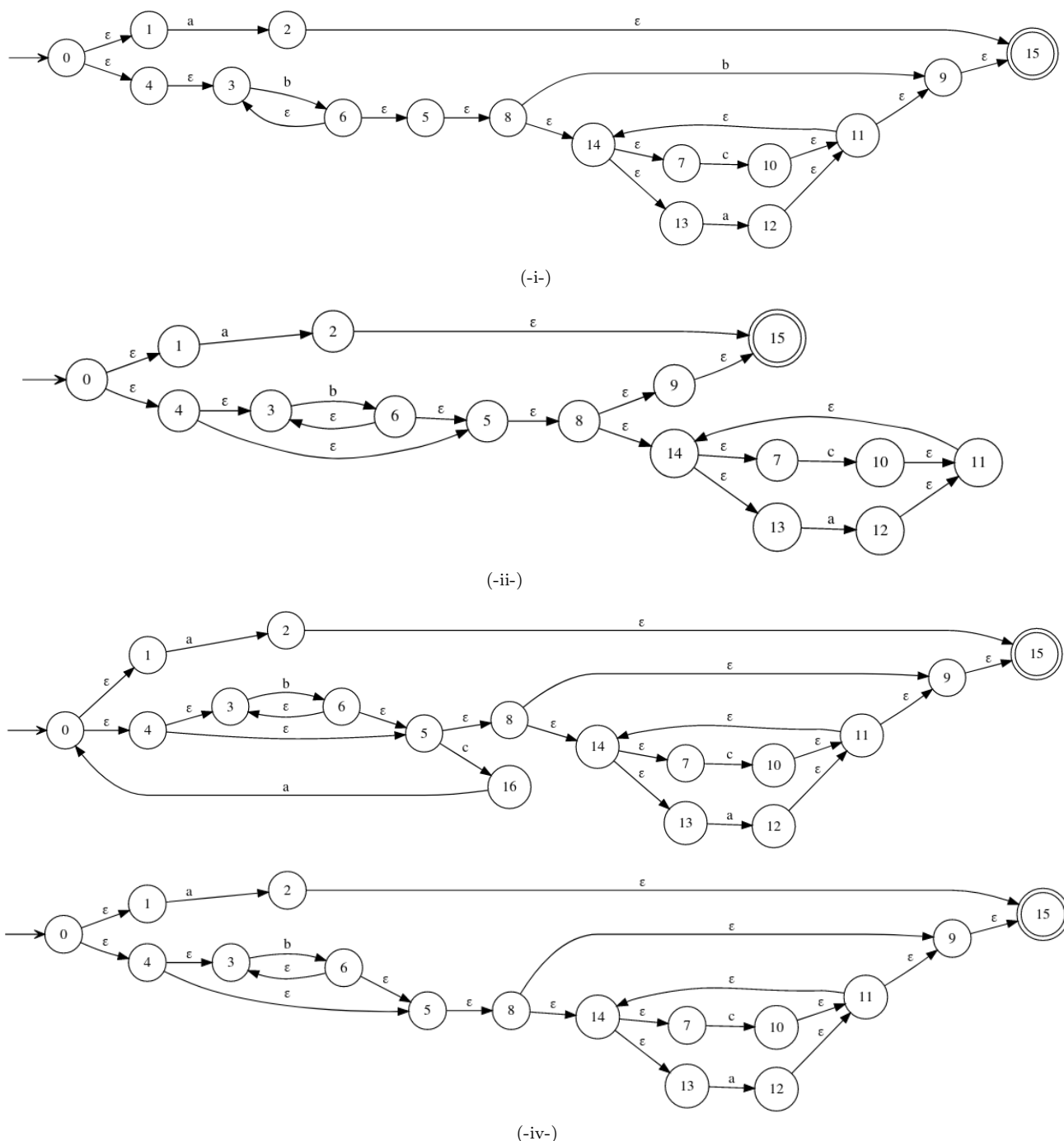


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c     ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g 

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d 

Question 6 :  ☐ b    ☐ f    ☐ j  ☐ l ☐ m ☐ n

Question 7 : ☐ a  ☐ c ☐ d  ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 :    ☐ d  ☐ f ☐ g  ☐ i ☐ j ☐ k

Question 9 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 :  ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f  ☐ h ☐ i ☐ j  ☐ l 

Question 12 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

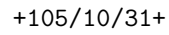
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a 

Question 17 :  ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. A single solid horizontal line runs across the top of the writing area. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f A possède un état puits ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ h A a au moins un état non accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ u est accepté par A .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

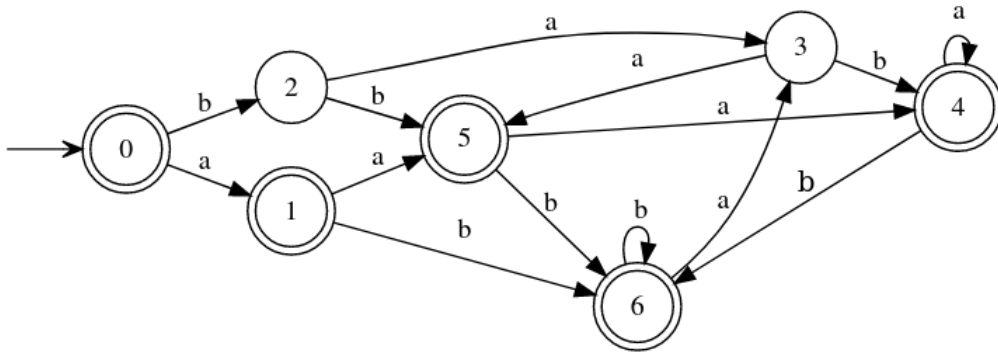
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

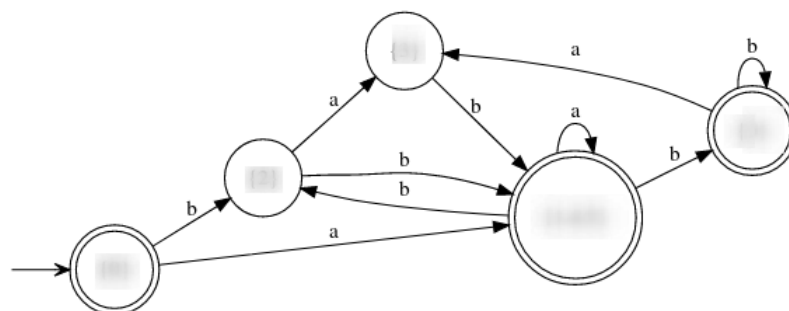
La constante d'itération minimale de ce langage est :

- ☐ a 5 ☐ b 1 ☐ c 3 ☒ d 4 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 2

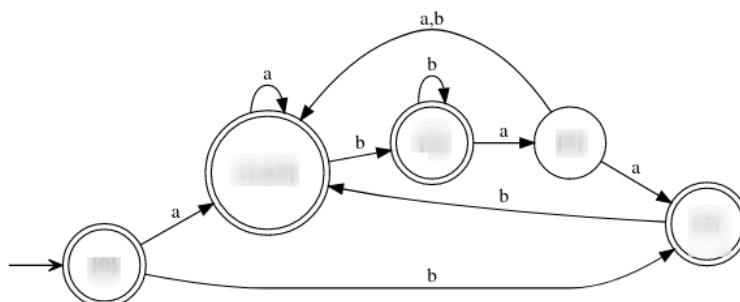
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

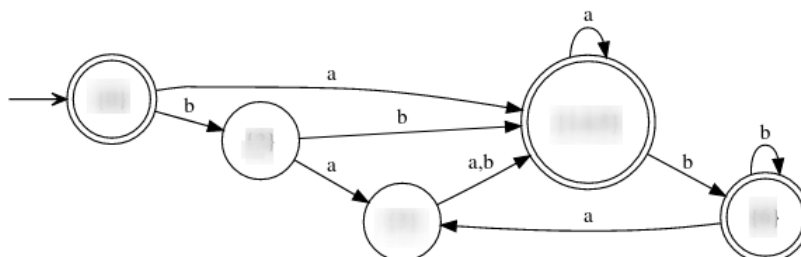
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



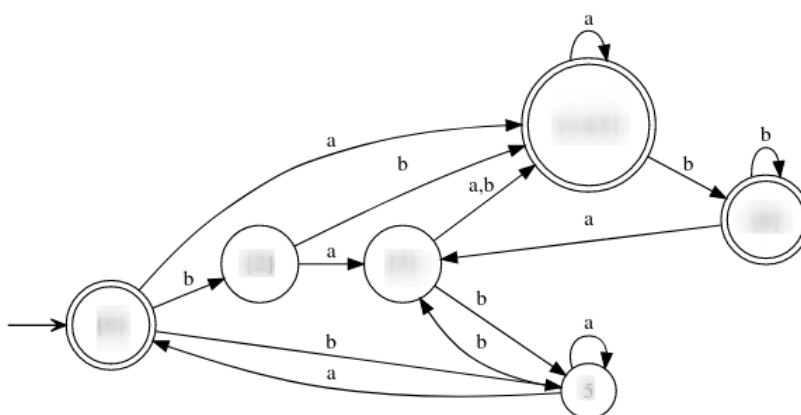
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



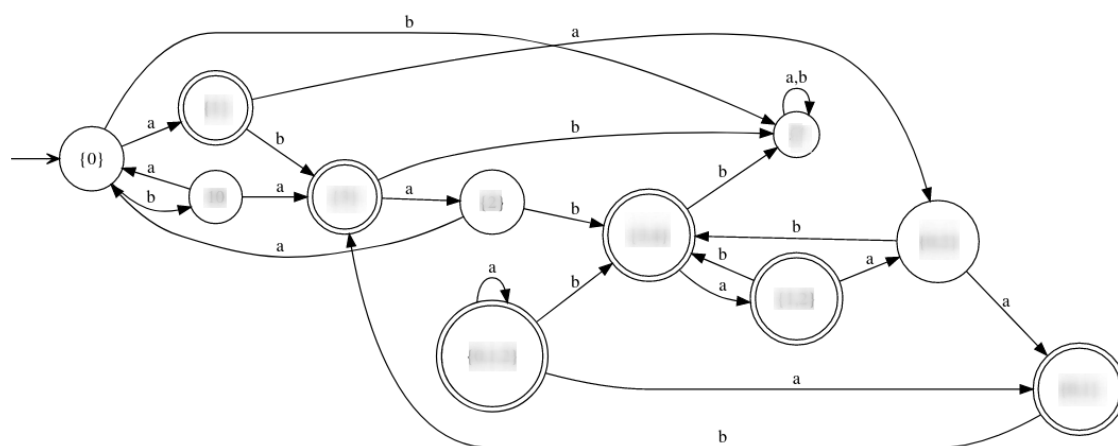
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c		e	f	g	h	i

Question 3 :

		c	d	e			h	i	j

Question 4 :

a		c				g	h		j	k

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

	b					h		j		l	m	n

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d		f	g	h		j			m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

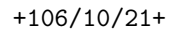
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e A accepte le langage universel.
- ☐ f A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.

- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ k Un mot peut être infini. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ e A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
	☐ l	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$			

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ b	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

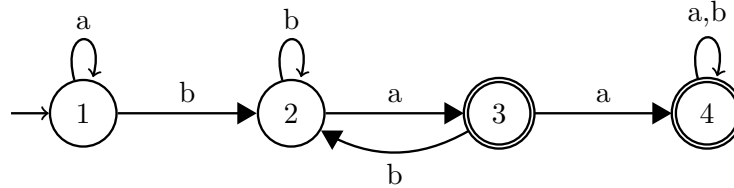
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

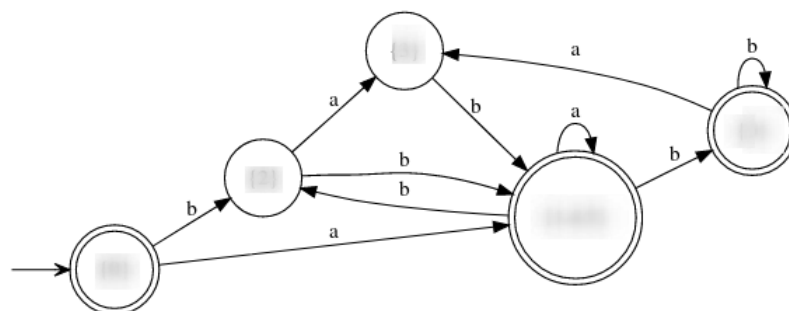
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 5 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 3 ☒ f 4 ☐ g 6

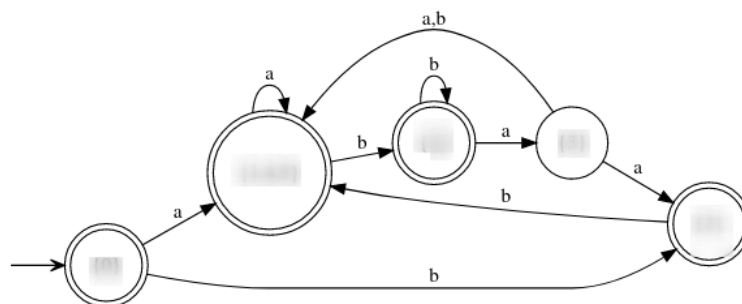
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

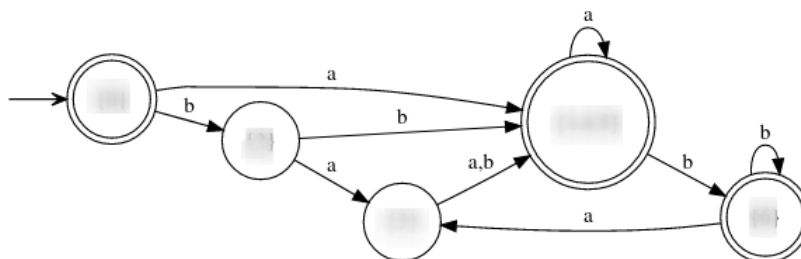
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



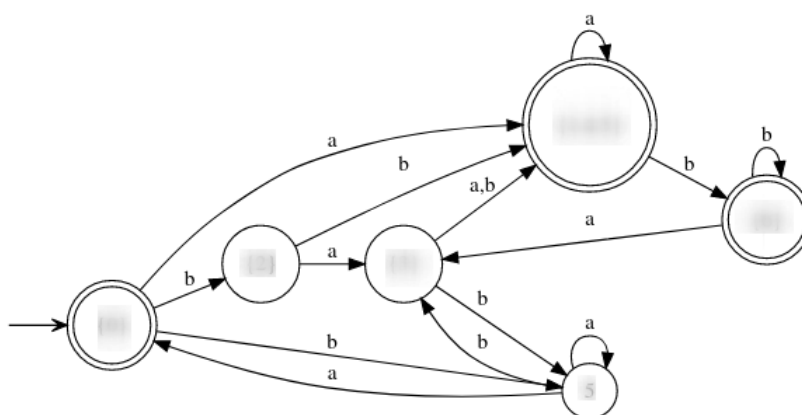
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



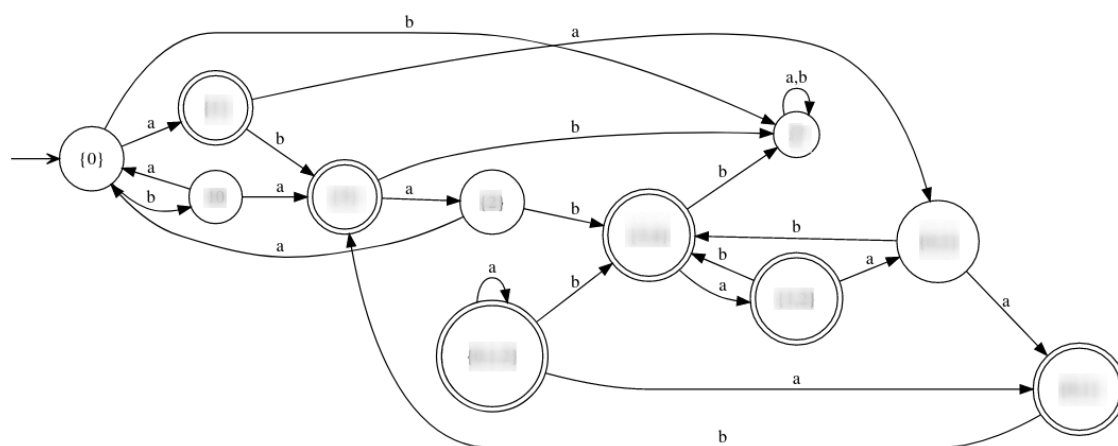
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

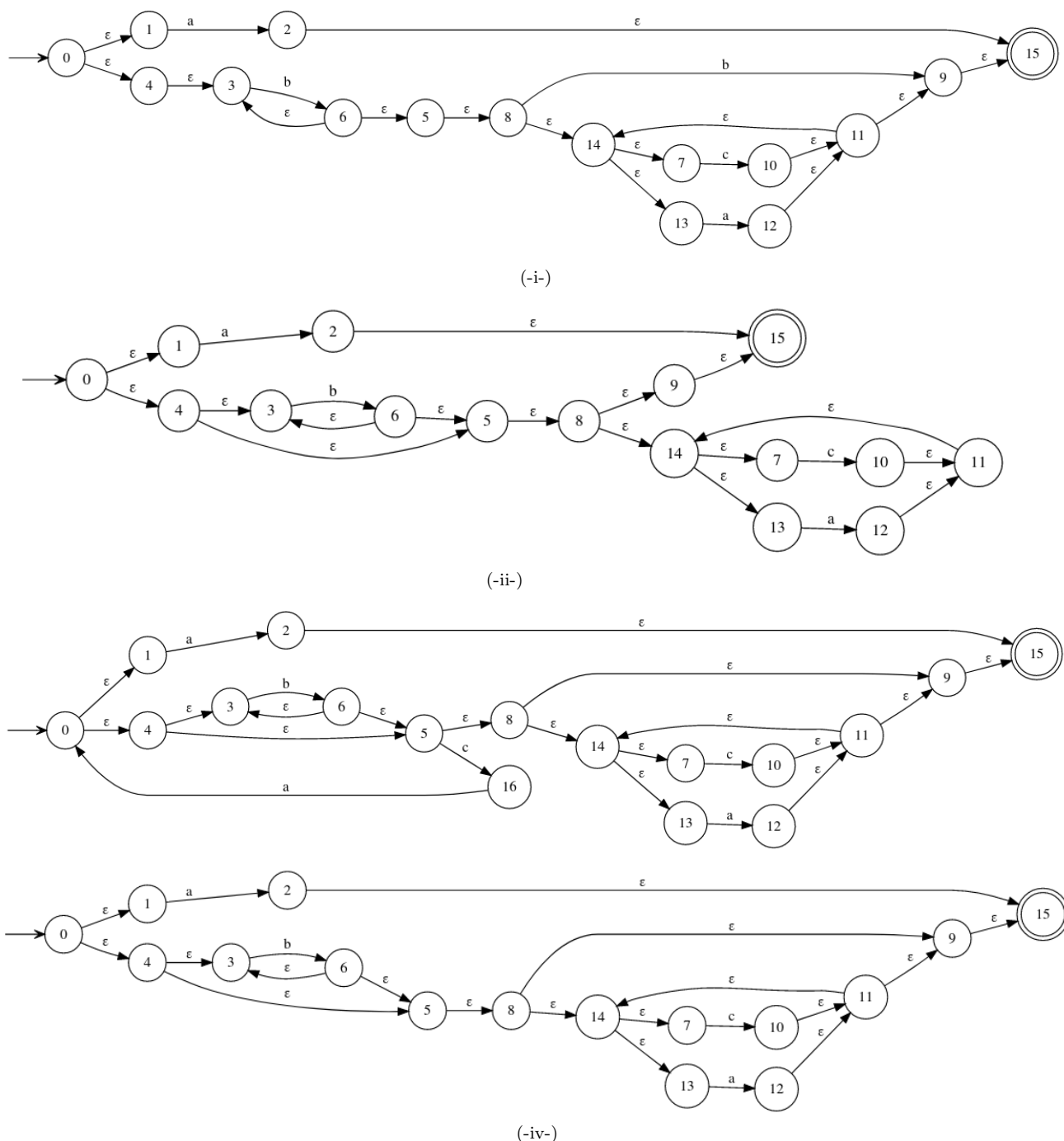


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e			h	i	j

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

			d	e						k	l	m	n

Question 7 :

a				e		g		i	j	k

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e	f			i	j	k		

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

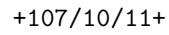
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three lines: two solid outer lines and a dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed in a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A accepte le langage universel.
☐ A possède un état puits ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A . ☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ A est complet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

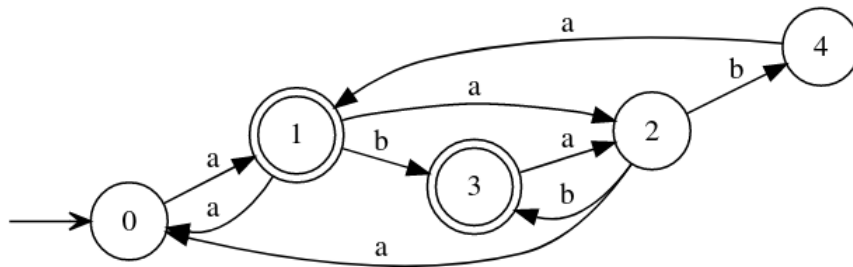
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

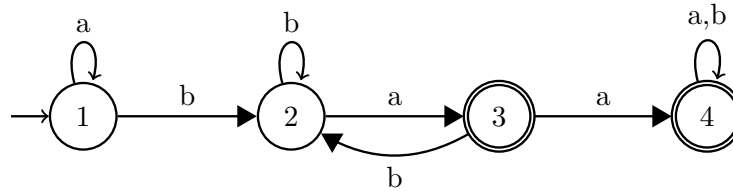
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

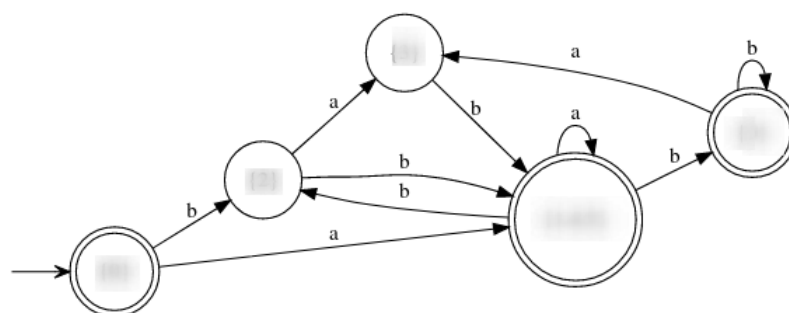
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 3 ☐ c 6 ☐ d 0 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 2

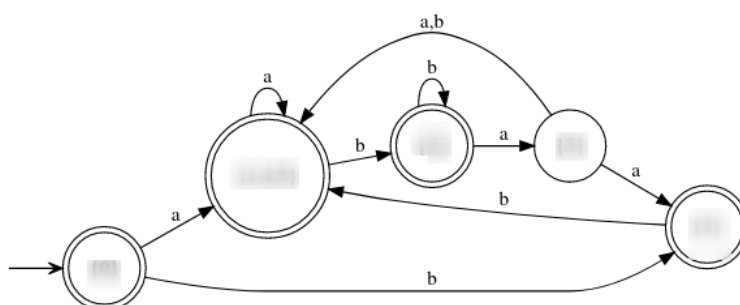
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

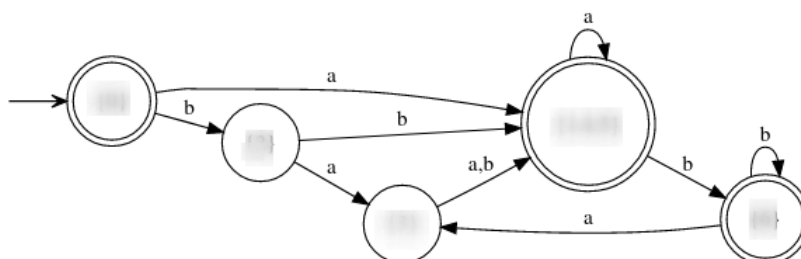
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



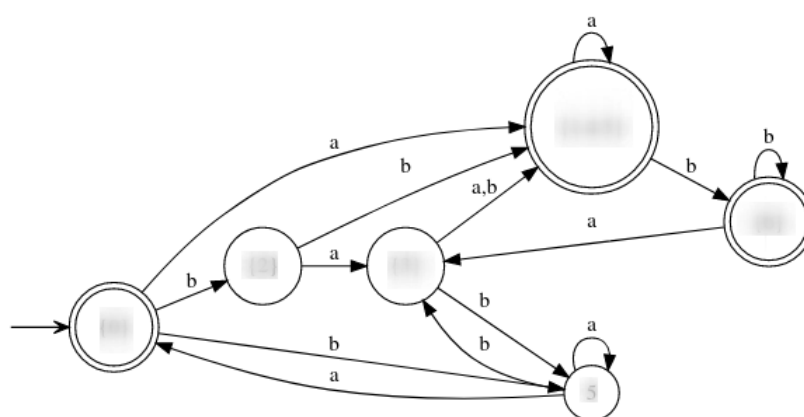
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

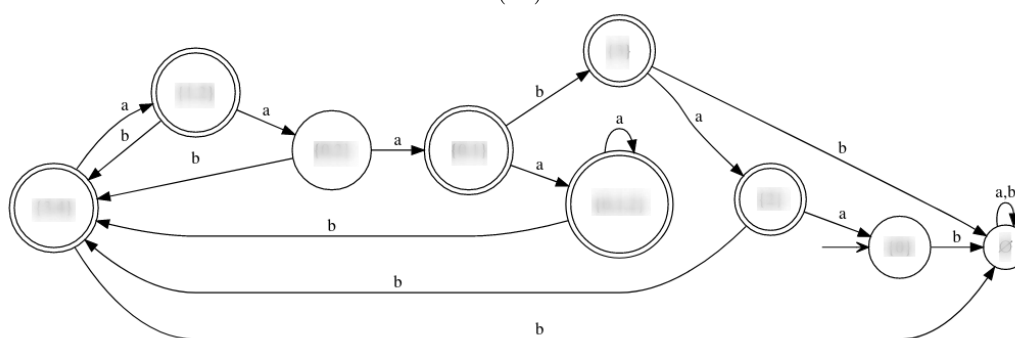
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



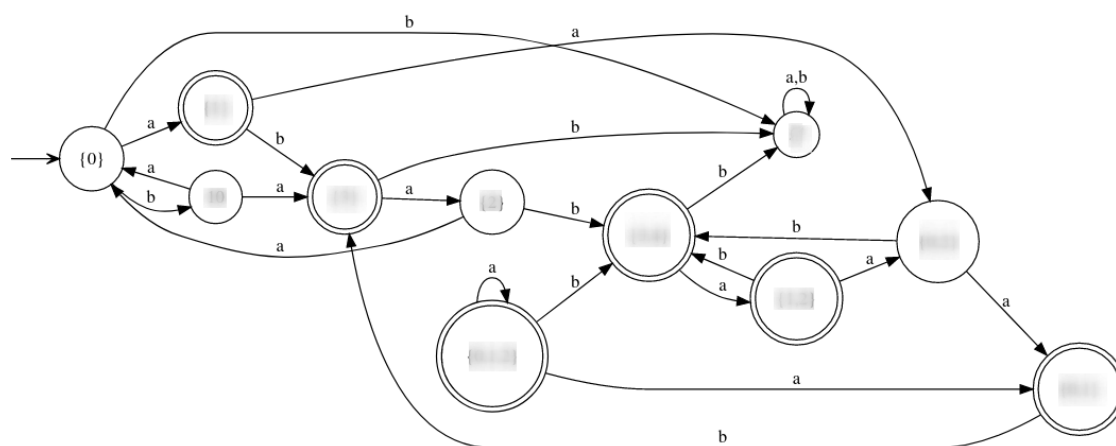
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

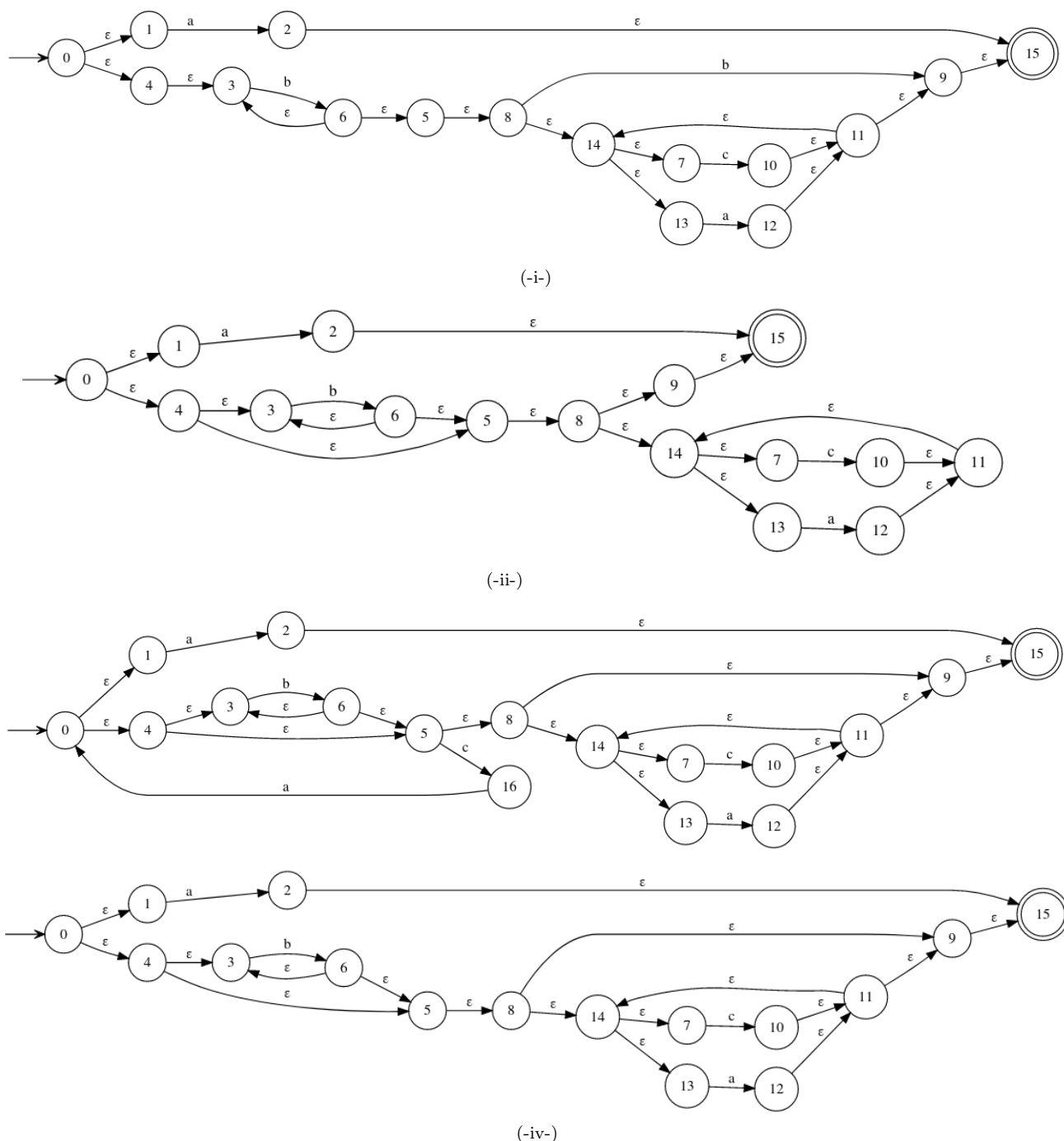


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e   h i j

Question 3 :  b c d e  g h i

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c d 

Question 6 :   c d  f   i j k

Question 7 :      g  i j k  m n

Question 8 :   c d e

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b c 

Question 11 :  b  d   g h i j k l m

Question 12 : a b c d e  g h

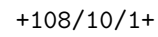
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

- ☐ f A accepte le langage universel.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ g A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

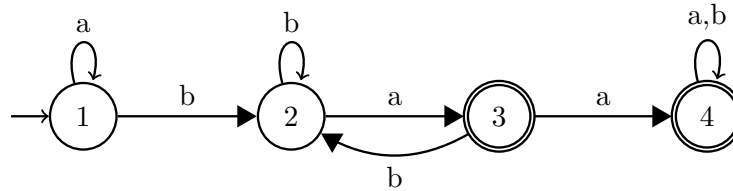
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

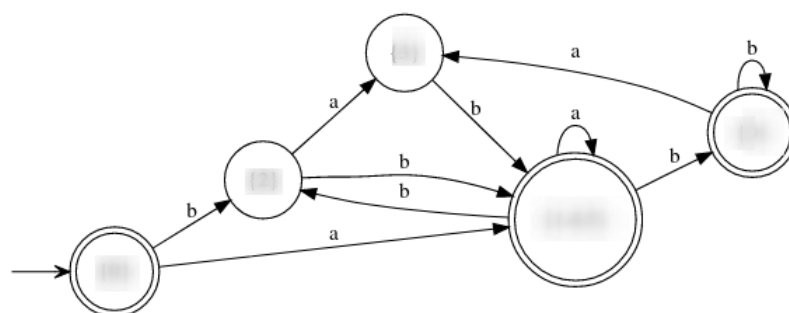
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 1 ☐ g 2

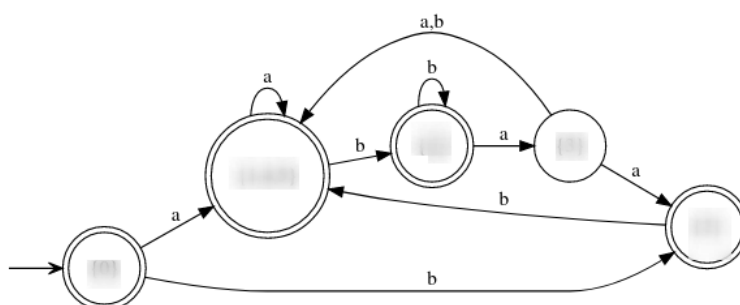
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

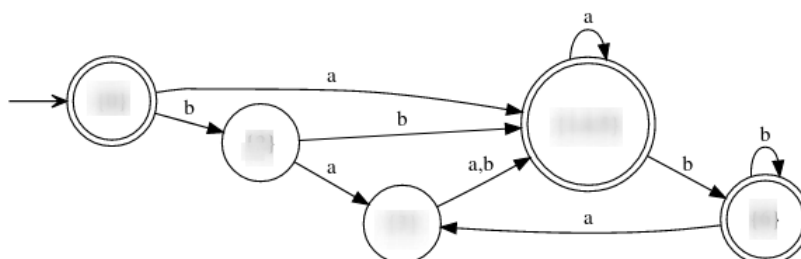
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



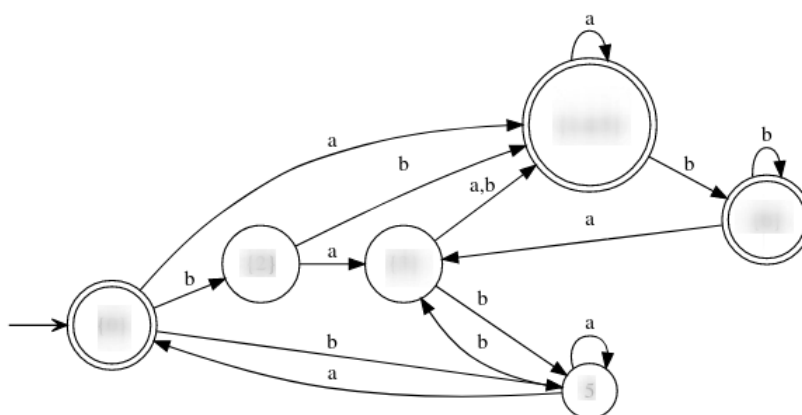
(-i-)



(-ii-)

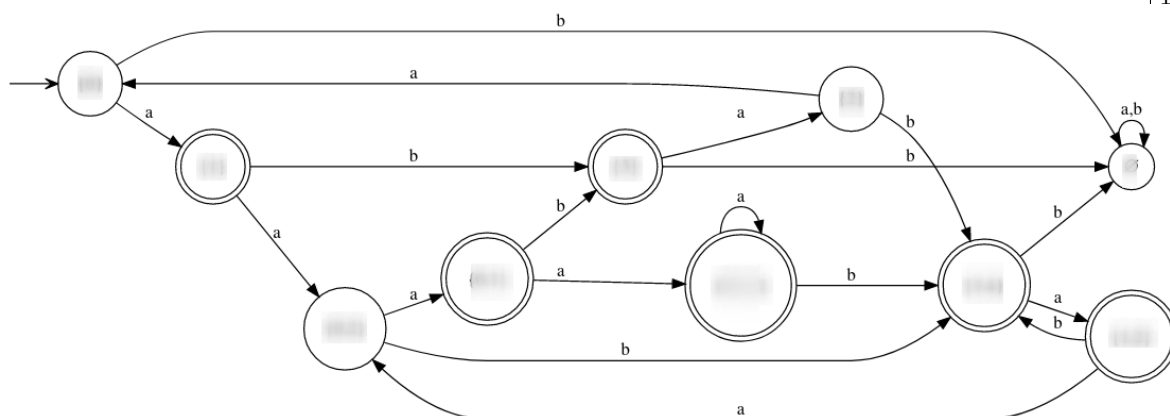


(-iii-)



(-iv-)

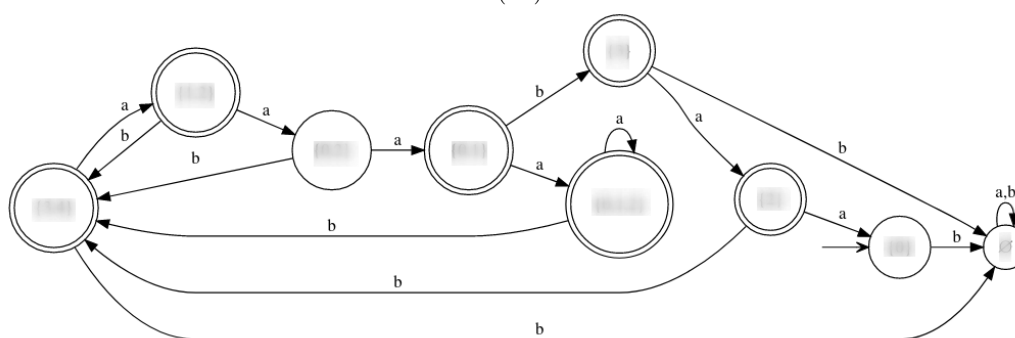
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

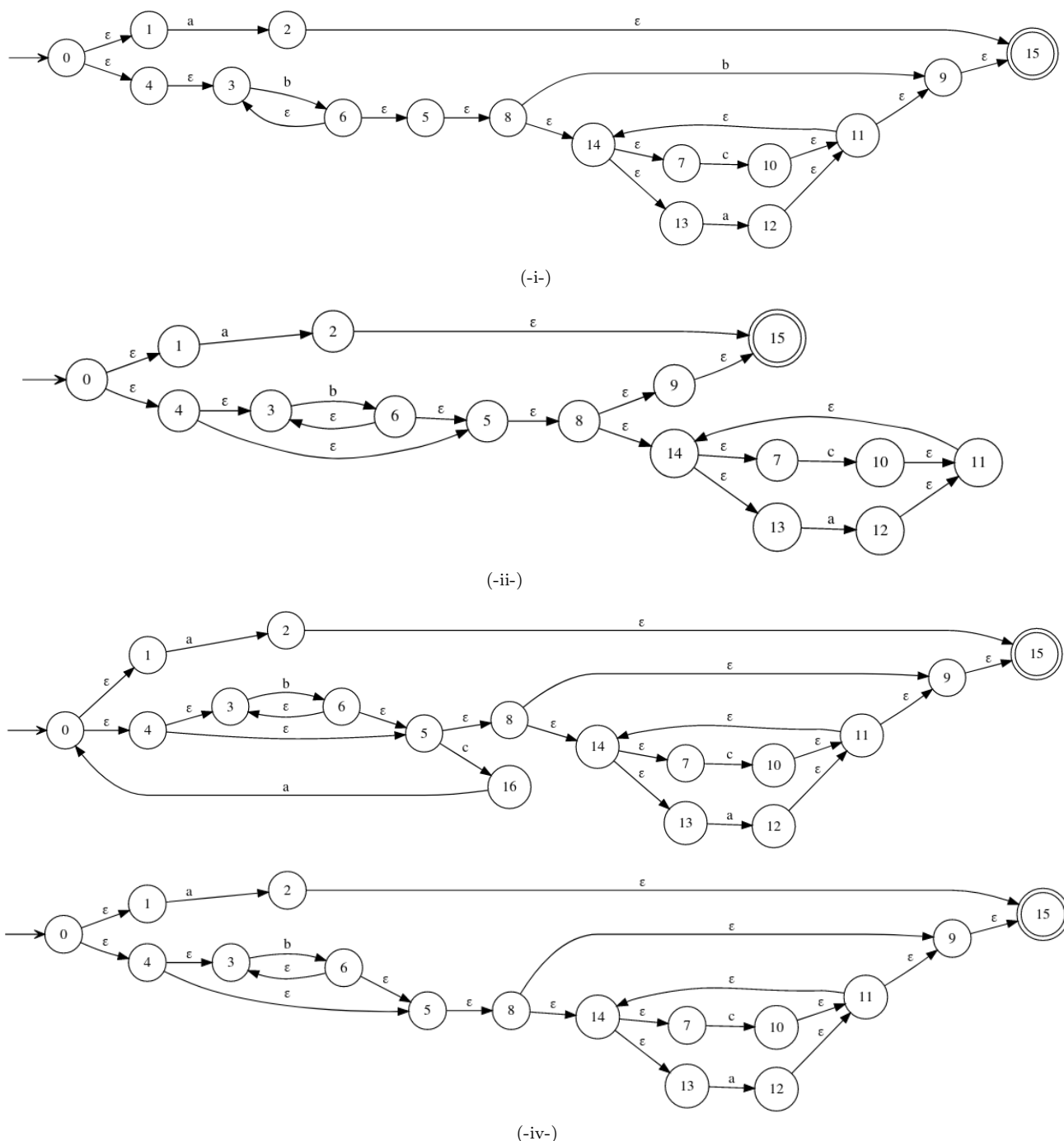


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 3 : ☐ ☐ ☐ ☐ e ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ k ☐ m ☐ n

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ c ☐ ☐ f ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ k

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 8 : ☐ b ☐ d ☐ e

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐

Question 11 : ☐ b ☐ ☐ e ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h

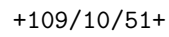
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ b A possède un état puits
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ d A accepte le langage universel.
- ☐ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une fonction.
- ☐ b Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ c Un mot peut être vide.
- ☐ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ f Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ g Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ i Un mot peut être infini.
- ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot est une application.
- ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet.
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ u est accepté par A .
- ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a + b$
☒ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ $X_1 = a^+bX_2$
☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐ $X_1 = a^*b$
☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☒ $X_2 = b^*aX_3$
☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

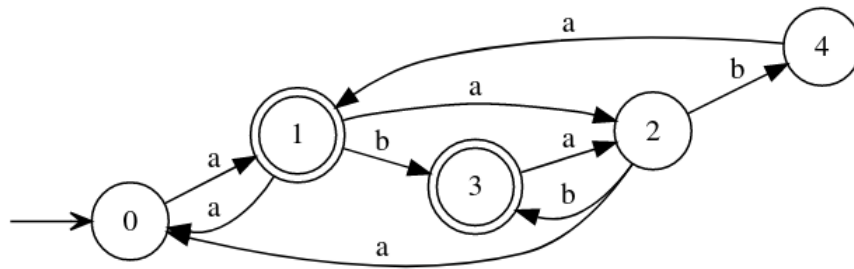
- ☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$
☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

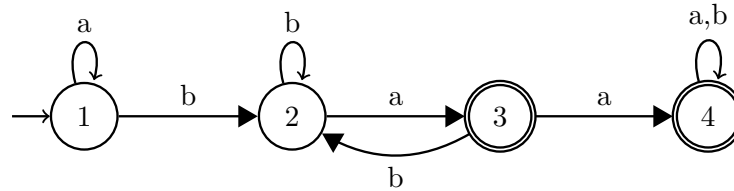
- ☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

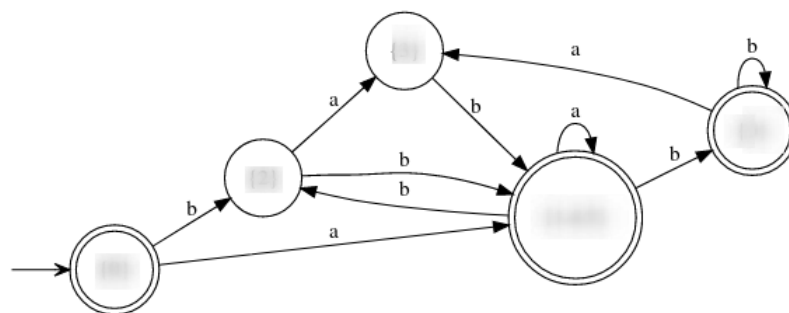
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 5 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 6

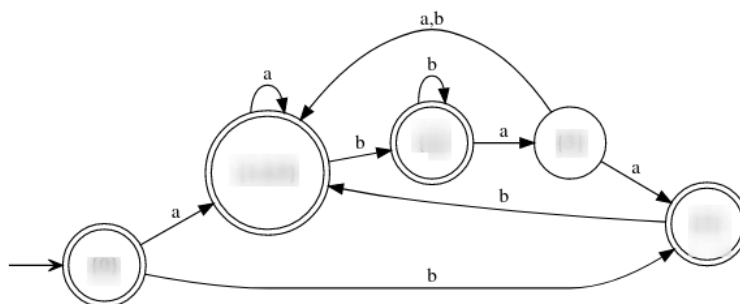
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

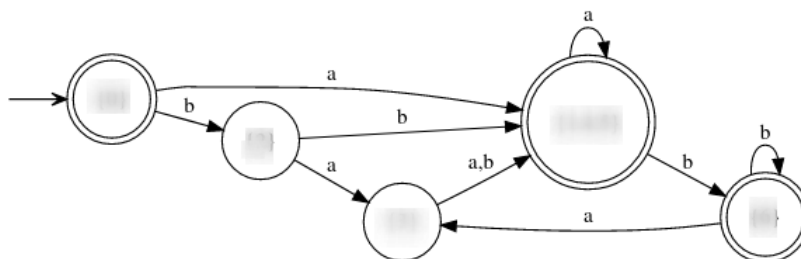
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



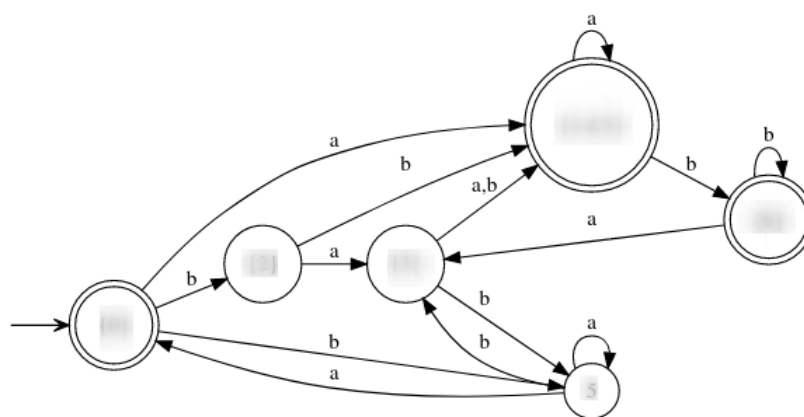
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

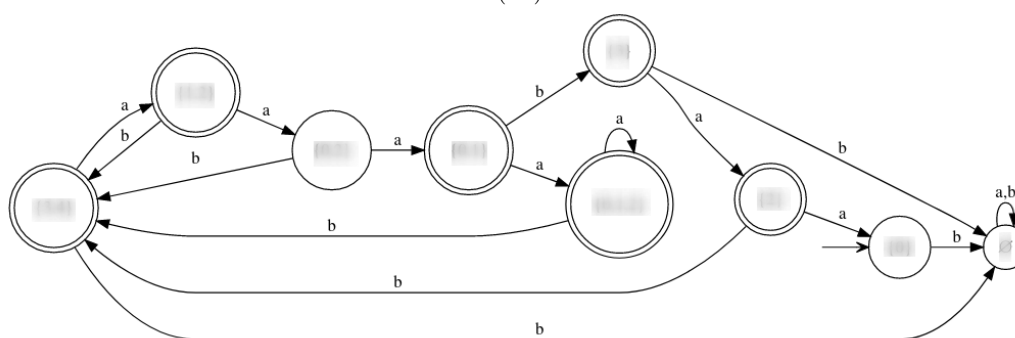
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



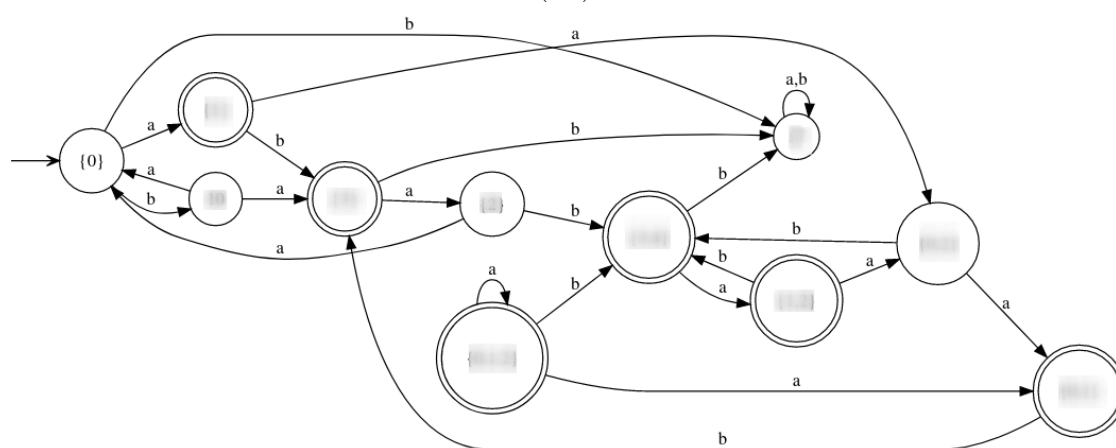
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 4 :

							h	i	j		l	m	n

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

	b			e		g	h	i	j

Question 7 :

	b		d			g	h		j	k

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d	e	f			i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

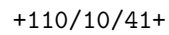
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
- ☐ f A accepte le langage universel.
- ☐ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ d Un mot est une application.
- ☐ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot est une fonction.
- ☐ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ i Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot peut être vide. ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ est fermé par préfixe.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_1 = aX_1 + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

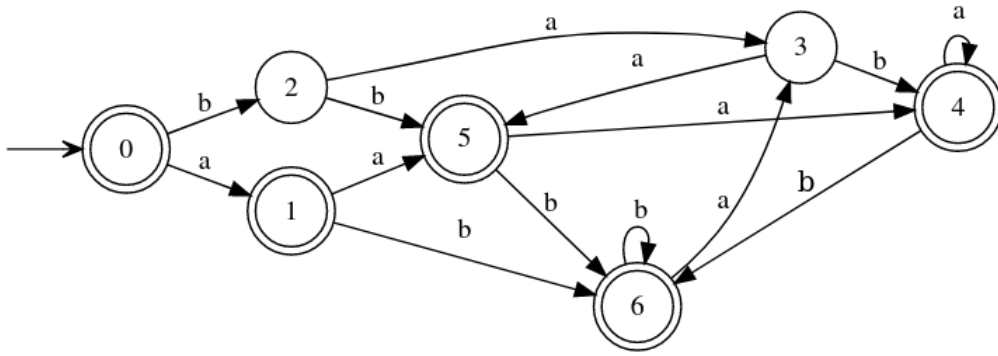
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

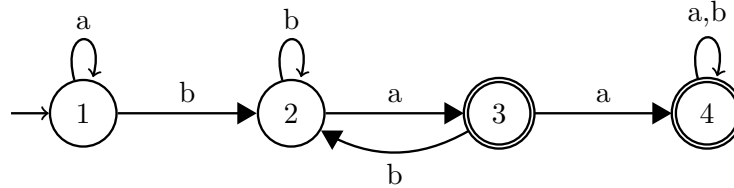
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

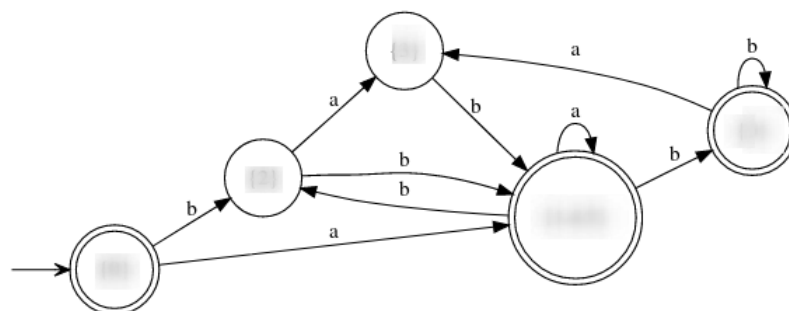
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 6 ☒ 4 ☐ f 2 ☐ g 0

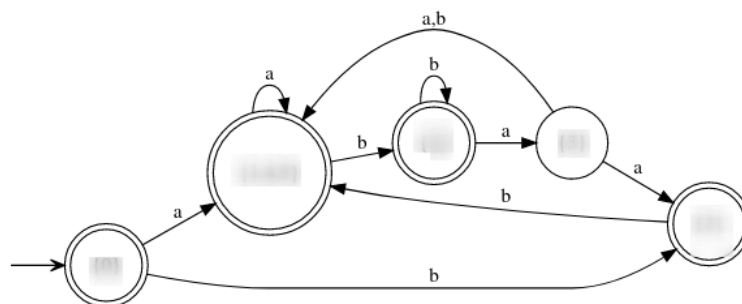
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

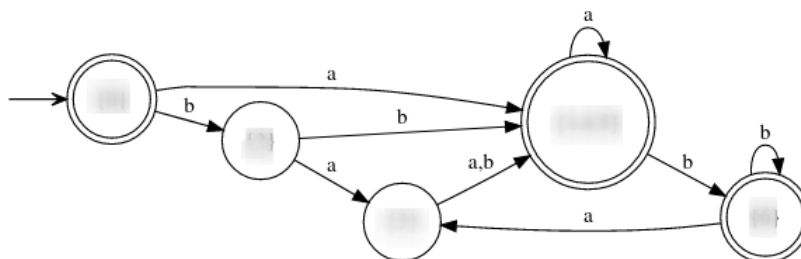
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



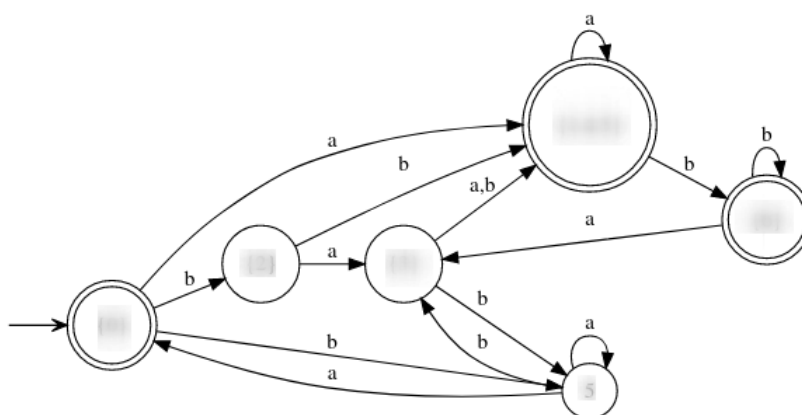
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



+111/9/32+

Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

		c					h		j		l	m	n

Question 5 :

a		c	d				h	i	j

Question 6 :

		c	d	e

Question 7 :

a	b		d					i	j	k

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

	b	c	d			g	h		j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

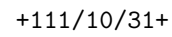
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ b Σ est fermé par facteur.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☒ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ f Σ^* est fermé par préfixe.
- ☒ g Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ b A n'est pas complet.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☒ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ e u n'est pas accepté par A .
- ☐ f A a au moins un état non accessible.
- ☒ g $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☒ h A a au moins un état accessible.
- ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ c A possède un état puits ☐ d A accepte le langage universel. ☐ | δ | = $|Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut être vide. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X.

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f u est accepté par A.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a+b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

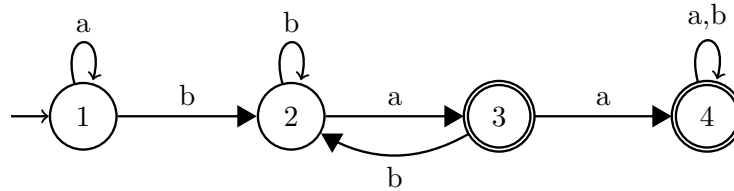
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

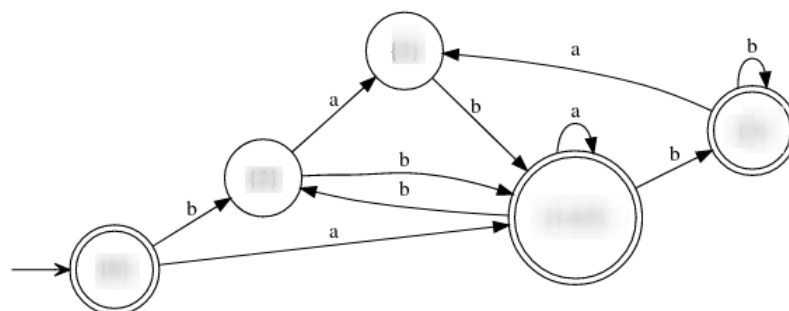
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 5 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 6 ☐ f 2 ☒ 4

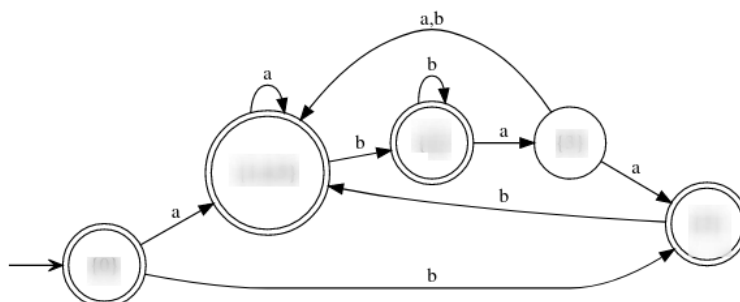
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

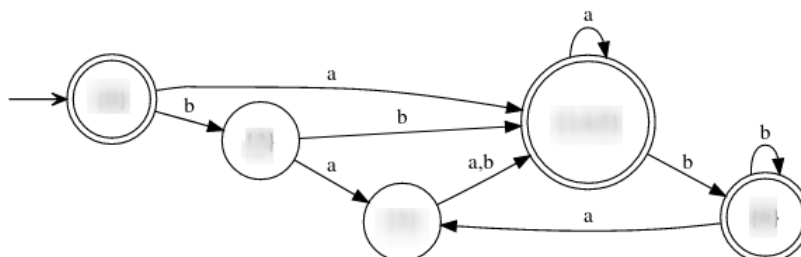
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



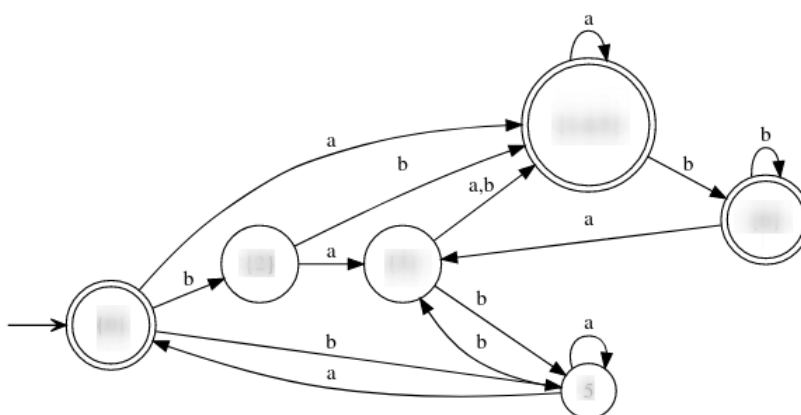
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

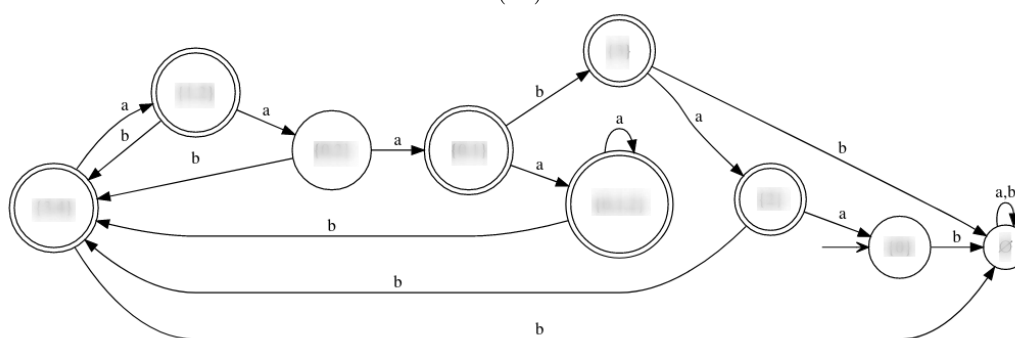
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



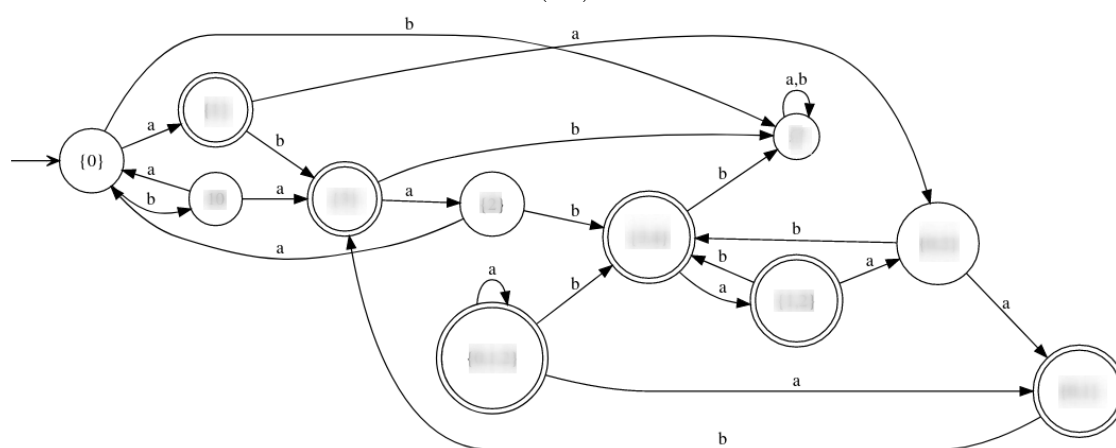
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

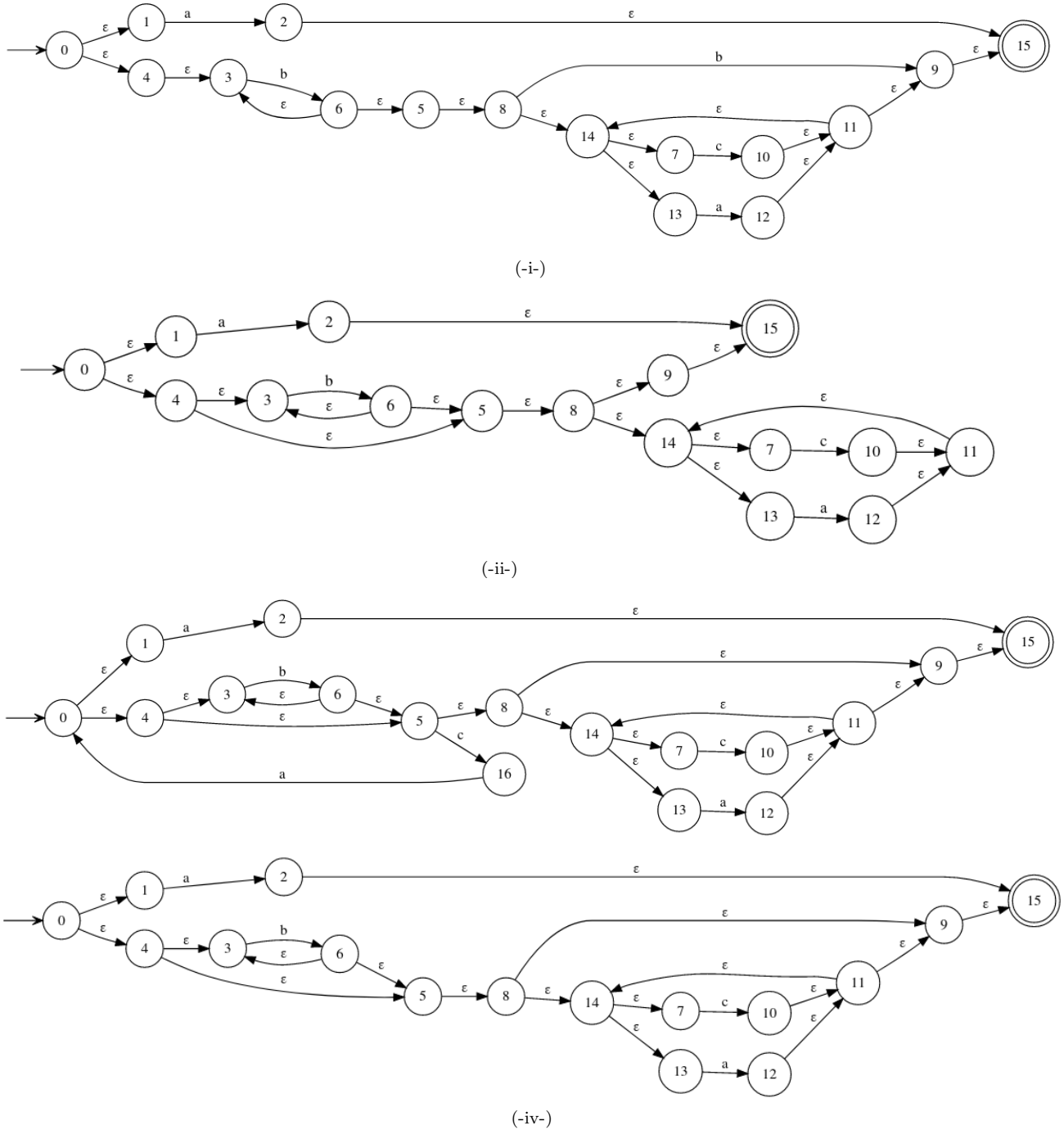


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

	b	c		e			h	i	j

Question 4 :

a		c			f			i	j	k

Question 5 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 6 :

	b			e	f		h					m	n

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b			e	f	g		i	j	k		m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

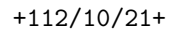
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Un mot peut être vide.
- ☐ g Un mot est une application. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ i Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ j Un mot est une fonction.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
- ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
	☐ $X_4 = a + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^+aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^+aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

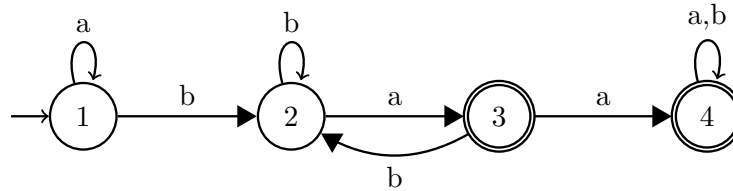
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

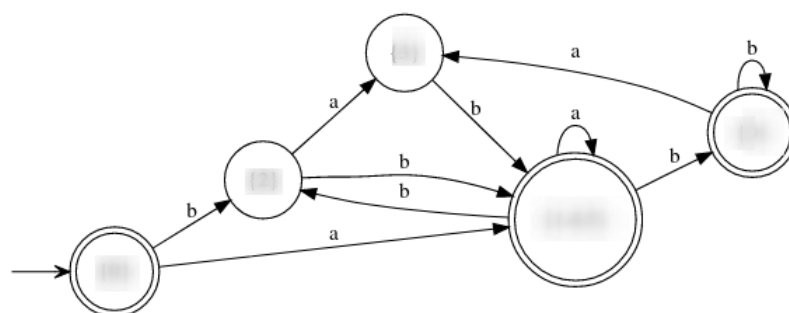
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 3

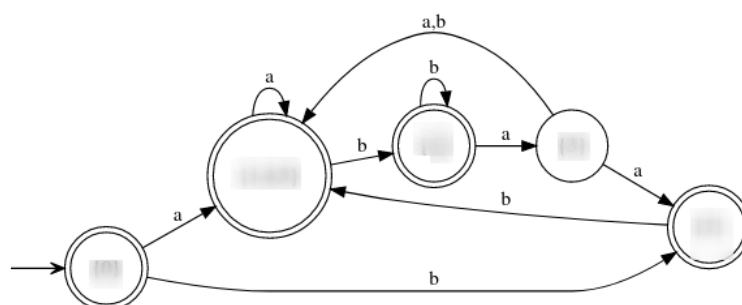
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

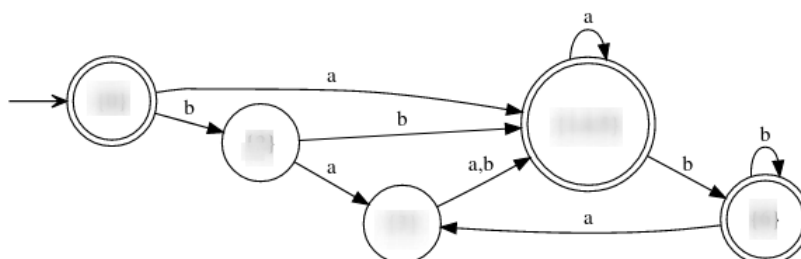
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



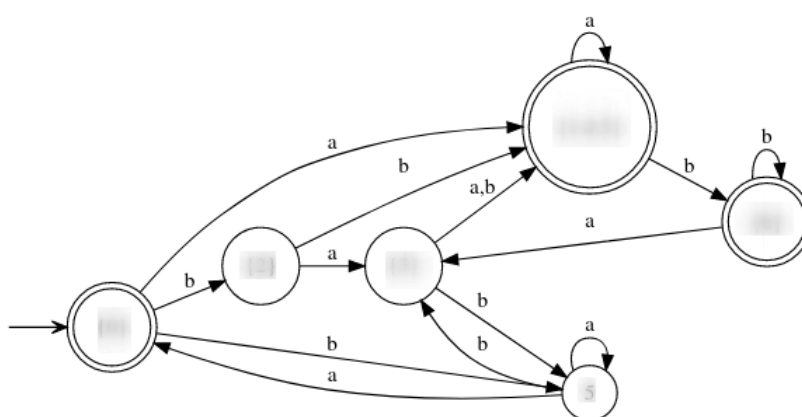
(-i-)



(-ii-)

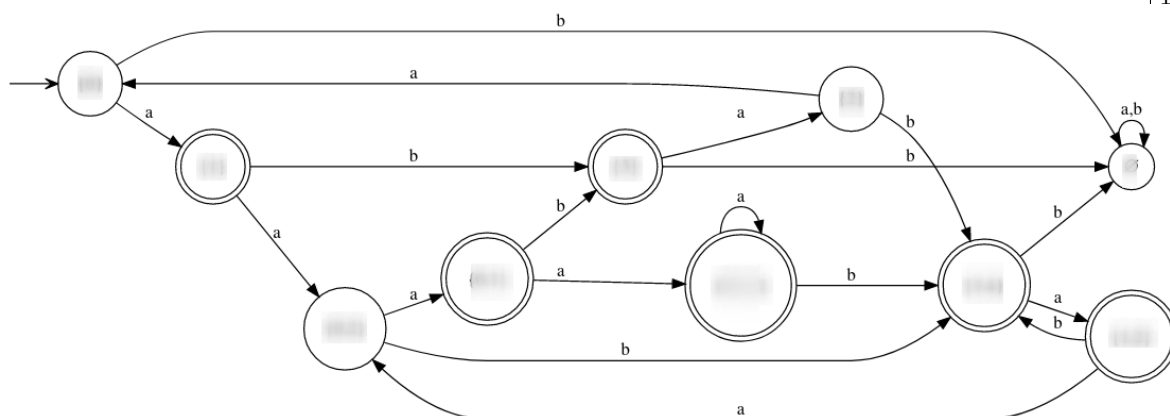


(-iii-)



(-iv-)

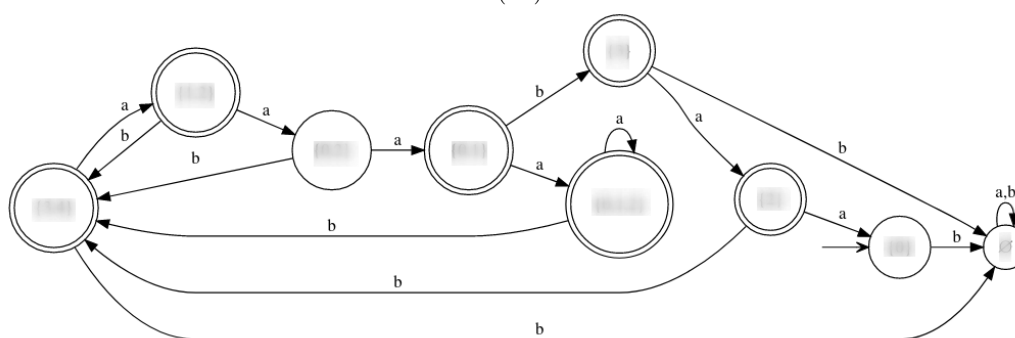
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

	b	c					h			k		m	n

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a		c		e	f	g	h	i

Question 7 :

	b	c				g	h	i	j

Question 8 :

	b	c	d					i	j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d			g	h	i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

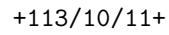
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three lines: two solid outer lines and a dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed in a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ^* est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☐ f Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Σ^* est fermé par préfixe.
☐ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être vide. ☐ b Un mot est une application.
☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ e Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ h Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ j Un mot peut être infini.
☐ k Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c A accepte le langage universel.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ A n'est pas complet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A .
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ A est complet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$
	☐ $X_1 = aX_1 + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☒ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☒ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

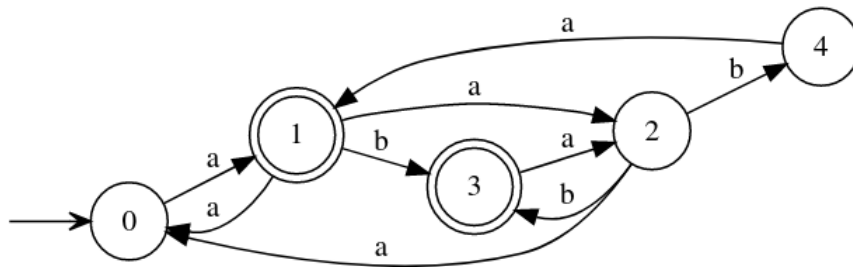
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

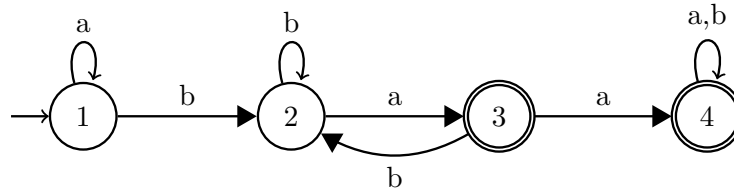
☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

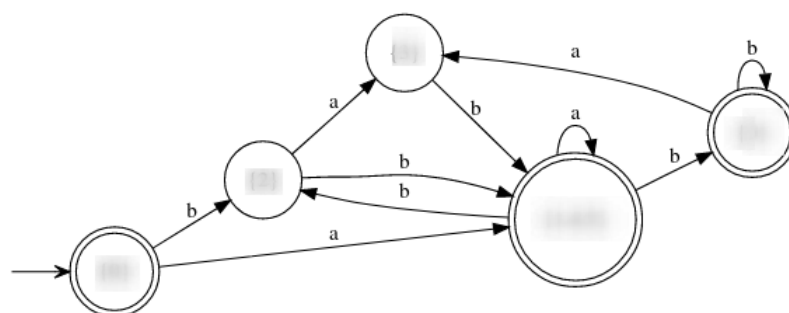
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 1 ☐ f 6 ☒ 4

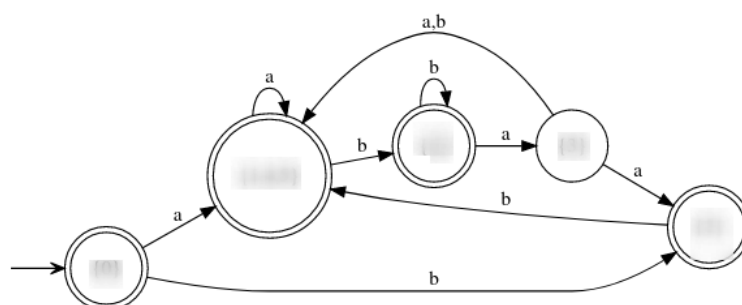
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

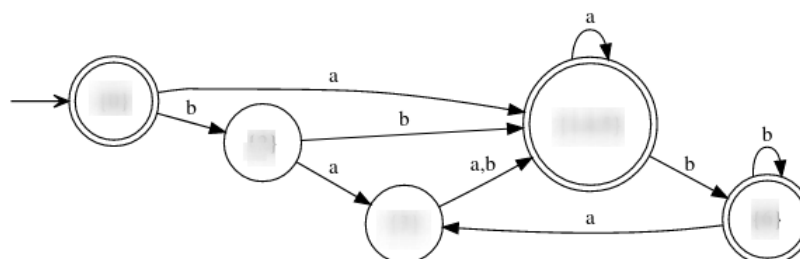
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



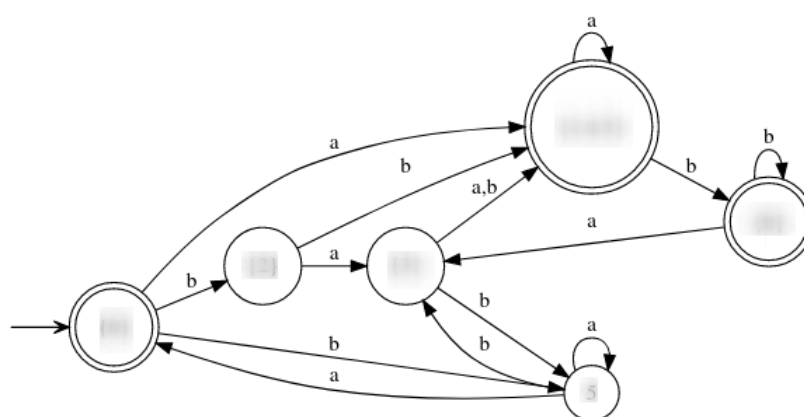
(-i-)



(-ii-)

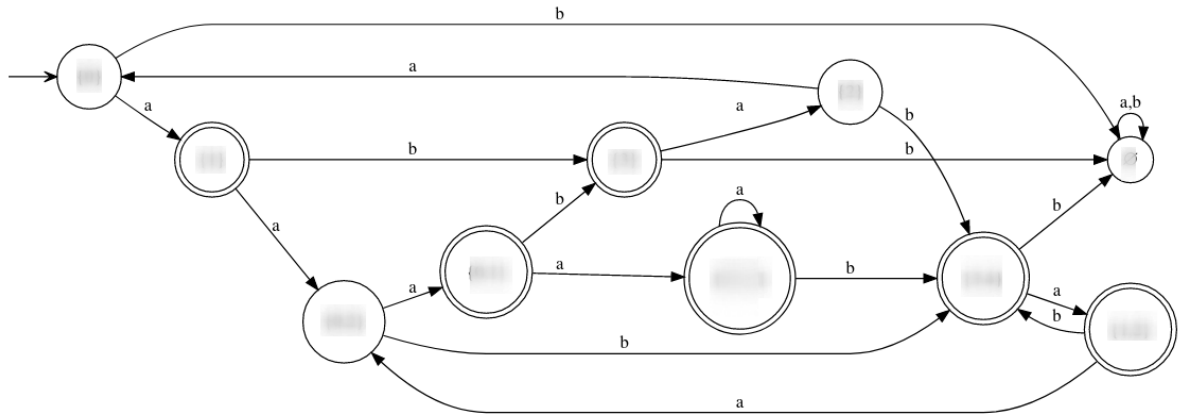


(-iii-)

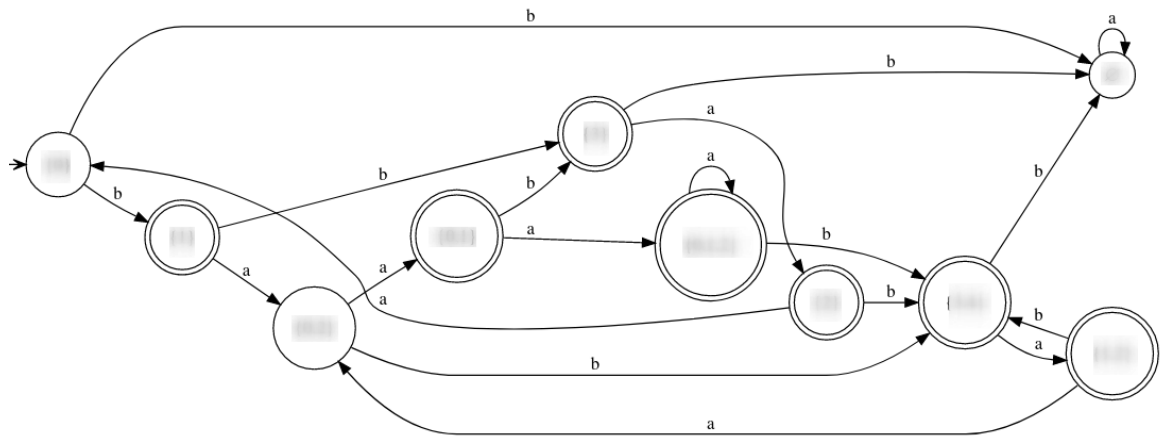


(-iv-)

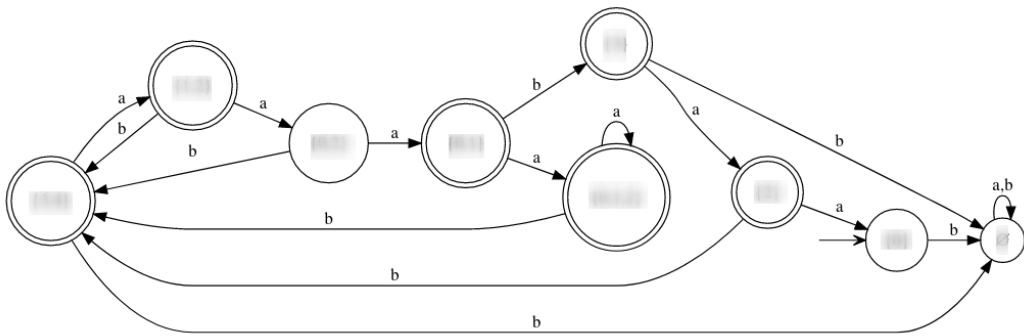
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



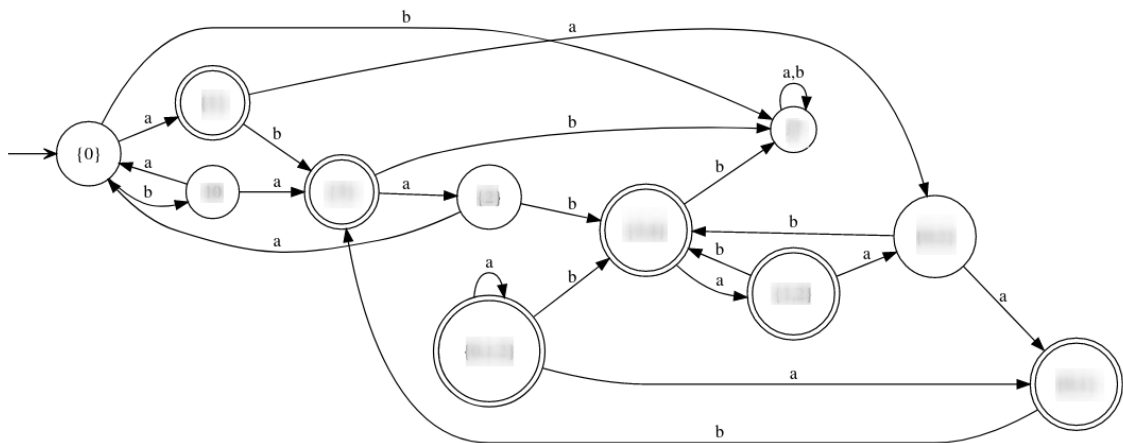
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d	e				i	j

Question 3 :

						g		i	j		l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 5 :

	b	c	d			g			j	k

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d		f		h	i	j	k		m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

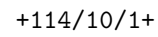
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot est une application.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A est complet. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☒ c Σ^* est fermé par facteur.
☐ d Σ est fermé par préfixe. ☒ e Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ f Σ^* est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A n'a pas d'état accepteur. ☒ c A a au moins un état accessible.
☒ d u n'est pas accepté par A . ☒ e A n'est pas complet.
☐ f A a au moins un état co-accessible.
☒ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_4 = (a + b)X_4$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ c $X_4 = a + b$ ☐ d $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ e $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ f $X_1 = aX_1 + b$ ☐ g $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$ ☐ i $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ j $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ m $X_3 = aX_2 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ b $X_4 = a^* + b^*$ ☐ c $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ d $X_4 = a + b$
☒ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ f $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b$ ☐ c $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ d $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ b $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$ ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

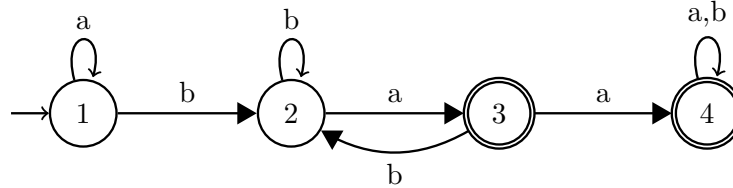
- ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ c $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

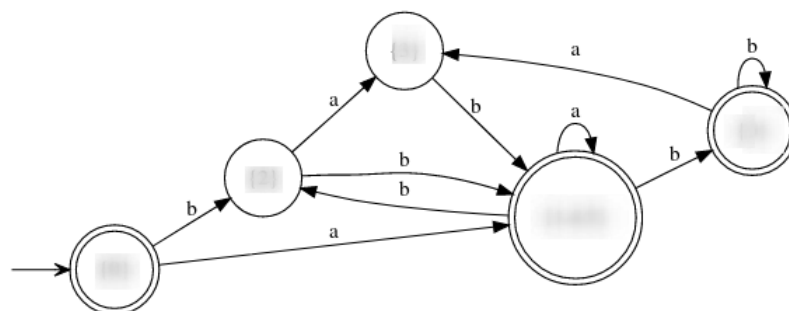
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 5 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 0 ☐ f 3 ☐ g 6

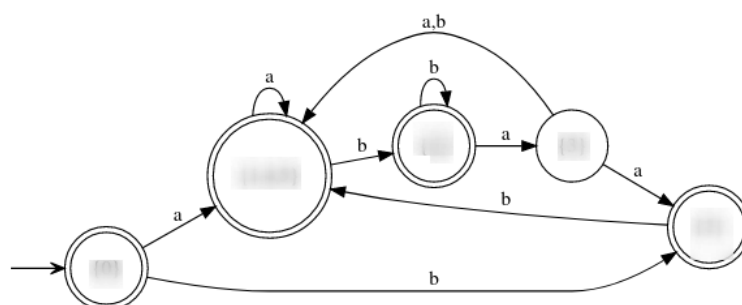
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

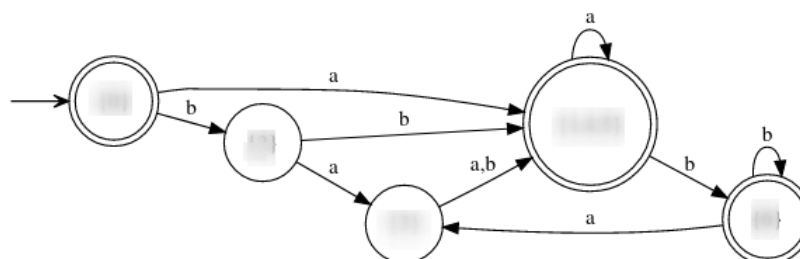
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



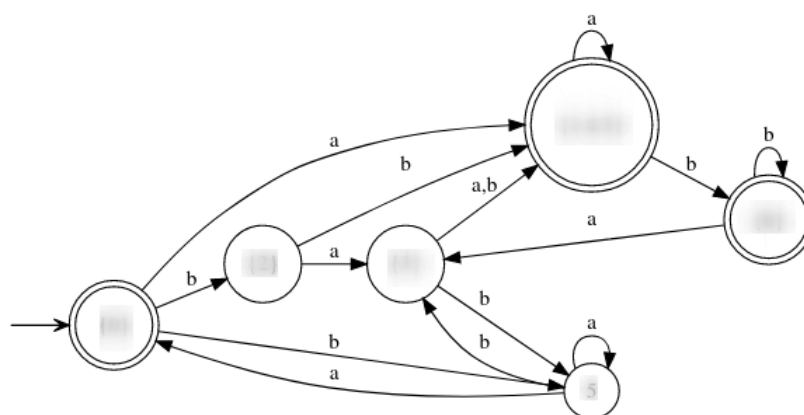
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservez enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d    i  k  m n

Question 3 : a b c d 

Question 4 :   c d e

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :  b  d   g h i j

Question 7 : a b c d   g h i

Question 8 :  b   f  h i j k

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a  c d e f g  i j   m

Question 12 : a b c d  f g h

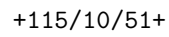
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ est fermé par facteur.
 ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ u n'est pas accepté par A .
 ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ A a au moins un état co-accessible.
 ☐ A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A n'est pas complet.
 ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
 ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ A possède un état puits
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet.

☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ A a des états accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une application.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une fonction.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-ii- ☐ la Figure 3-i- ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-iii- ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-ii- ☐ la Figure 4-i- ☐ la Figure 4-iii- ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

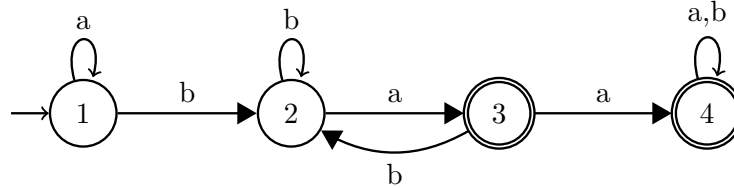
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

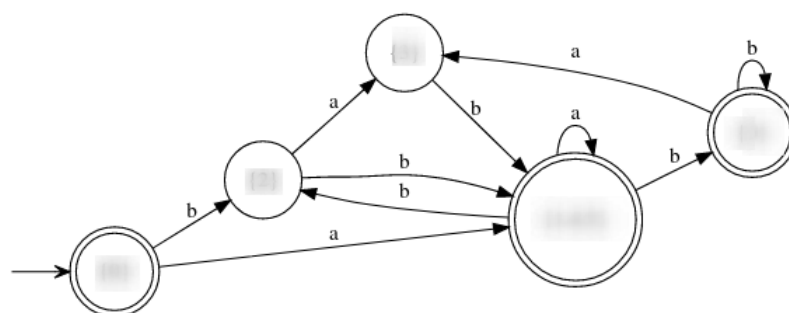
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 6 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 0 ☐ f 2 ☒ 4

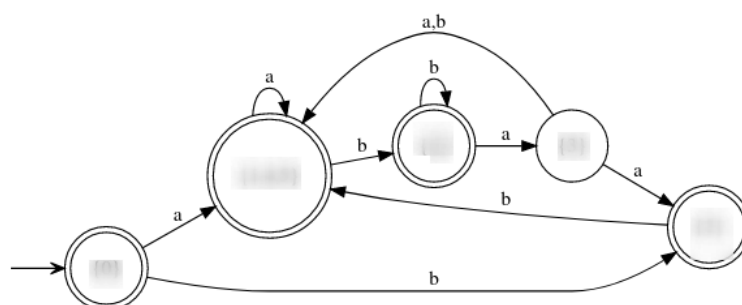
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

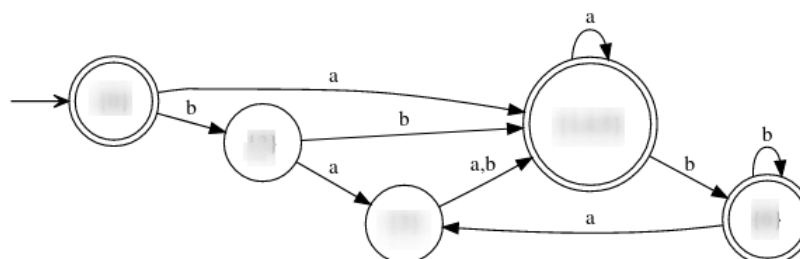
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



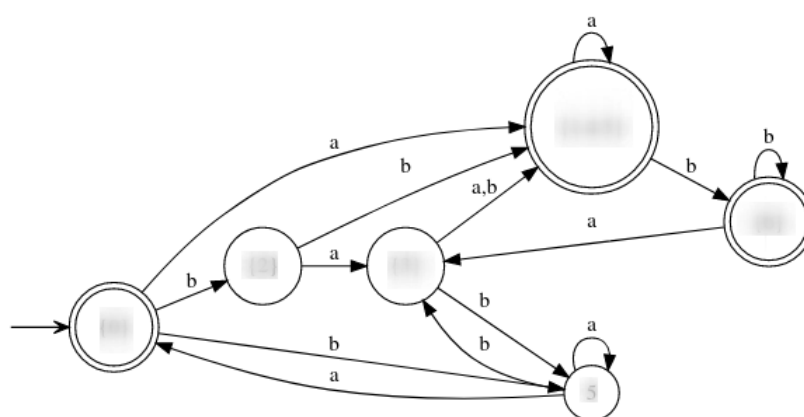
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d   g h i j

Question 3 : a   d e f    j k

Question 4 : a b c d  f  h i

Question 5 : a   d e

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 : a b   f g     m n

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b   e f g h i j  l 

Question 12 : a  c d e f g h

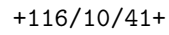
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ désigne l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A a au moins un état non accessible.

☐ A a au moins un état accessible.

☐ A n'est pas complet.

☐ u n'est pas accepté par A .

☐ e A n'a pas d'état accepteur.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ g A a au moins un état non co-accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ i A a au moins un état co-accessible.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits
- ☐ d A accepte le langage universel.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ e Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut être vide.
- ☒ Un mot est une application. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ i Un mot peut être infini. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

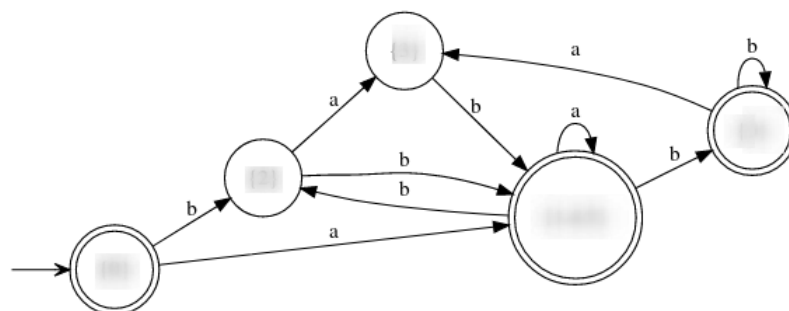
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 0 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 1

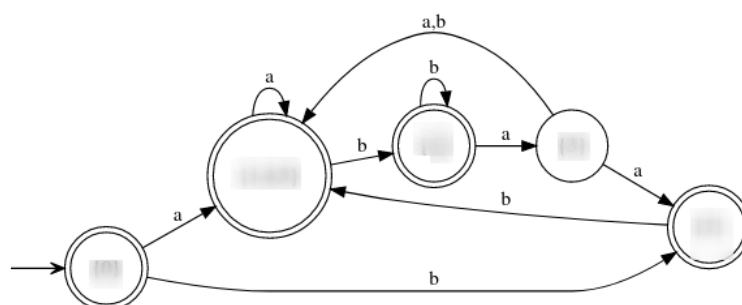
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

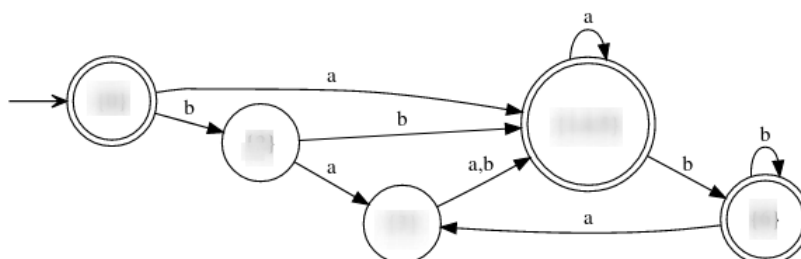
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



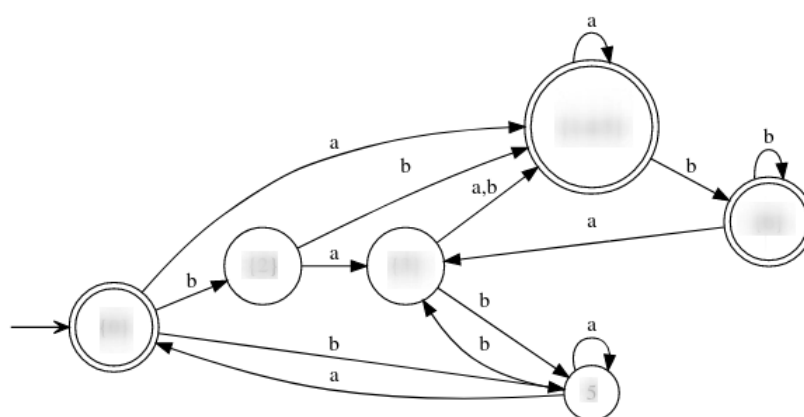
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 : ☐ a ☐ ☐ ☐ ☐ e ☐ ☐ g ☐ ☐ i ☐ j ☐ k

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐

Question 5 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ ☐ ☐ d ☐ e ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ j

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐

Question 8 : ☐ ☐ b ☐ ☐ d ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ h ☐ ☐ ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

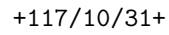
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐ ☐

Question 17 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☒ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ f Σ^* est fermé par facteur.
☐ g Σ est fermé par préfixe. ☒ h Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ b Un mot est une application.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ e Un mot peut être vide. ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Un mot peut être infini.
☒ i Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ j Un mot est une fonction.
☒ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-i-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$	☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$				

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

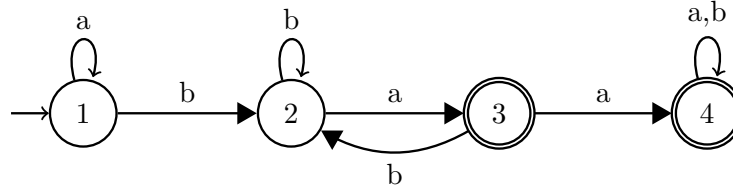
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

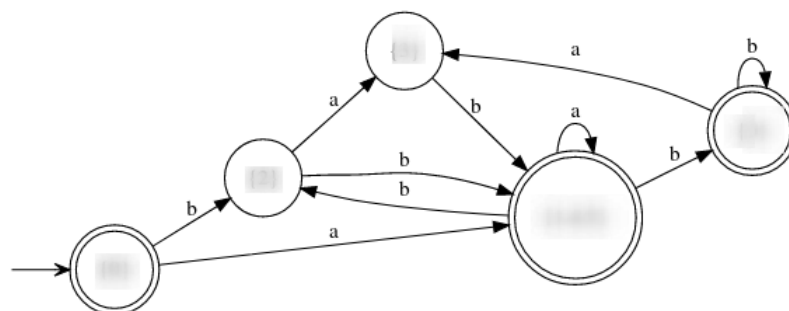
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 5

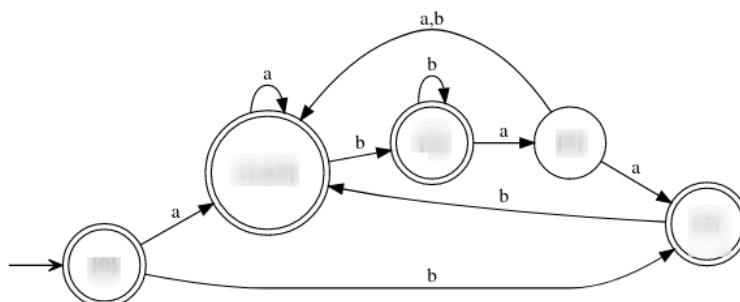
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

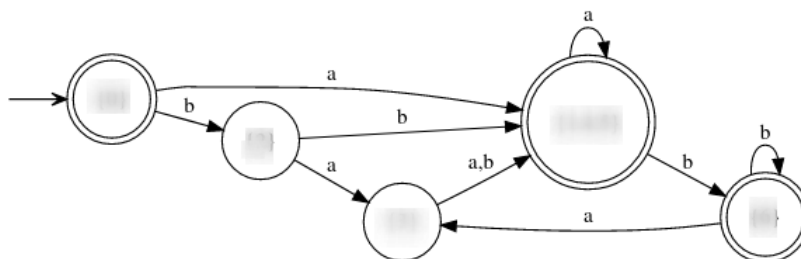
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



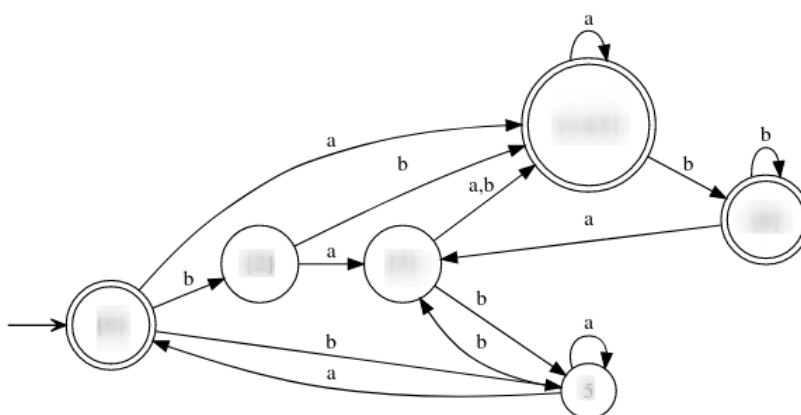
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

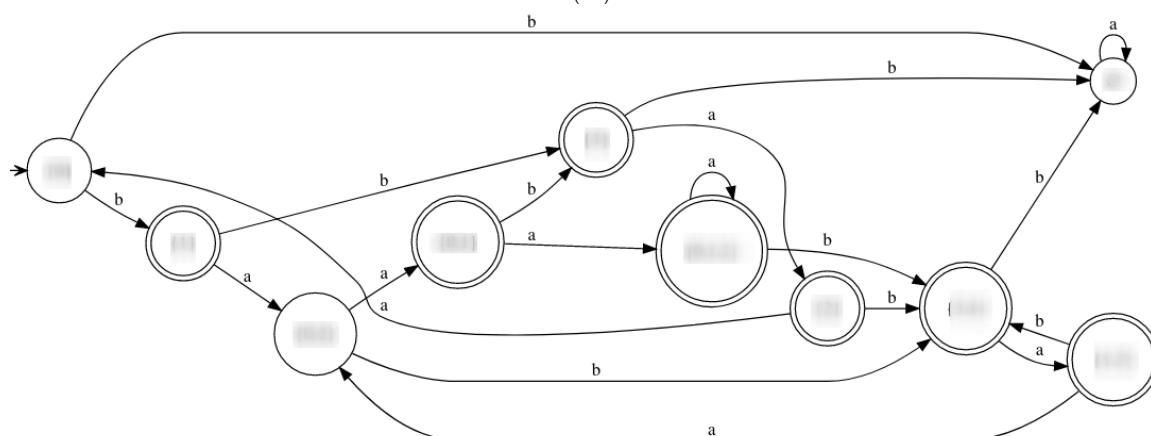


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ c ☐ e ☐ ☐ h i j k

Question 3 : ☐ ☐ c d e

Question 4 : a ☐ c d e ☐ g h i

Question 5 : a b c d e f g ☐

Question 6 : a ☐ ☐ d e ☐ g ☐ i j

Question 7 : a b c d ☐

Question 8 : ☐ ☐ c d ☐ ☐ ☐ h ☐ ☐ ☐ l m n

Question 9 : a b c ☐ e

Question 10 : a b c ☐

Question 11 : a b ☐ d e ☐ g ☐ ☐ j k l m

Question 12 : ☐ b c d e f g h

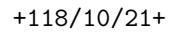
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : a ☐ c d e f

Question 15 : ☐ b c d e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : a b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a a au moins un état accessible. ☐ b a a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ d a a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ u n'est pas accepté par A. ☐ u $\notin \mathcal{L}(A)$.
☐ i a a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
☐ i Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A .
- ☐ A est complet.
- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ A possède un état puits
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-.
- ☐ la Figure 3-i-.
- ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-.
- ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-.
- ☐ la Figure 4-i-.
- ☐ la Figure 4-iii-.
- ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = a + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

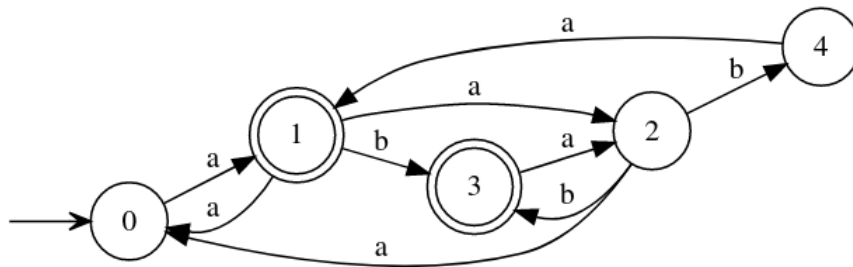
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

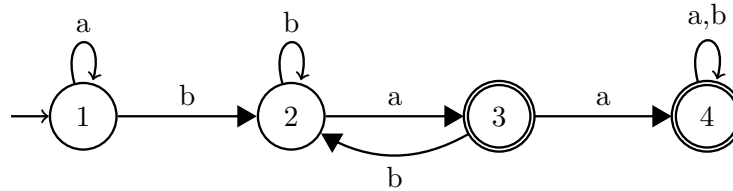
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

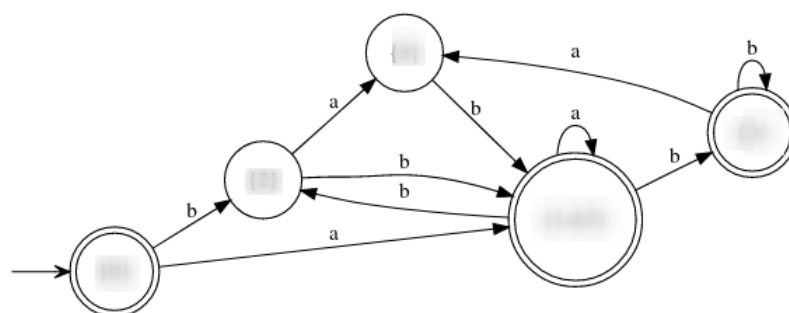
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 2 ☒ f 4 ☐ g 6

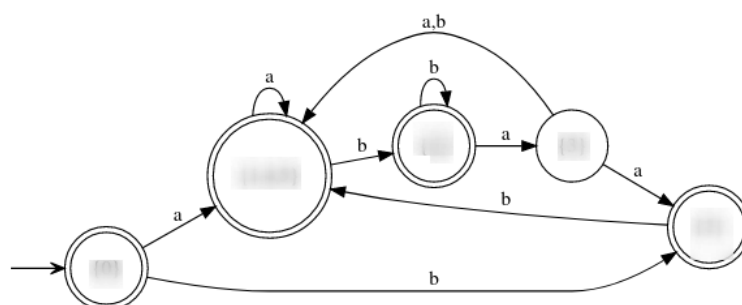
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

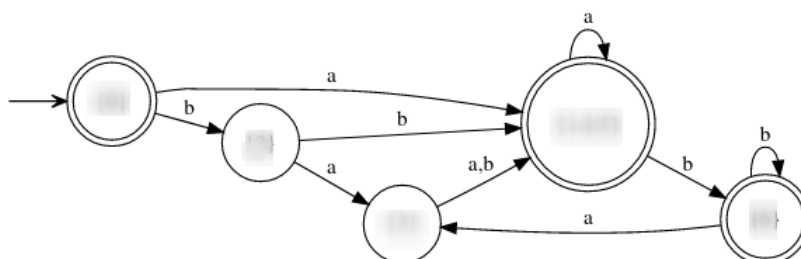
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



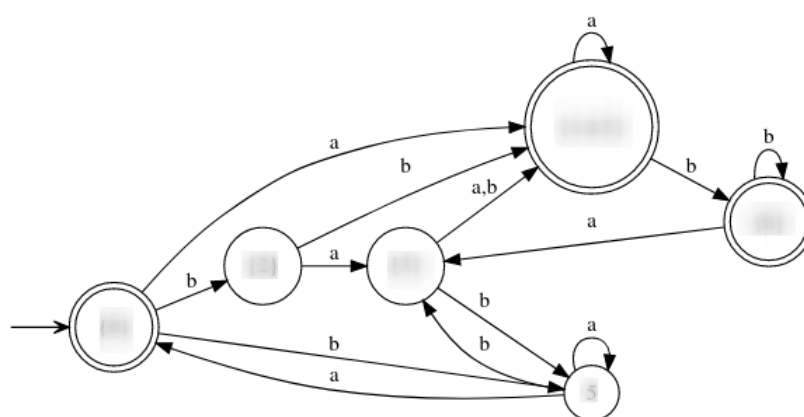
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



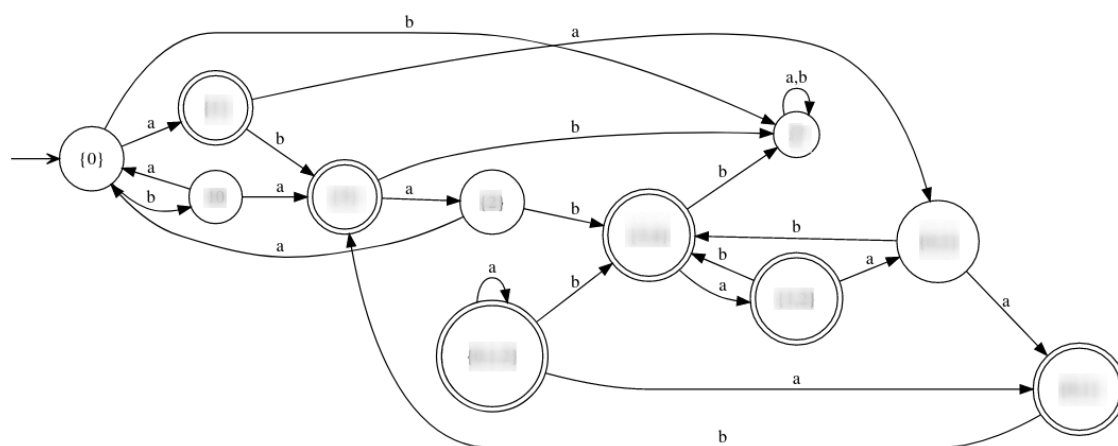
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d  f   i j k

Question 3 :  b c d   g  i j

Question 4 :   c  e f   i    m n

Question 5 :   c d e

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 : a b c  e f  h i

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a  c d e  g h i  k  m

Question 12 : a b c d  f g h

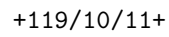
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a) Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b) L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c) Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d) Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a) L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ b) $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ c) A possède un état puits
- ☐ d) A accepte le langage universel.
- ☐ e) nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f) Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ g) $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h) Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a) Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ b) $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ c) P est forcément déterministe.
- ☐ d) Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a) Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ b) Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c) A a des états accepteurs.
- ☐ d) $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ e) u est accepté par A .

☐ f A est complet.

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☐ c A a au moins un état non co-accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ A n'est pas complet. ☐ f A a au moins un état co-accessible.
☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ c Un mot peut être infini. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot est une fonction. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot est une application.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

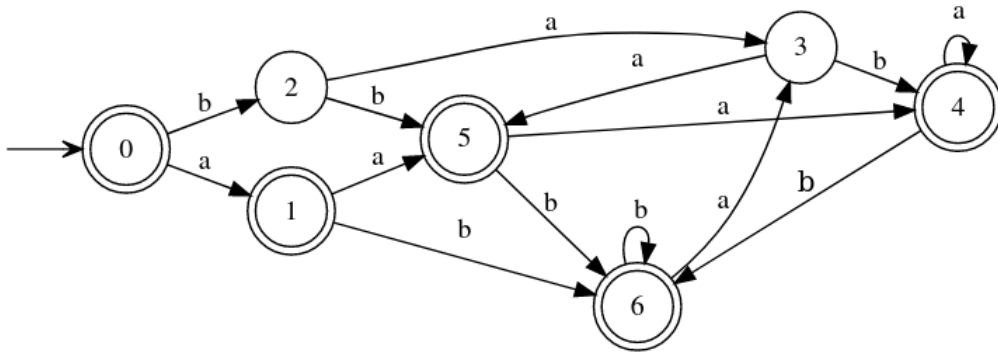
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

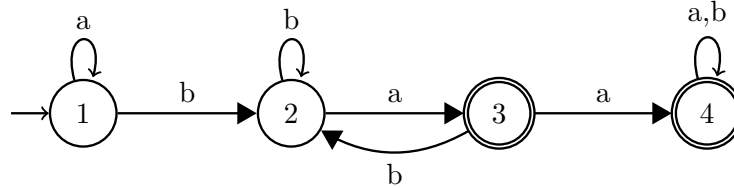
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

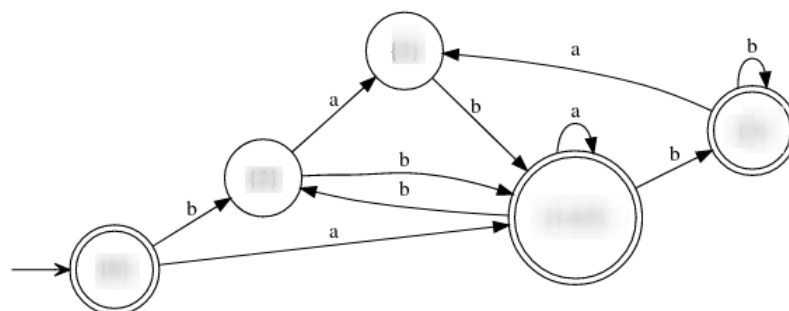
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☐ c 5 ☒ d 4 ☐ e 0 ☐ f 2 ☐ g 1

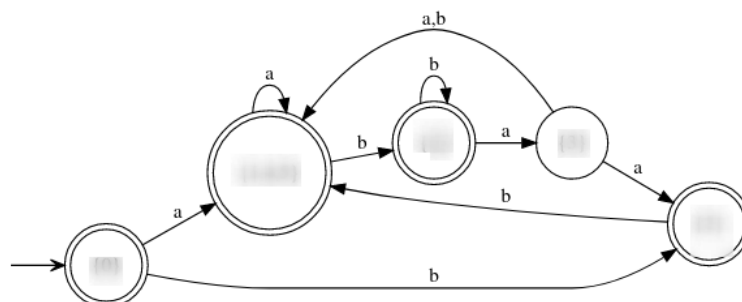
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

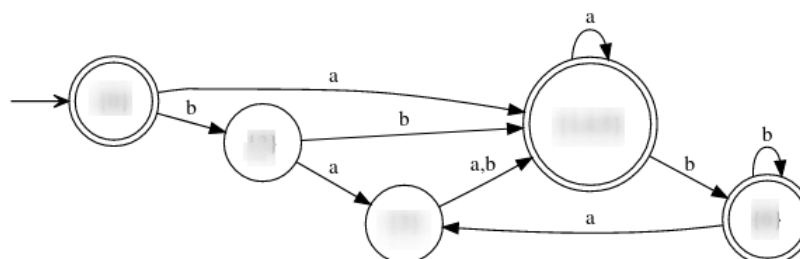
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



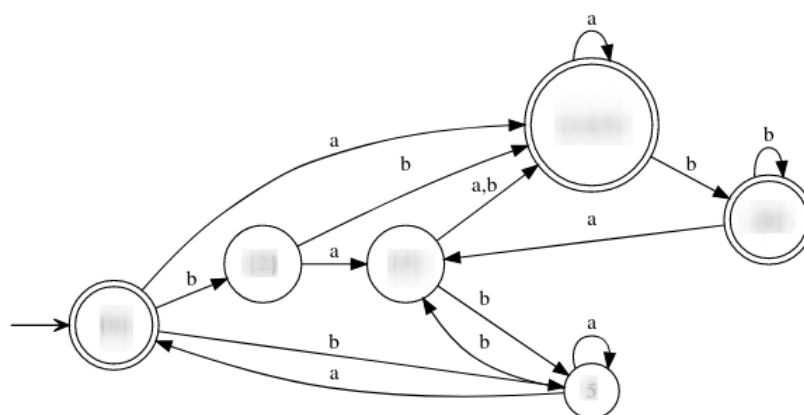
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

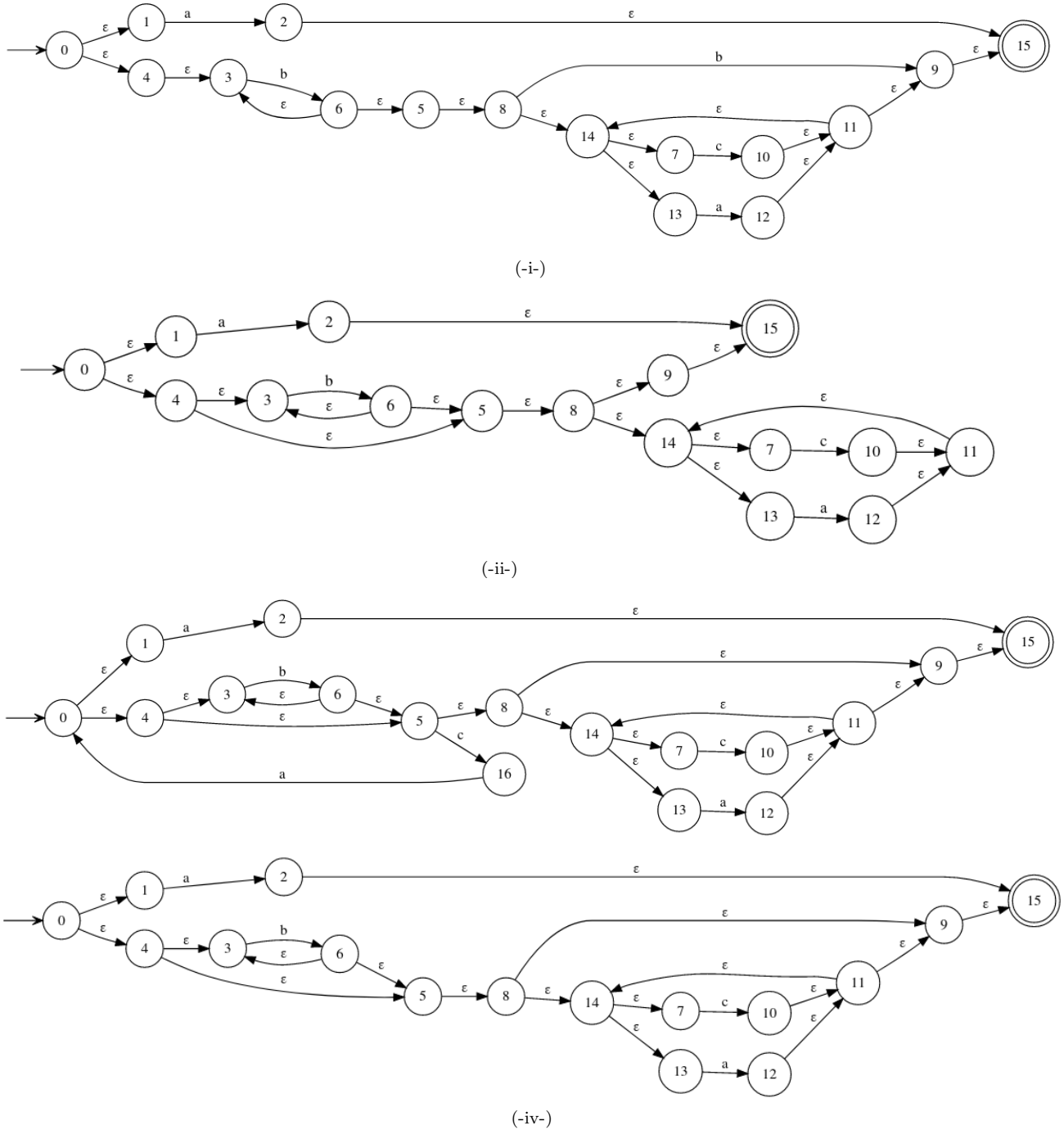


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c	d	e	f	g	h	i

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a		c				g	h	i	j

Question 7 :

a		c			f	g			j	k

Question 8 :

a		c	d		f							m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c	d			g		i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

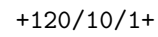
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état accessible.

☐ A n'est pas complet.

☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ u n'est pas accepté par A .

☐ A a au moins un état co-accessible.

☐ A a au moins un état non co-accessible.

☐ A a au moins un état non accessible.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot est une fonction.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
☐ i Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ c A accepte le langage universel. ☐ d A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A est complet.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

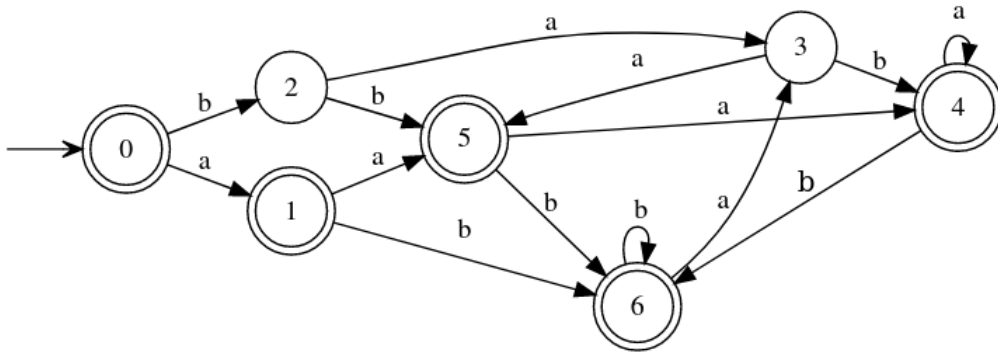
☐ a	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

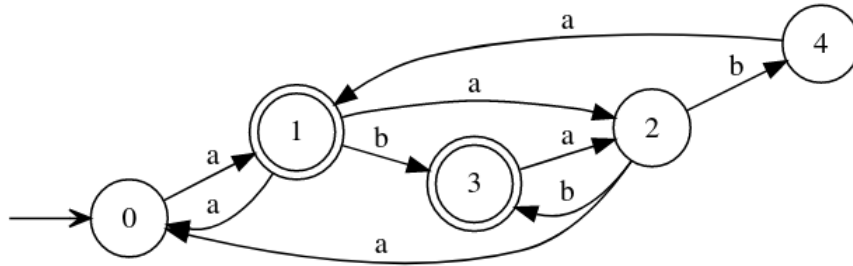
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ b	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

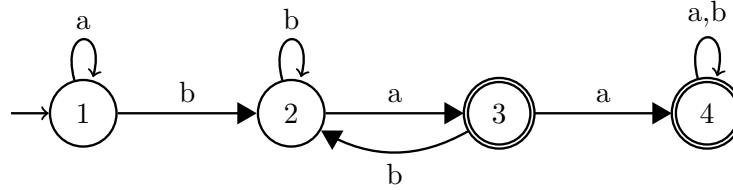
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

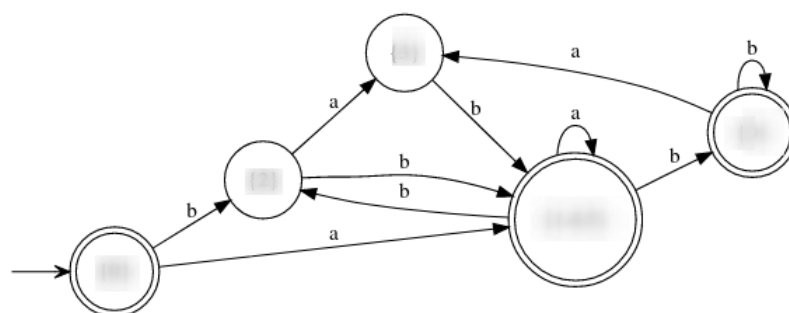
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 2 ☒ 4 ☐ d 5 ☐ e 6 ☐ f 3 ☐ g 0

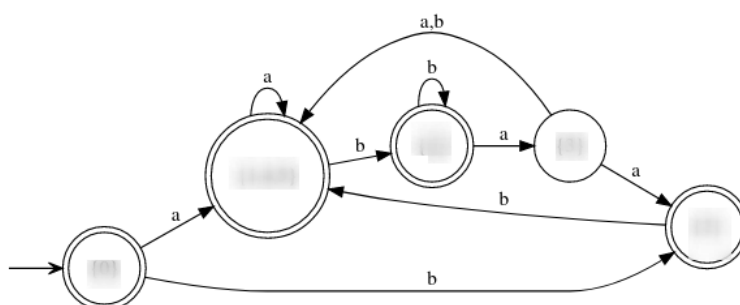
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

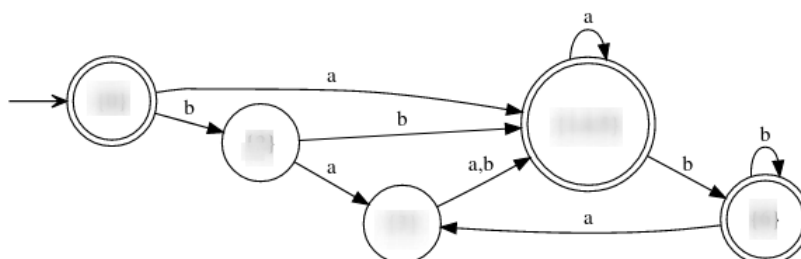
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



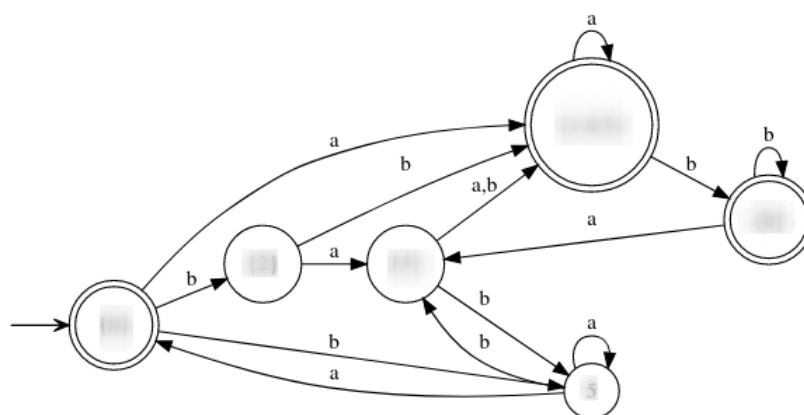
(-i-)



(-ii-)

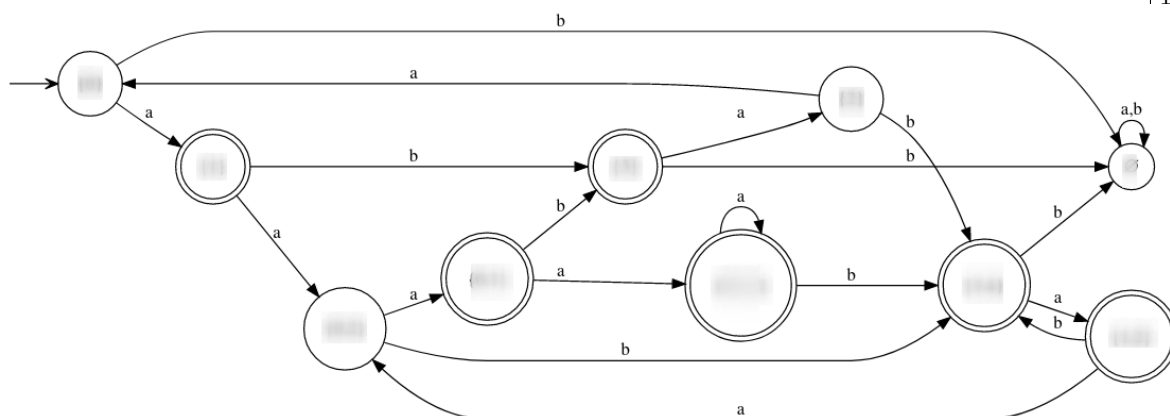


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



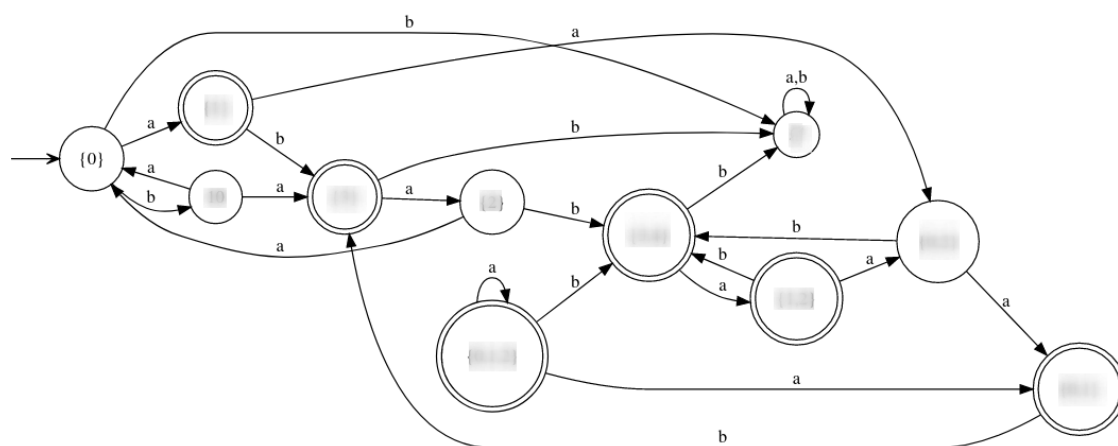
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

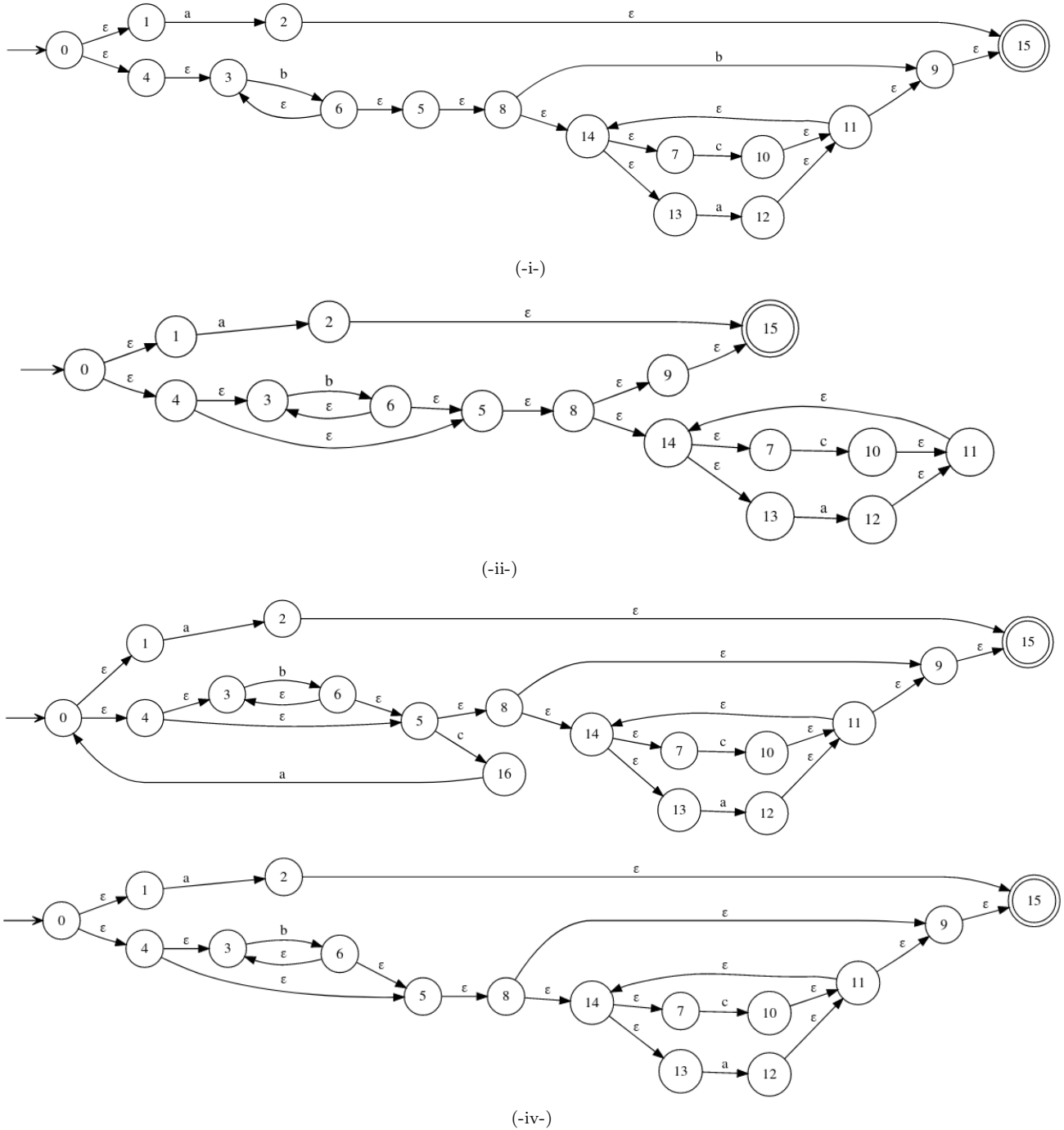


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ d ☐ e

Question 3 : ☐ ☐ ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h ☐ j ☐ k

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 5 : ☐ ☐ ☐ d ☐ f ☐ ☐ ☐ i ☐ ☐ ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ b ☐ ☐ ☐ e ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 9 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ g ☐ ☐ i ☐ ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h

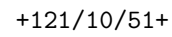
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c u est accepté par A .
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par préfixe. ☒ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☒ d Σ^* est fermé par facteur.
☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ f Σ^* est fermé par suffixe.
☐ g Σ est fermé par préfixe. ☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☒ b $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☒ e Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état co-accessible. ☒ g A a au moins un état accessible.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f A accepte le langage universel. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

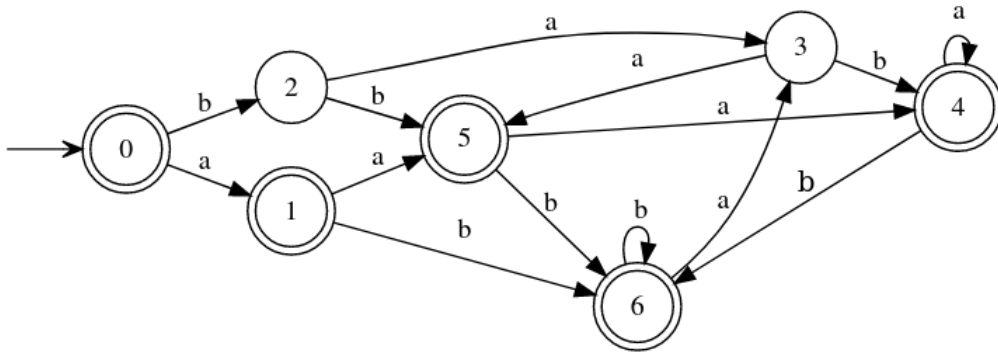
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

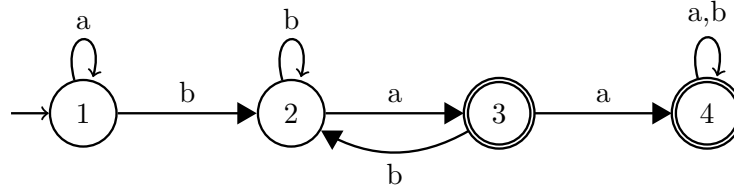
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

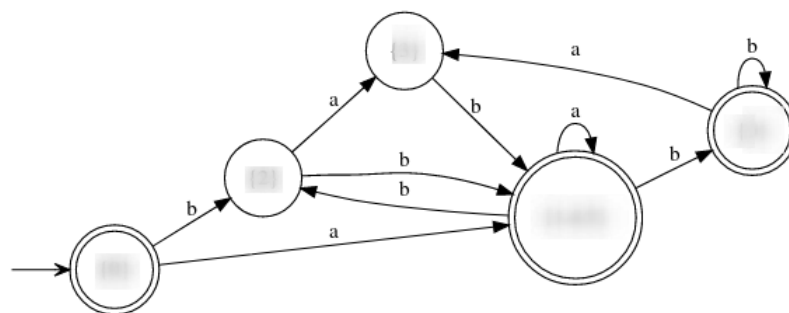
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 6 ☐ c 2 ☐ d 5 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 0

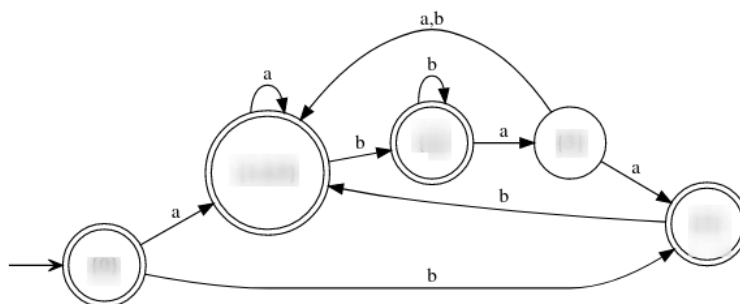
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

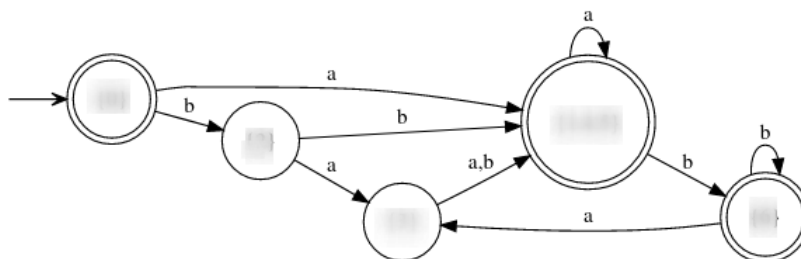
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



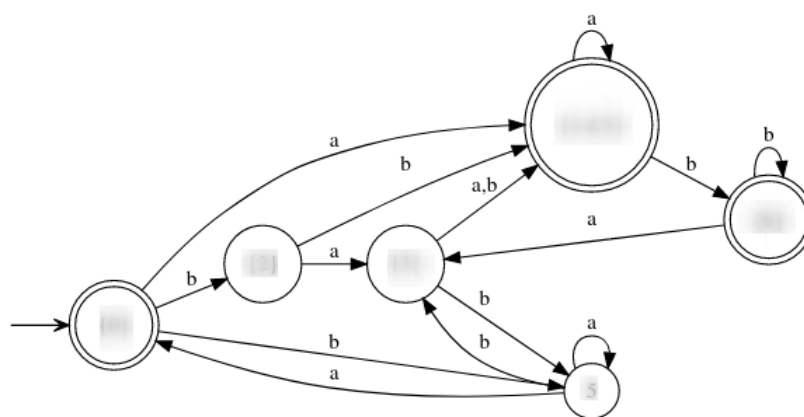
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c		e		g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a		c	d		f				j	k

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 8 :

a		c			f		h					m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f		h	i	j		l	

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

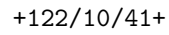
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e u est accepté par A .
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☒ d Σ^* est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☒ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ g Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état co-accessible. ☒ c A n'est pas complet.
☐ d A a au moins un état non accessible. ☒ e u n'est pas accepté par A .
☒ f A a au moins un état accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
☒ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

- ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ i Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ d A accepte le langage universel. ☐ e A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_1 = aX_1 + b$ ☐ b $X_4 = a + b$ ☐ c $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ d $X_4 = (a + b)X_4$
☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ f $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ i $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☐ j $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ k $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ l $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = a + b$ ☒ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ c $X_4 = a^* + b^*$ ☐ d $X_4 = (a + b)X_4$
☐ e $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ f $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^*b$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☒ $X_2 = b^*aX_3$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ c $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

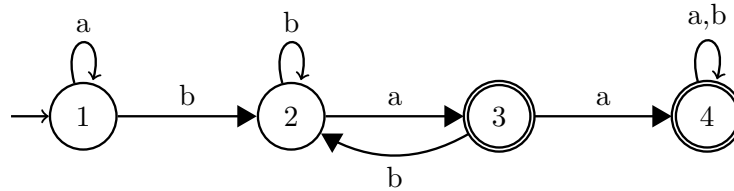
- ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ c $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

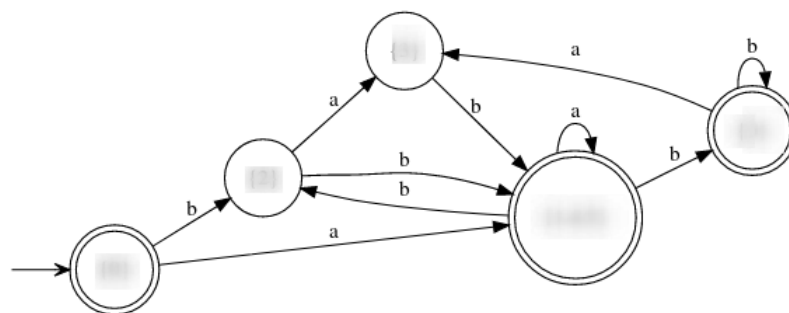
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 3 ☐ f 1 ☒ 4

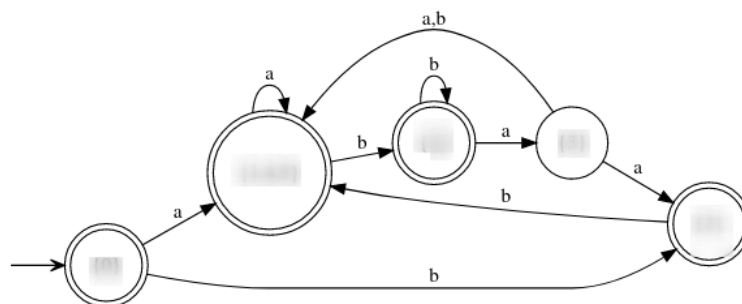
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

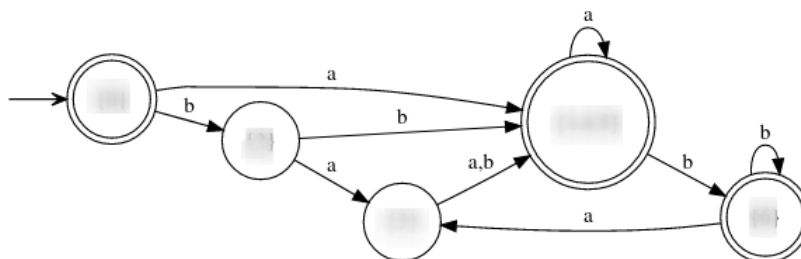
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



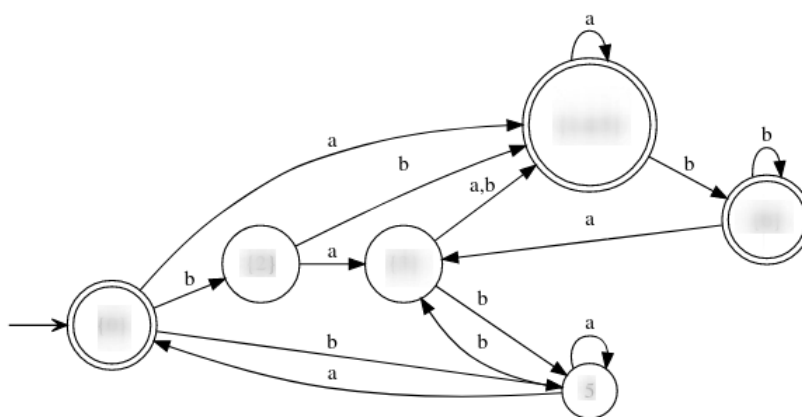
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

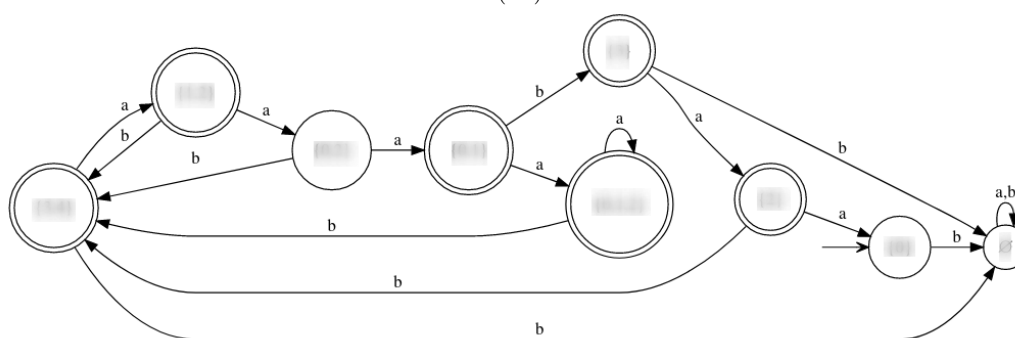
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



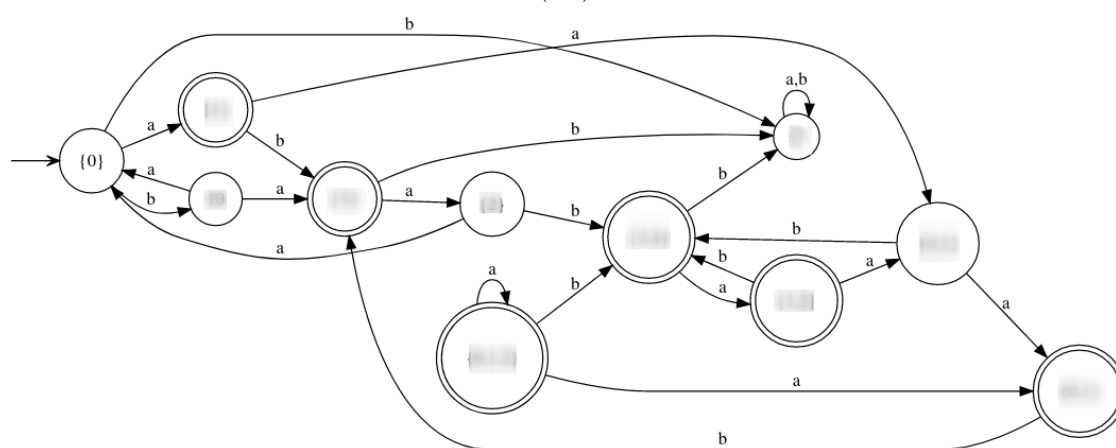
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b	c		e			h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

	b		d			g		i	j	k

Question 6 :

	b				f			i		k		m	n

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c	d		f			i	j	k	l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

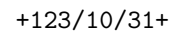
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ c P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel.
- ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ f A possède un état puits
- ☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ c A n'a pas d'état accepteur.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ f A a au moins un état co-accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot est une application. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

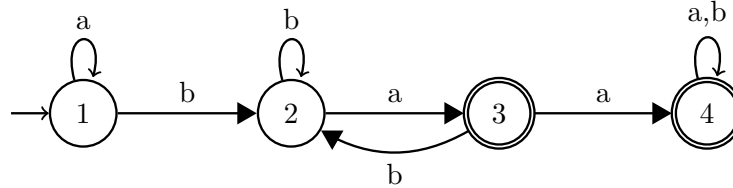
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

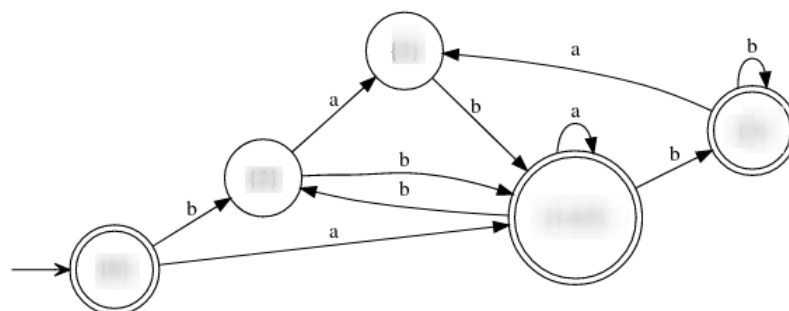
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 2 ☐ g 6

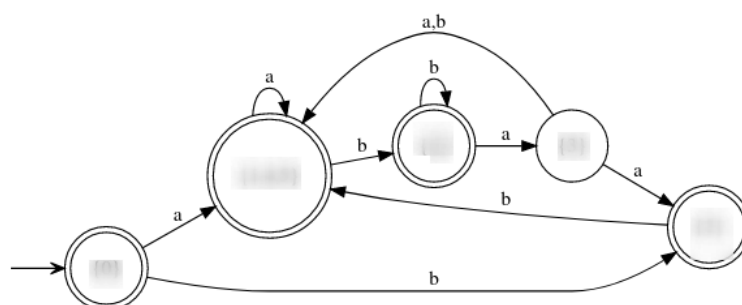
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

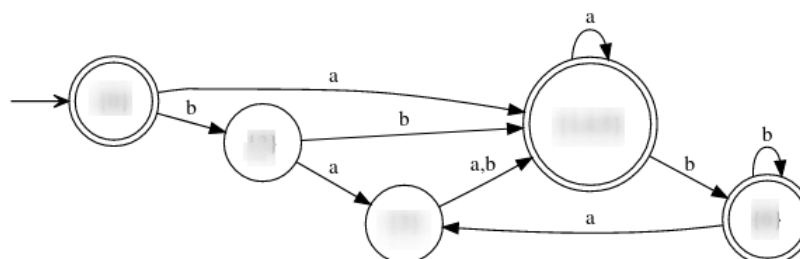
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



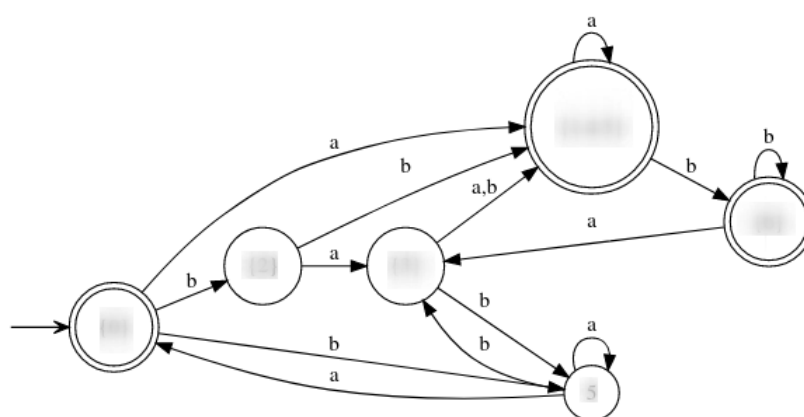
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

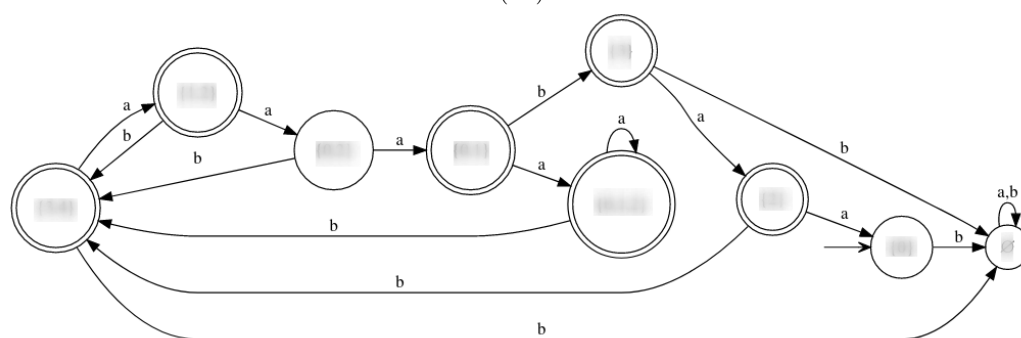


(-iv-)

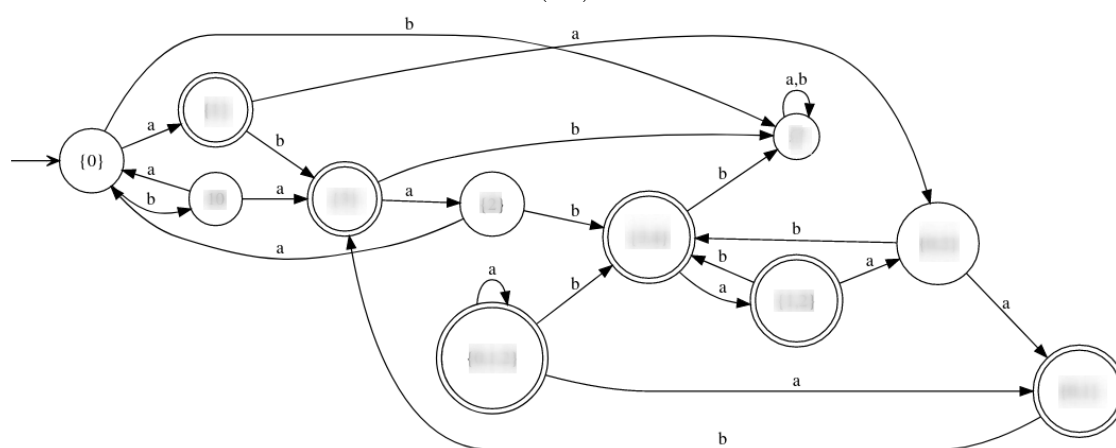
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

 $(-\mathbf{i}-)$ 

(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

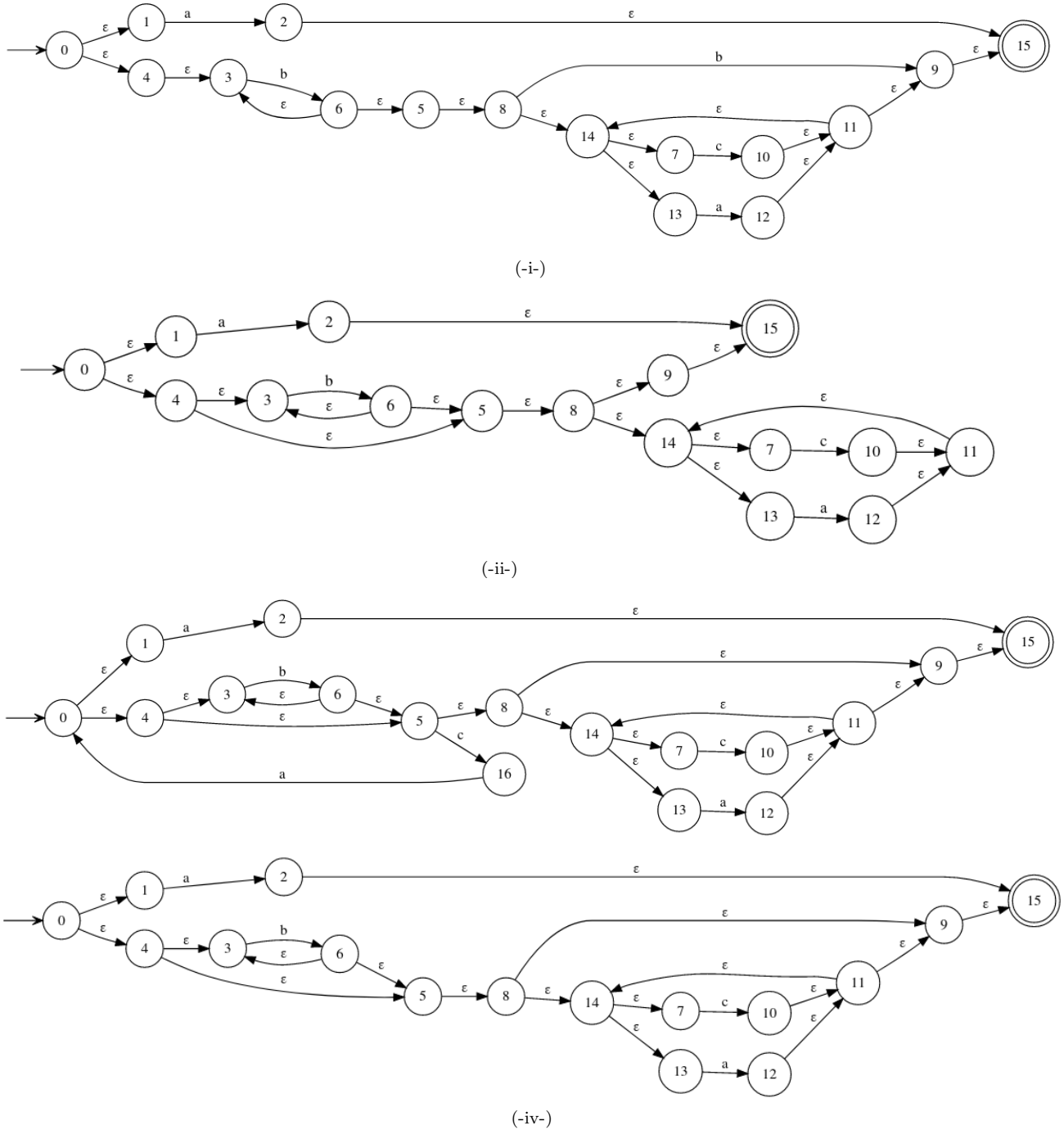


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

	b		d	e

Question 5 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 6 :

a		c			f		h		j	k

Question 7 :

a	b			e			h	i	j

Question 8 :

				e				i	j		l	m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a			d	e	f		h	i		k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

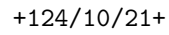
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot est une fonction.
☐ ☐ e Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot est une application.
☐ ☐ i Un mot peut être infini.	☐ ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe.	☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par suffixe.	☐ ☐ b Σ est fermé par facteur.	☐ ☐ c Σ est fermé par préfixe.
☐ ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.	☐ Σ^* est fermé par préfixe.	
☐ Σ^* est fermé par facteur.	☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.	
	☐ ☐ h Σ est fermé par suffixe.	
☐ ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.		
☐ ☐ b nécessairement $ Q \geq 2$.	☐ ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.	
☐ $ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.	☐ ☐ e A accepte le langage universel.	☐ ☐ f $ \delta = Q \times \Sigma $.
	☐ ☐ g A possède un état puits	
☐ ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.		
☐ ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.		

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- | |
|---|
| ☐ ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ. |
| ☐ ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage. |

- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ c A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ h A a au moins un état co-accessible.
- ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii- ☐ b la Figure 3-i- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii- ☐ d la Figure 3-iv-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv- ☐ b la Figure 4-iii- ☐ c la Figure 4-ii- ☐ la Figure 4-i-

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

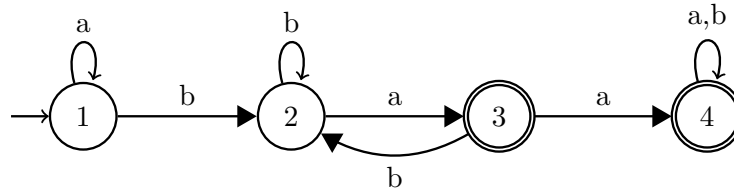
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

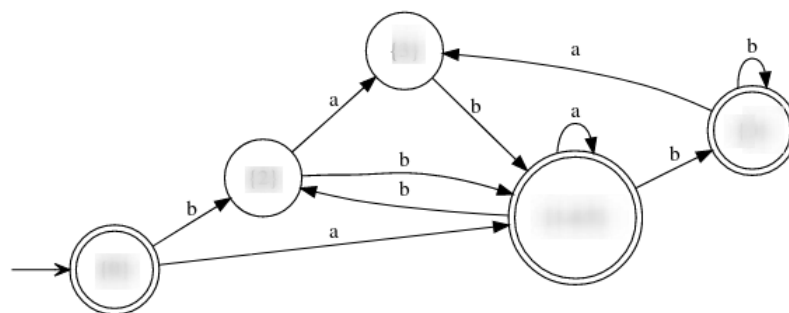
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 6 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 2 ☐ f 3 ☐ g 1

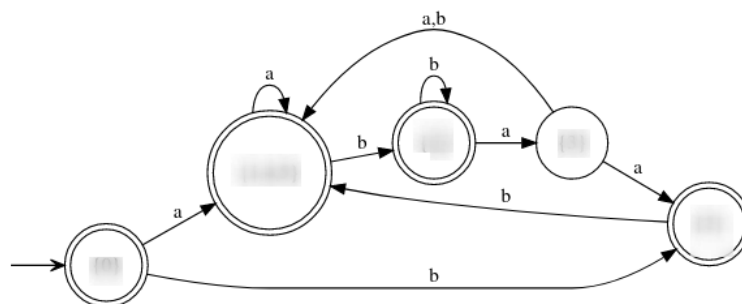
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

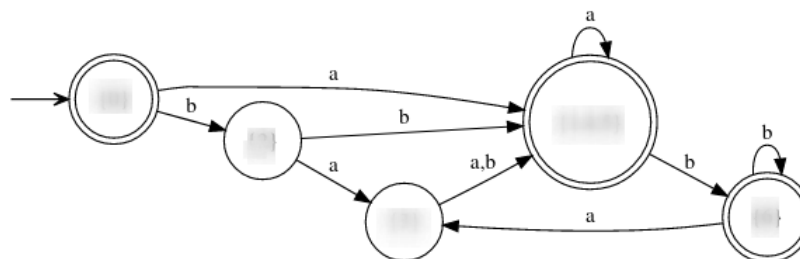
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



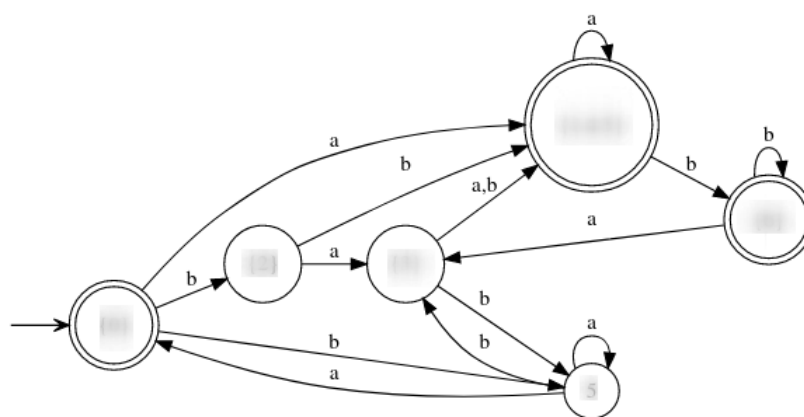
(-i-)



(-ii-)

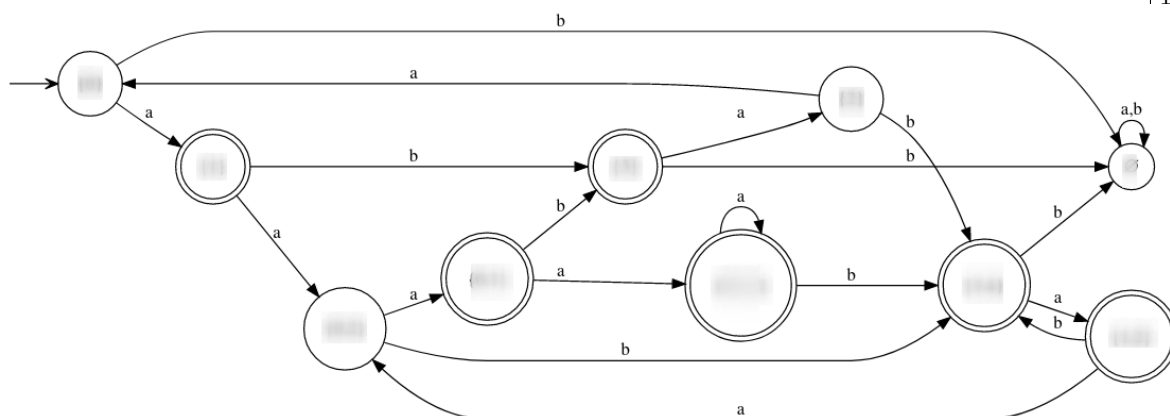


(-iii-)



(-iv-)

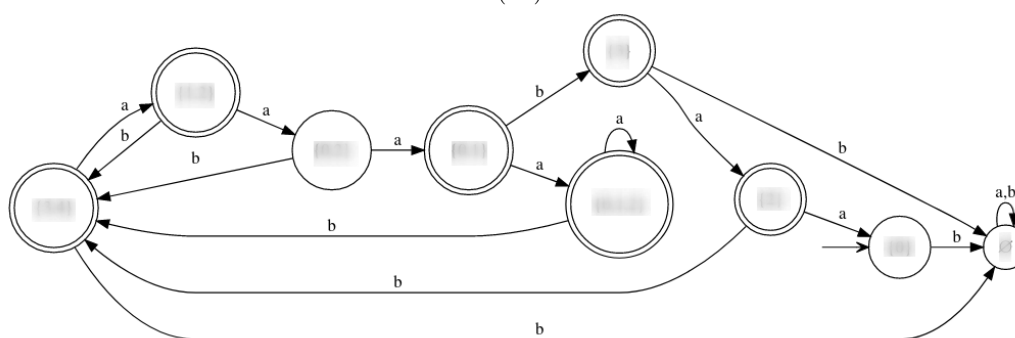
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :     e    i j k  m n

Question 3 :  b c d    h i j

Question 4 :  b c  e f g h i

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :   c   f  h i j k

Question 8 :  b  d e

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a b c   f  h  j k l m

Question 12 : a  c d e f g h

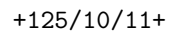
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A est complet.
- ☐ c A a des états accepteurs. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état accessible.
- ☐ c Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☐ e u n'est pas accepté par A .
- ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ g A n'est pas complet.
- ☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-.
- ☐ b la Figure 3-i-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iii-.
- ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-.
- ☐ b la Figure 4-ii-.
- ☐ c la Figure 4-iii-.
- ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

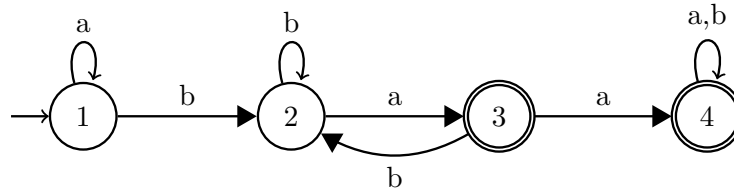
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

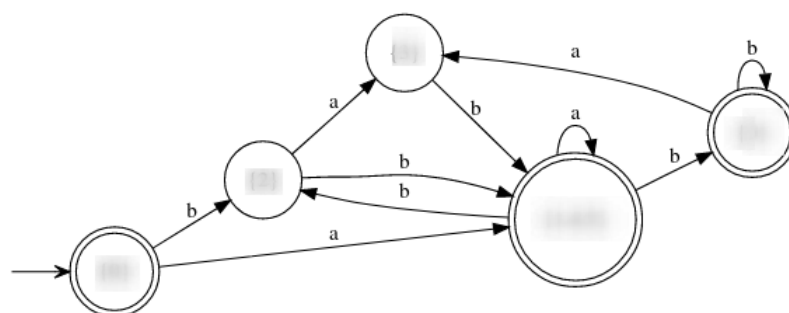
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ 4 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 5 ☐ f 6 ☐ g 0

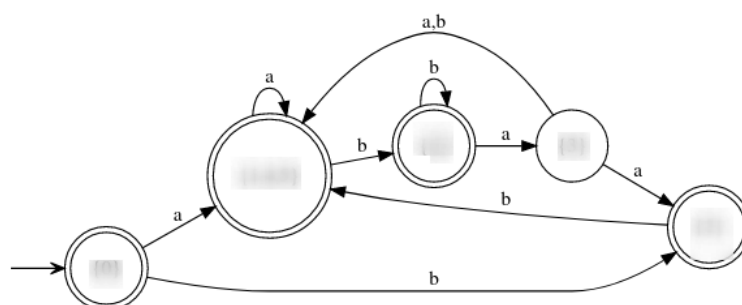
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

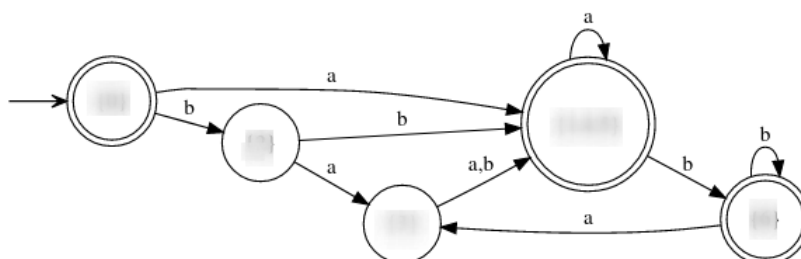
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



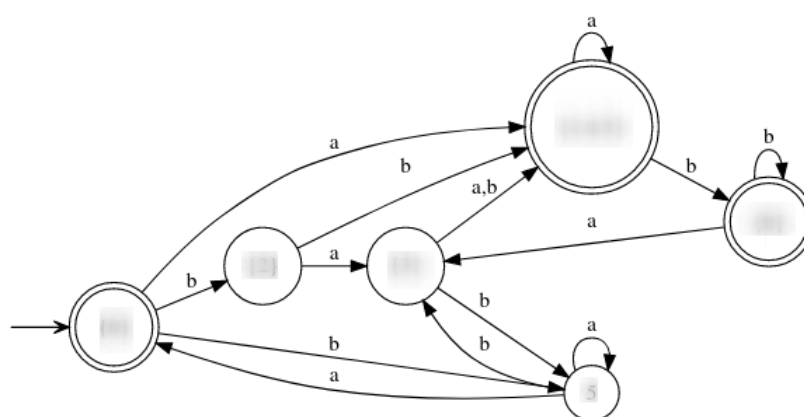
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

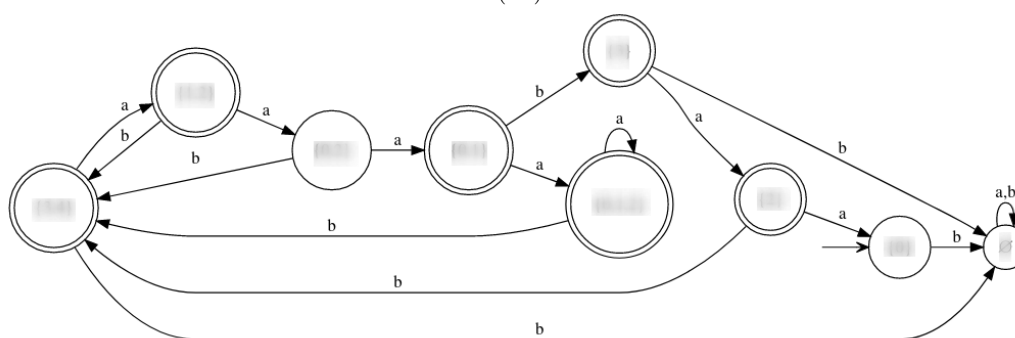
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



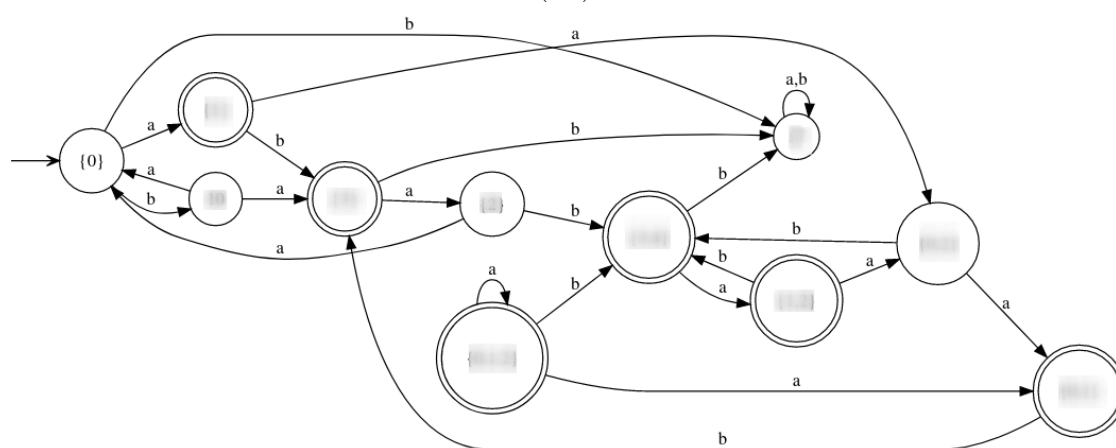
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

			d		f		h	i	j	k

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a					f	g	h	i	j

Question 7 :

				e	f				j		l	m	n

Question 8 :

	b		d	e

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c	d				h	i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

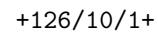
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot est une application.
☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot possède une infinité d'extensions.
☐	Un mot est une fonction.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐	A n'a pas d'état accepteur.	☐	A a au moins un état non accessible.	☐	$u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐	A a au moins un état accessible.	☐	A n'est pas complet.		
☐	A a au moins un état non co-accessible.	☐	A a au moins un état co-accessible.		
☐	u n'est pas accepté par A .				
☐	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .				
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.				
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.				

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐	Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐	L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐	Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐	Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b u est accepté par A . ☐ c Les états de A sont tous accessibles.

☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ f A est complet.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ b Σ^* est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par facteur.

☐ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ^* est fermé par suffixe.

☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Σ^* est fermé par préfixe.

☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits

☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g A accepte le langage universel.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-i-.

☐ b la Figure 3-iii-.

☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ d la Figure 3-ii-.

☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 4-iii-.

☐ b la Figure 4-i-.

☐ c la Figure 4-ii-.

☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

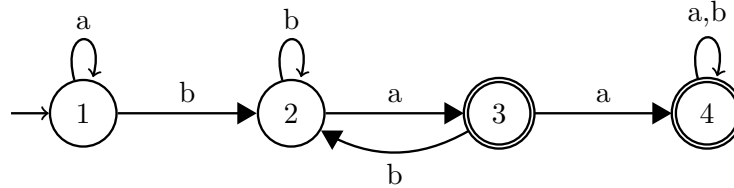
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

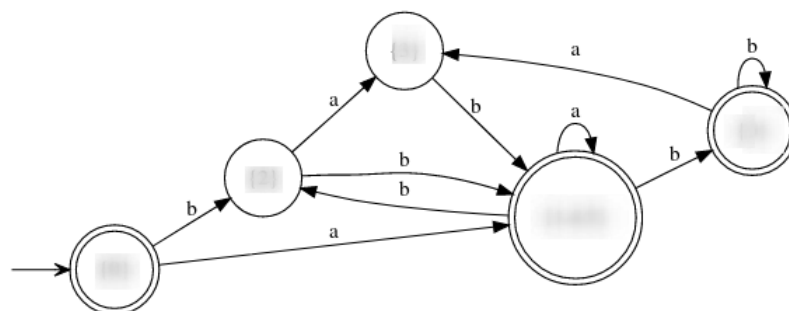
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☒ b 4 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 0 ☐ f 5 ☐ g 2

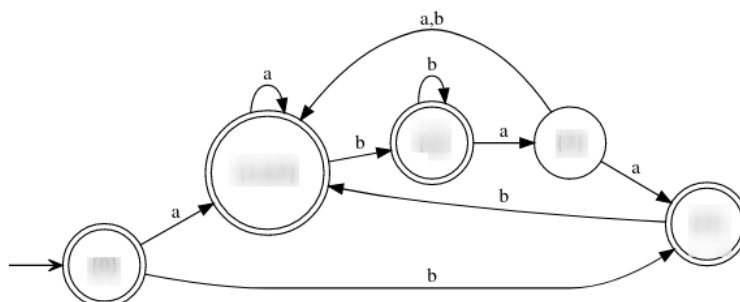
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

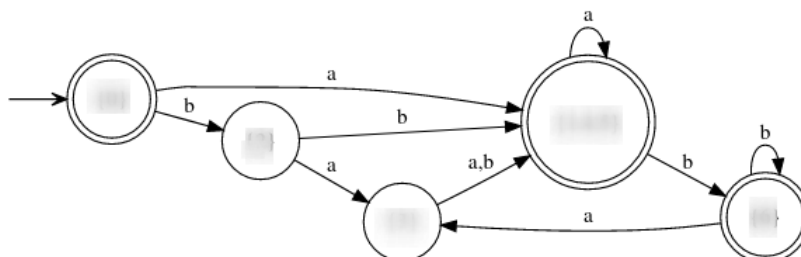
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



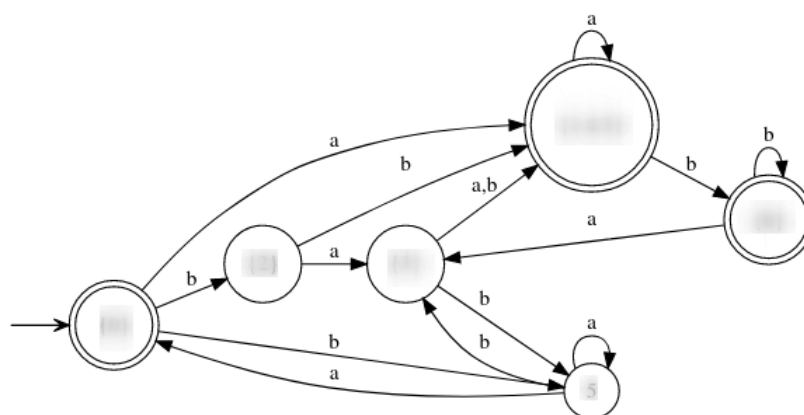
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

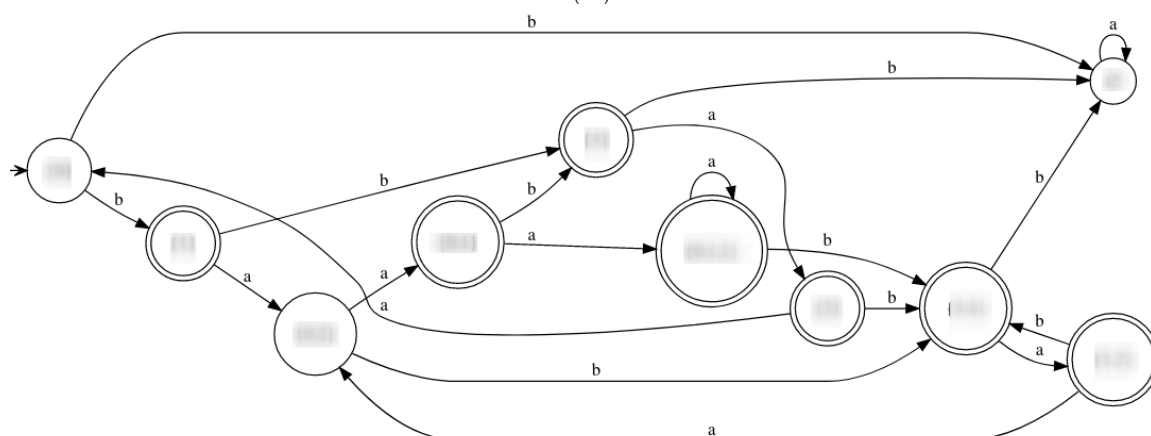


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



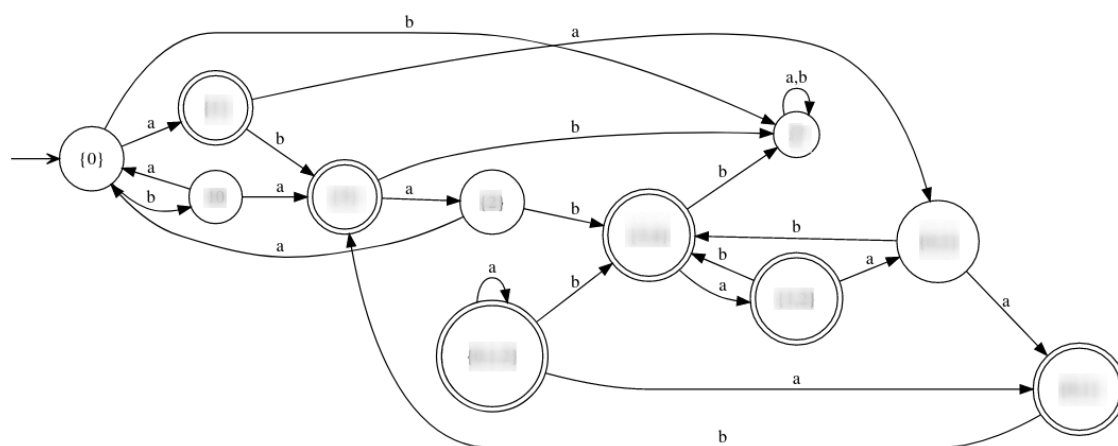
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ c ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ l ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ k

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 5 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 7 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ ☐ ☐ f ☐ ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

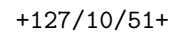
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ b Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ c Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ f Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ g Σ est fermé par facteur. ☐ h Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c A est complet.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A accepte le langage universel.
☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d A possède un état puits ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☒ u n'est pas accepté par A . ☐ g A a au moins un état non accessible.
☐ h A a au moins un état co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une application. ☒ Un mot est une fonction.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ d Un mot peut être infini.
☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ i Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

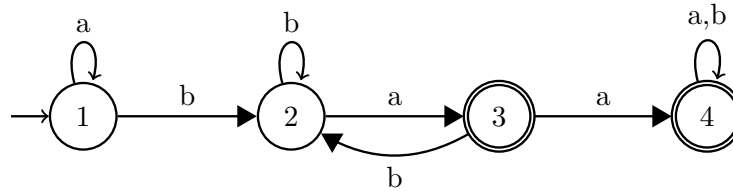
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

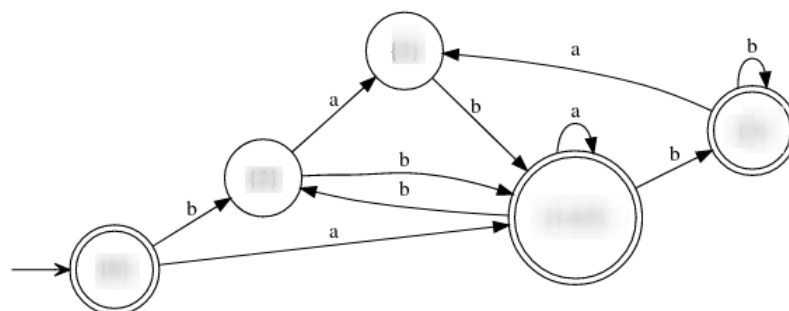
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 1 ☐ e 5 ☐ f 6 ☐ g 0

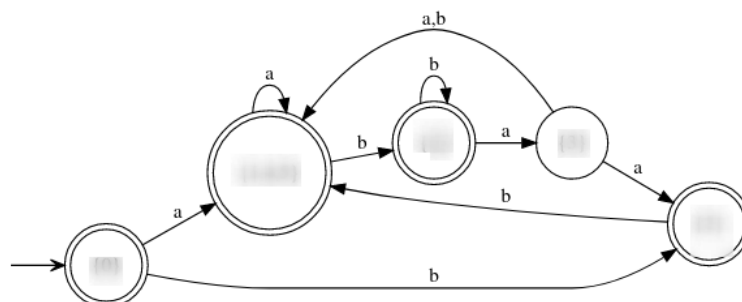
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

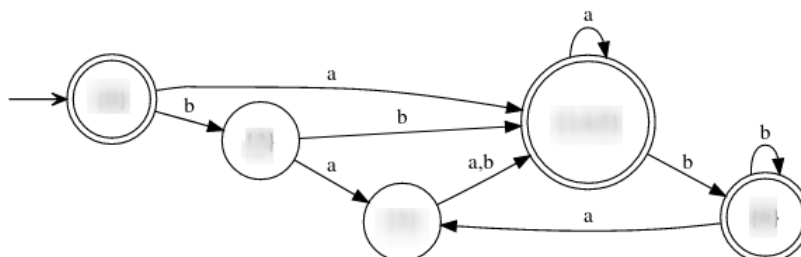
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



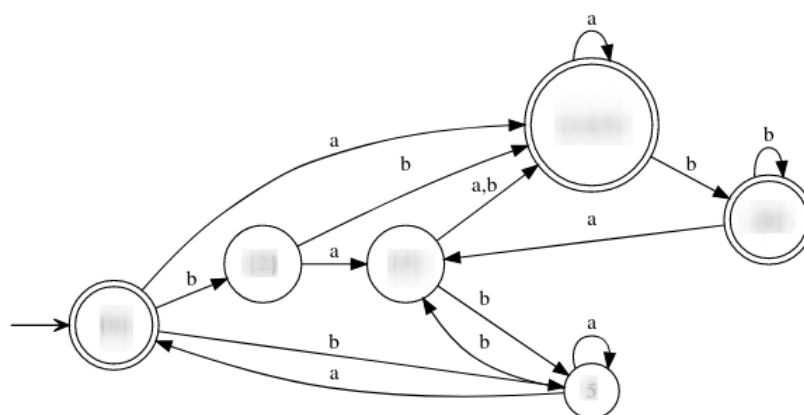
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

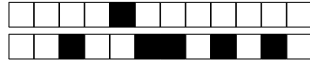


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a			d	e		g		i	j

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 7 :

a				e		g	h		j	k

Question 8 :

			d	e				i		k		m	n

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d	e			h	i	j		l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

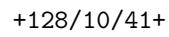
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. A single solid line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ e A accepte le langage universel. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ h A a au moins un état co-accessible. ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.

- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A est complet. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ b Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ d Un mot est une fonction.
- ☒ e Un mot est une application. ☒ f Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ g Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ j Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ k Un mot peut être vide. ☒ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-.
- ☒ b la Figure 3-iii-.
- ☐ c la Figure 3-iv-.
- ☐ d la Figure 3-i-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-.
- ☒ b la Figure 4-i-.
- ☐ c la Figure 4-iv-.
- ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

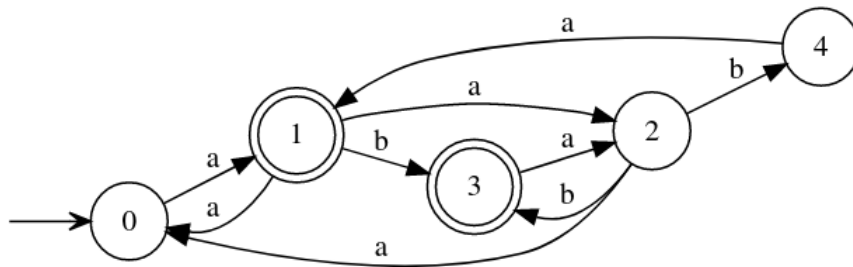
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

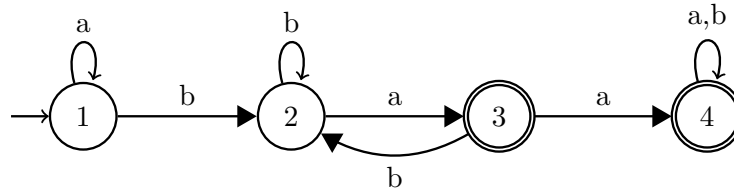
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

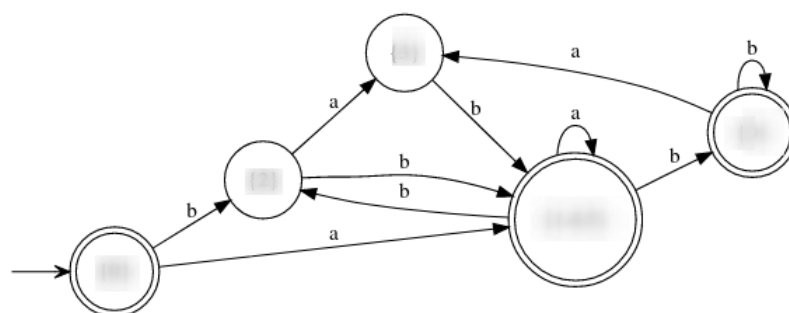
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 6 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 2 ☐ g 5

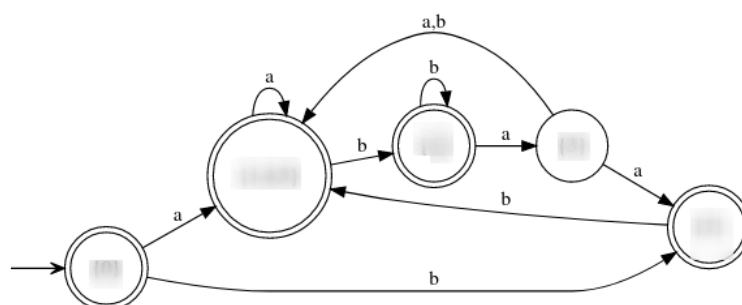
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

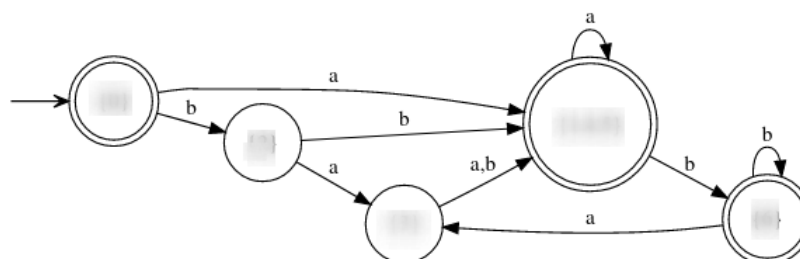
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



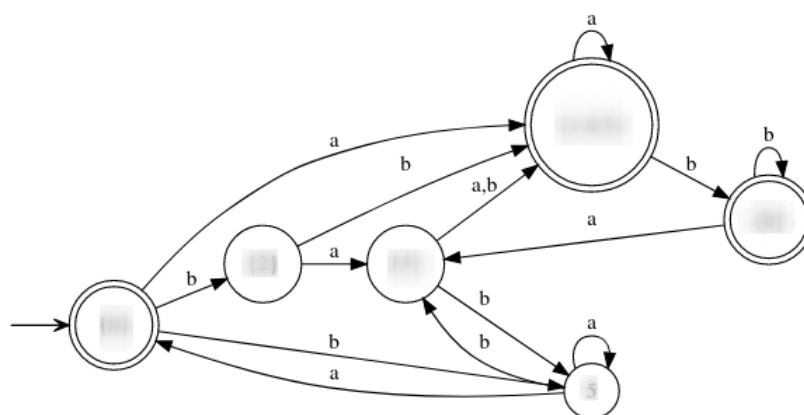
(-i-)



(-ii-)

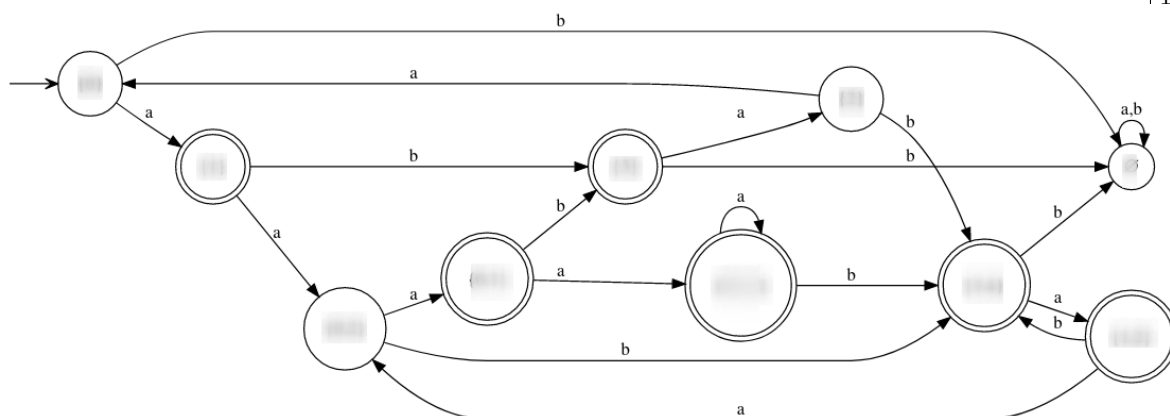


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



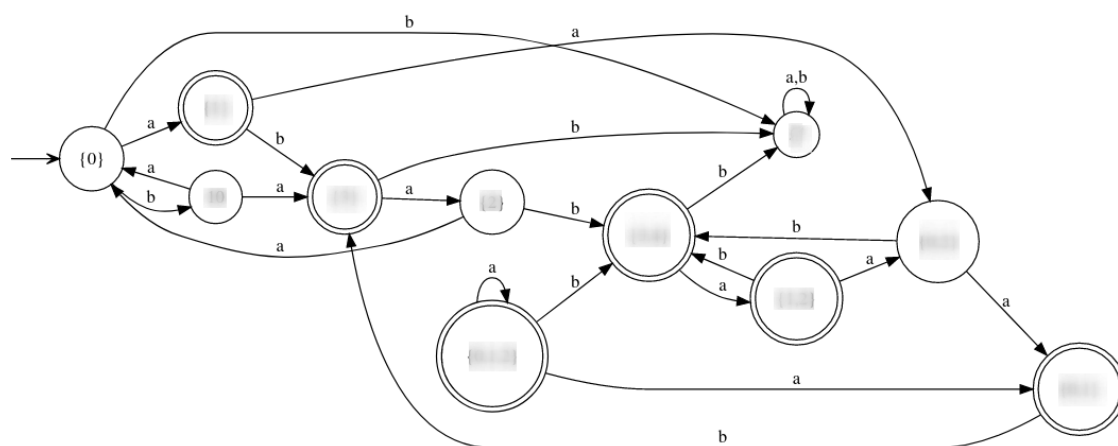
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

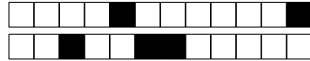


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 3 :

		c	d			g	h	i	j

Question 4 :

a				e			h	i	j	k

Question 5 :

	b		d	e

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a		c					h	i				m	n

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f	g	h	i				m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

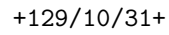
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e A a des états accepteurs. ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A accepte le langage universel.
☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f A possède un état puits
☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ b P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixes. ☒ b Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixes. ☒ d Un mot est une fonction.
☒ e Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ f Un mot est une application.
☒ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ h Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être vide.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ g A a au moins un état co-accessible.
☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

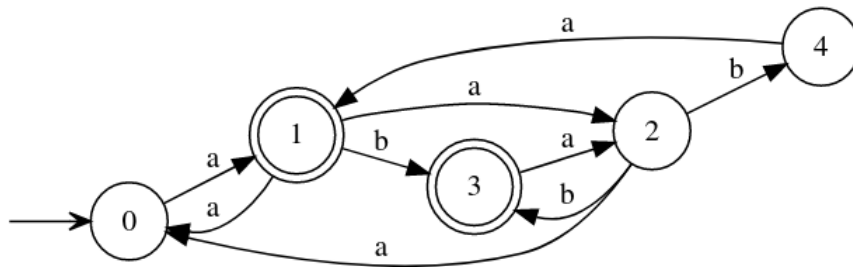
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

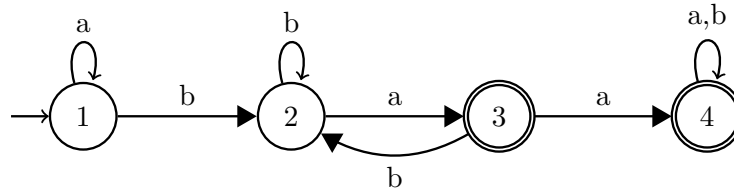
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

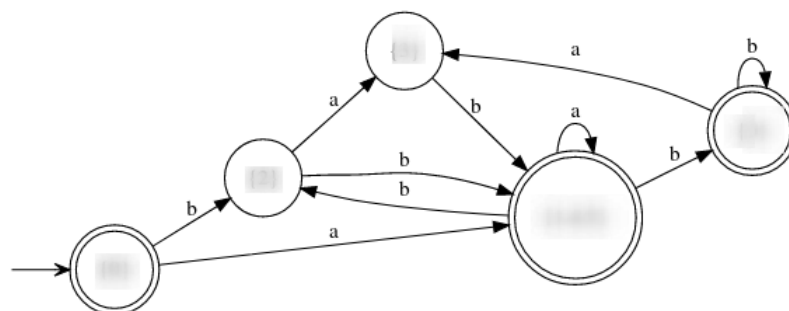
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 1 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 6

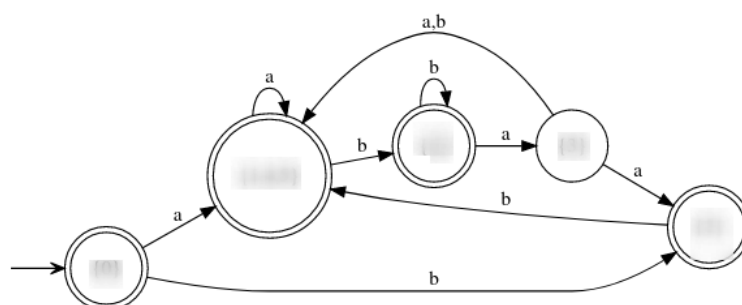
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

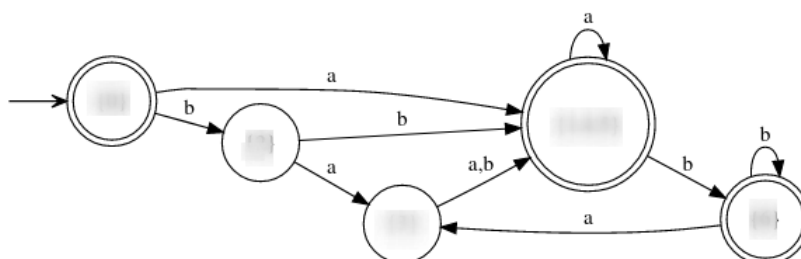
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



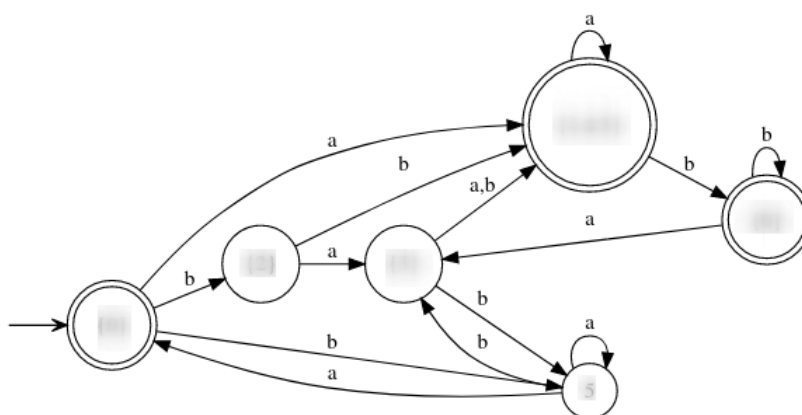
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

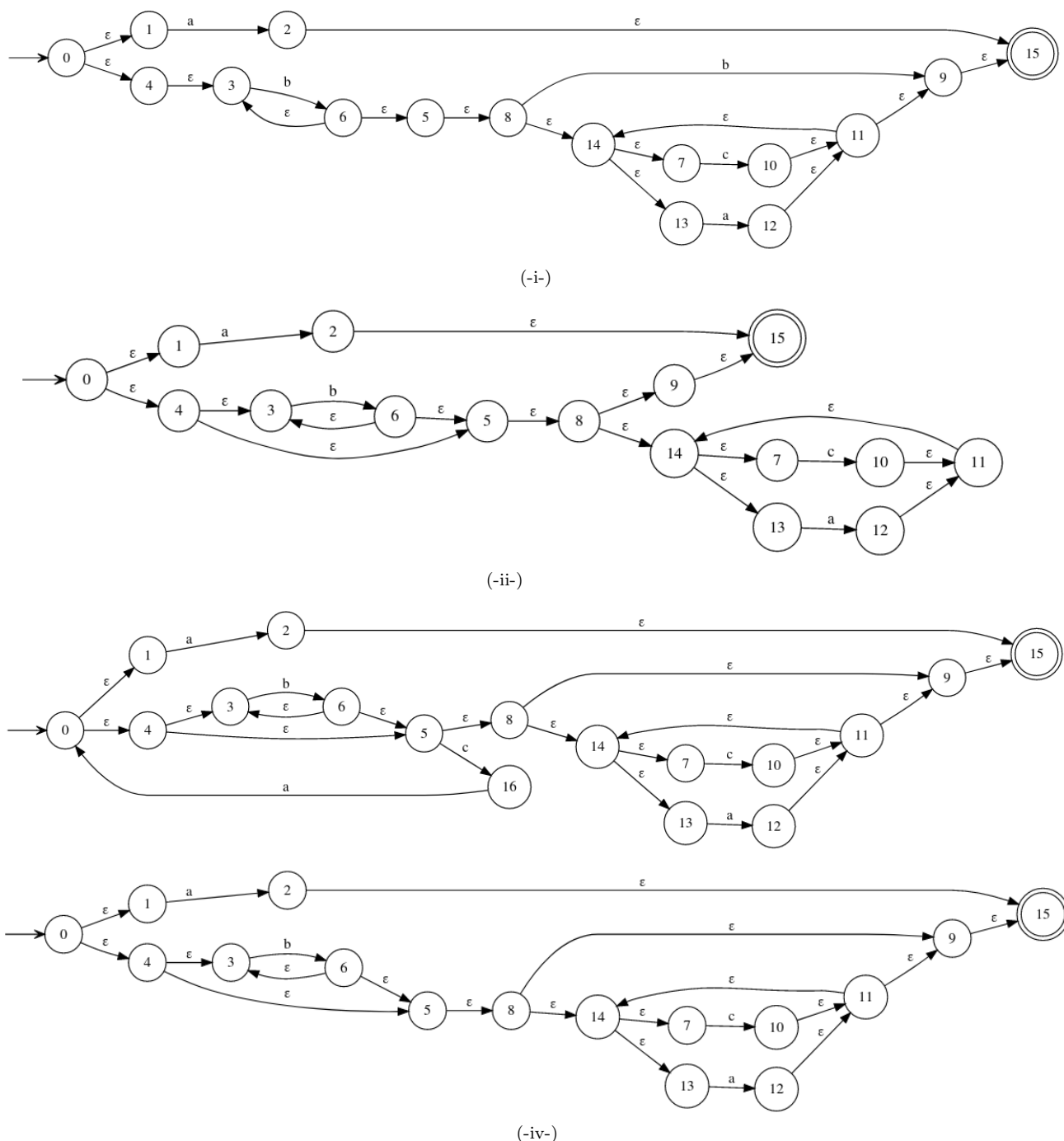
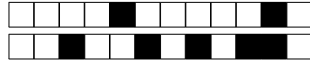


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a		c								k	l	m	n

Question 6 :

	b				f	g	h		j	k

Question 7 :

a			d			g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c					h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

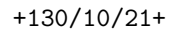
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ f A a au moins un état non accessible.
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ i A a au moins un état co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ b Σ est fermé par facteur.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A .
☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ A accepte le langage universel.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Détermination d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^+aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^+aX_3$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

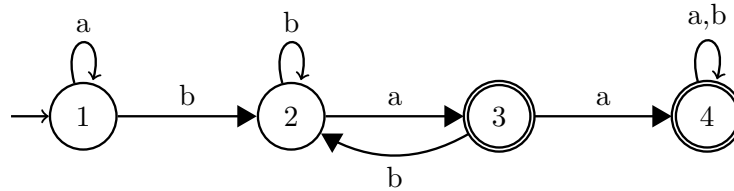
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

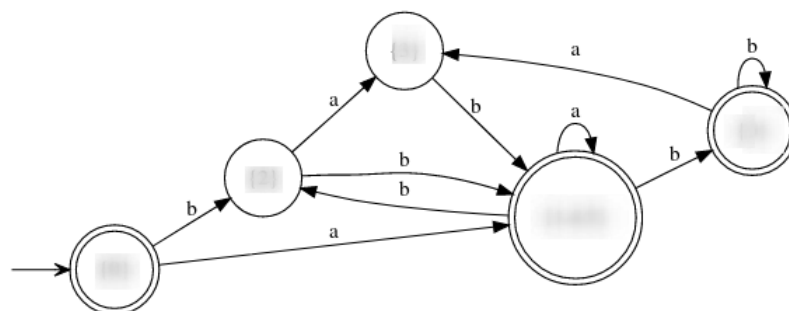
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☒ c 4 ☐ d 5 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 2

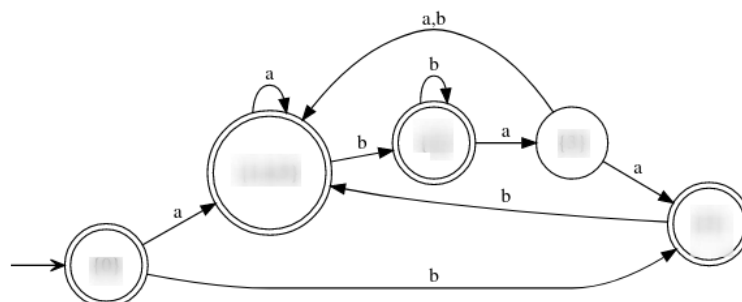
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

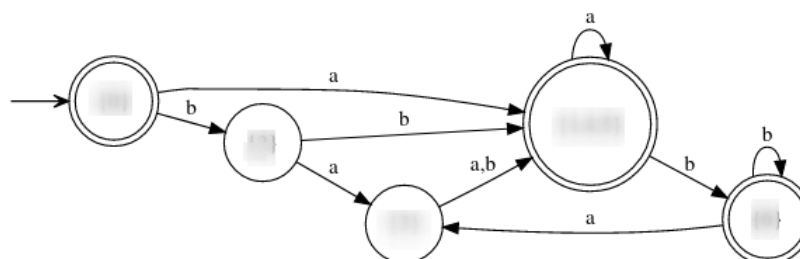
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



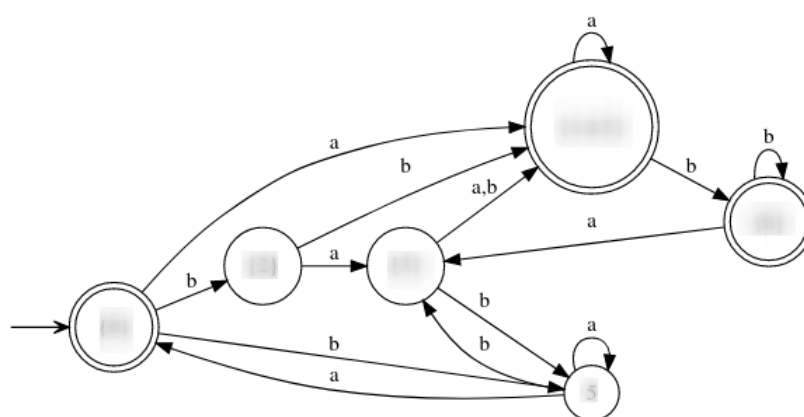
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

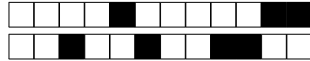


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

		c			f		h	i	j	k

Question 5 :

	b	c	d				h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 8 :

			d	e	f		h					m	n

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c	d	e	f		h	i	j		l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

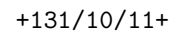
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ | δ | = $|Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b | δ | = $|Q| \times |\Sigma|$. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ d A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.

☐ A a des états accepteurs. ☐ u est accepté par A .

☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.

☐ u n'est pas accepté par A .

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
				☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

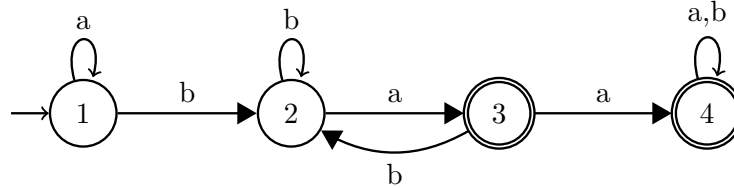
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^* a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

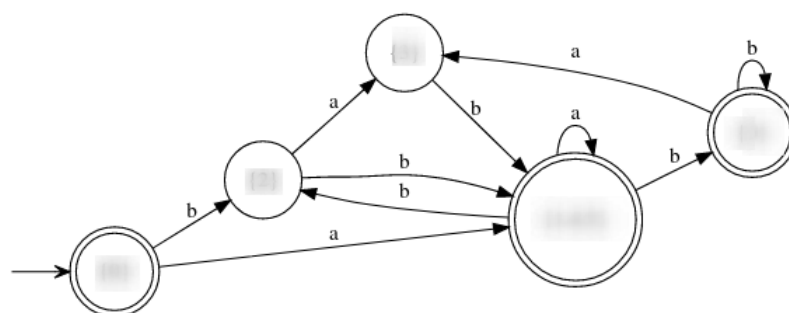
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 3 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 2 ☒ f 4 ☐ g 0

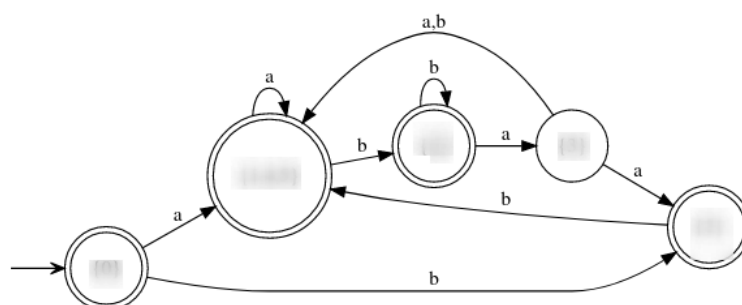
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

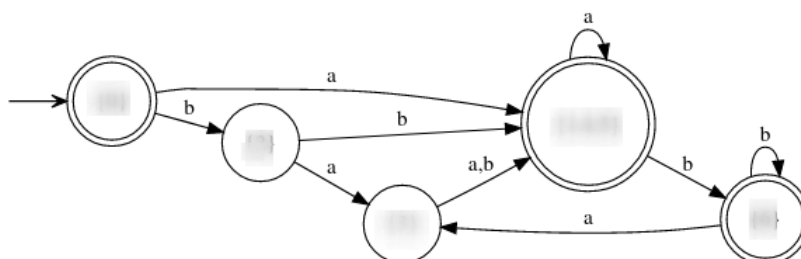
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



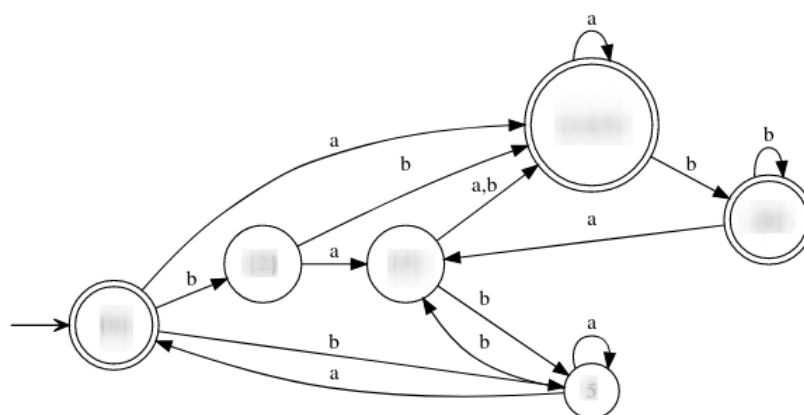
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

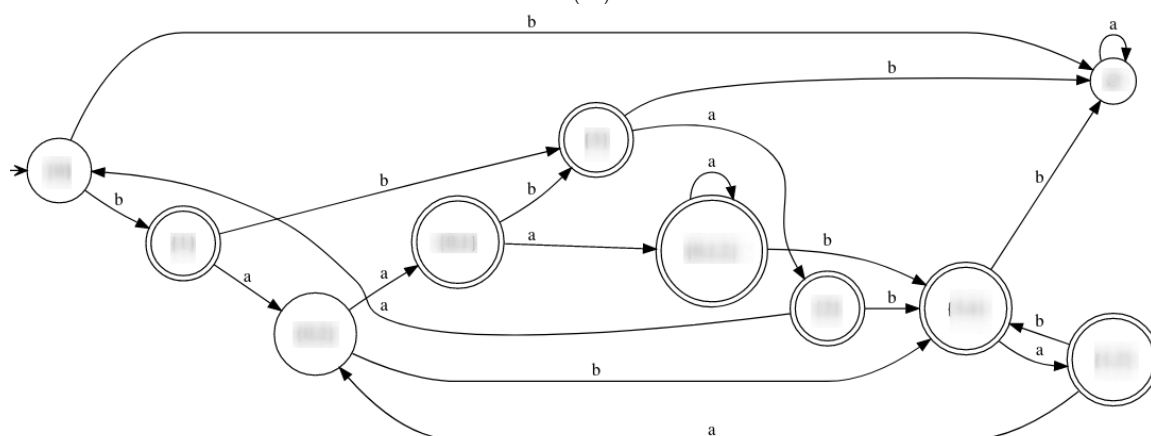


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

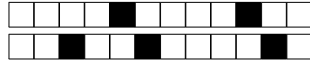


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a							h		j	k		m	n

Question 3 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

		c		e		g	h	i	j

Question 8 :

	b		d	e		g			j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b		d			g	h		j	k	l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

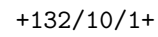
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, with a solid line at the very top. The paper is otherwise blank, with no text or other markings.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slightly aged or off-white appearance.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet. ☐ u est accepté par A .
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

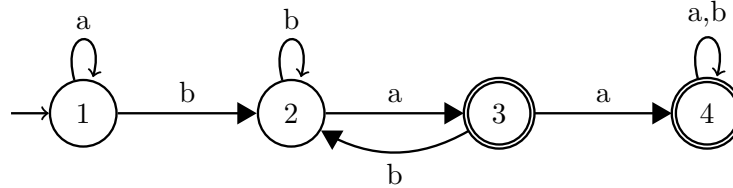
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

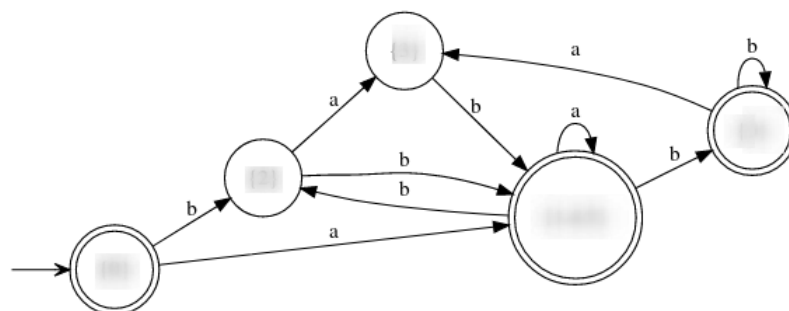
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 2

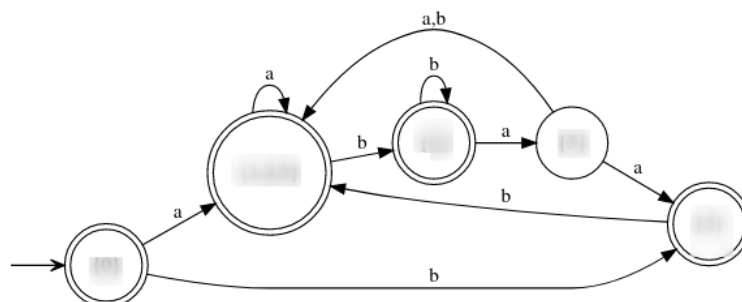
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

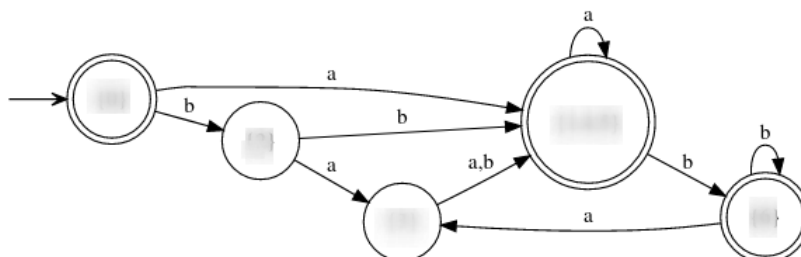
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



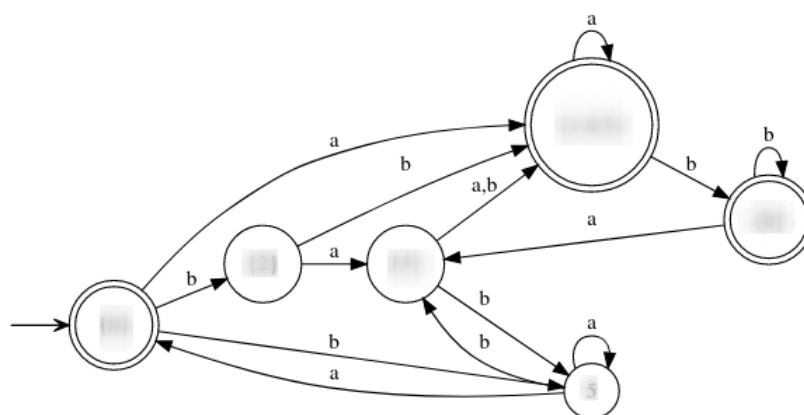
(-i-)



(-ii-)

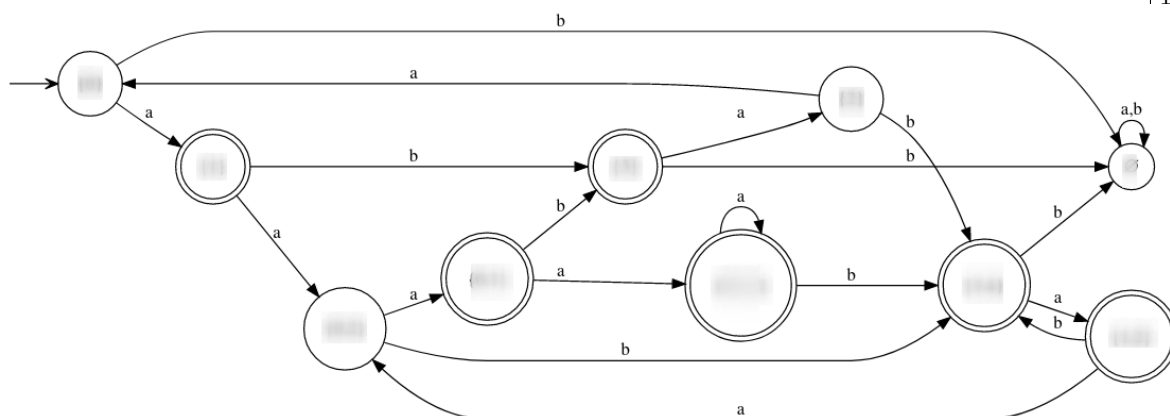


(-iii-)

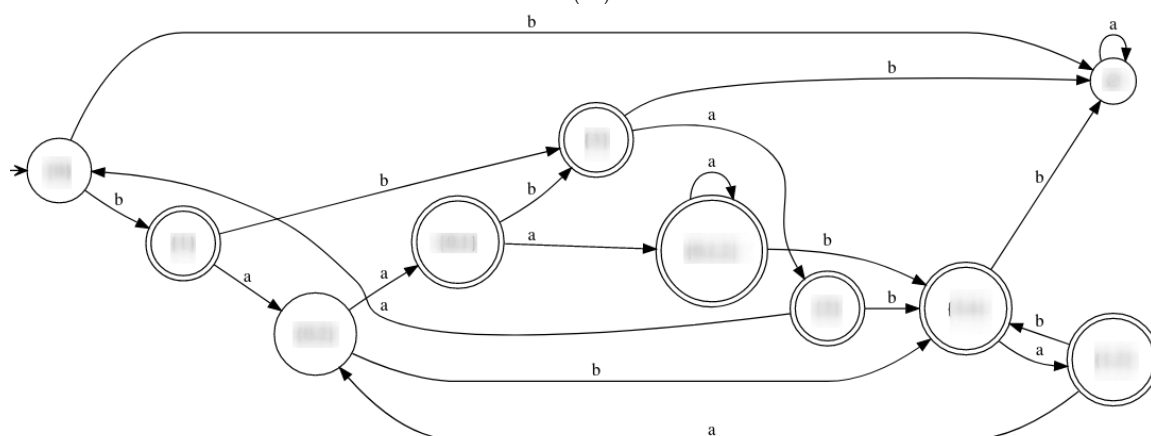


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



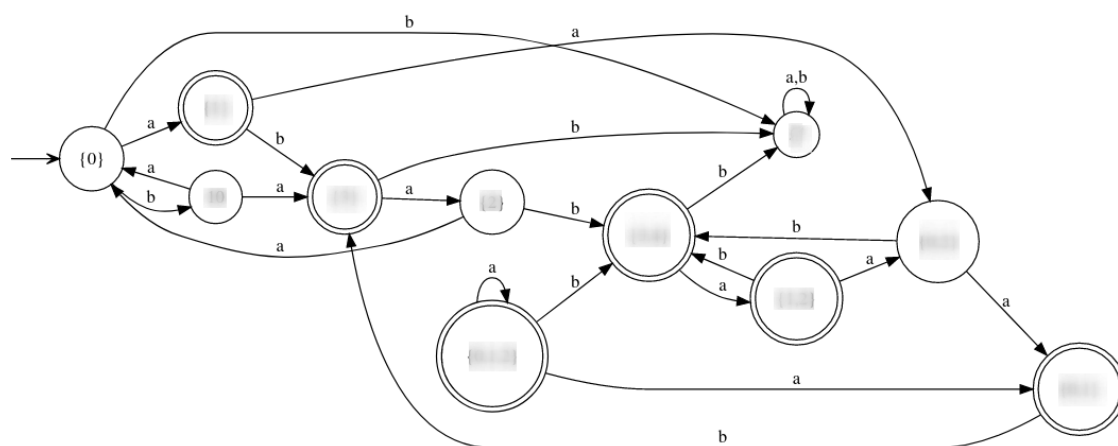
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

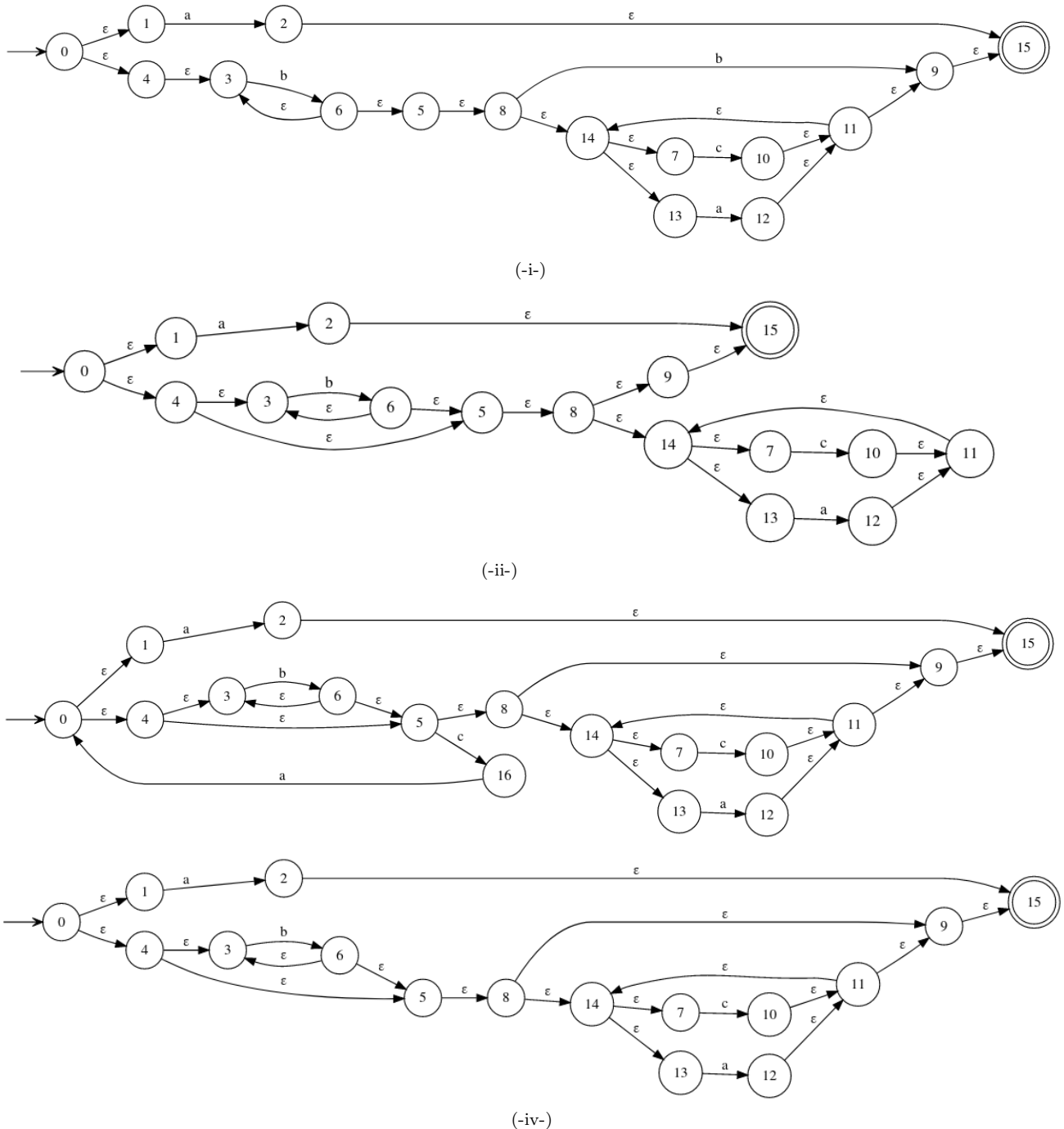
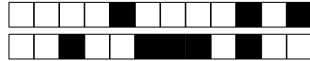


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d  f    j k  m n

Question 3 :   c d e   i j k

Question 4 :   c d  f  h i j

Question 5 :  b c d  f g h i

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 :  b  d e

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a  c  e f g h i   l m

Question 12 : a b c d e  g h

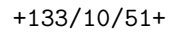
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☐ c Σ^* est fermé par facteur.
☐ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
☐ h Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état accessible. ☐ b u n'est pas accepté par A .
☐ c A n'est pas complet. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ f A a au moins un état non accessible.
☐ g A a au moins un état co-accessible.
☐ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ c A possède un état puits ☐ d A accepte le langage universel.

☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.

☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e A est complet. ☐ f u est accepté par A .

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☒ P est forcément déterministe.

☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot est une application.

☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.

☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ k Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut être vide.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

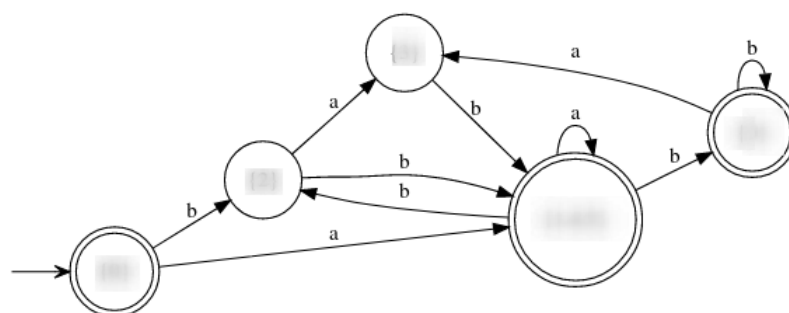
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 0 ☐ c 1 ☐ d 2 ☐ e 5 ☐ f 3 ☒ 4

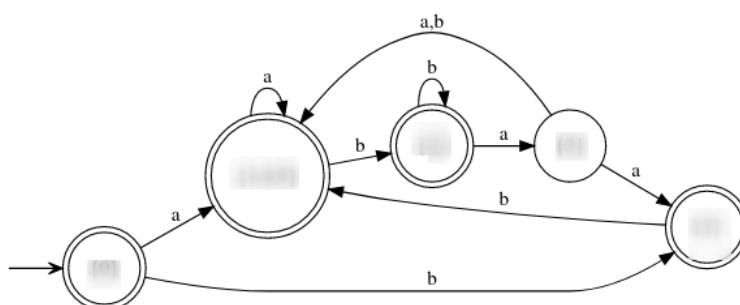
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

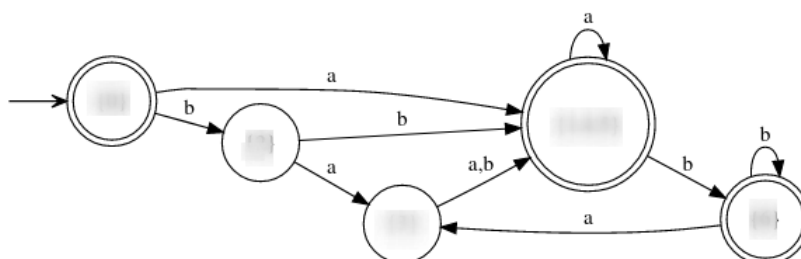
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



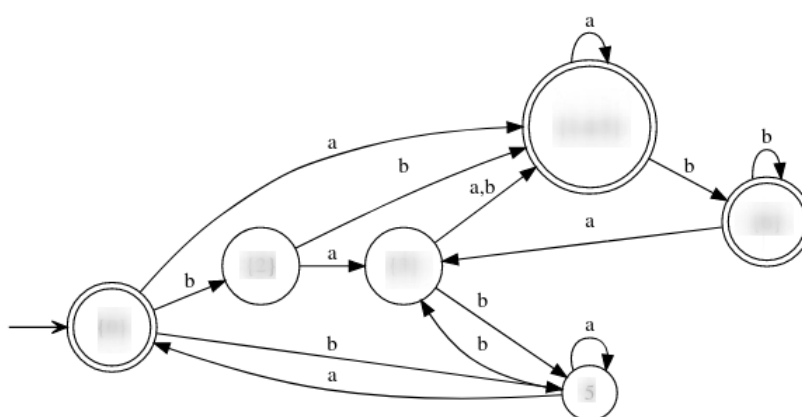
(-i-)



(-ii-)

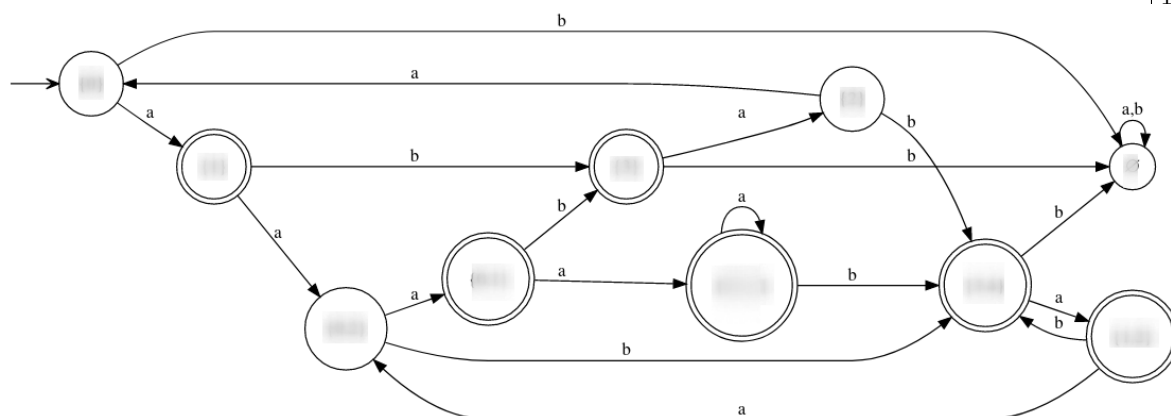


(-iii-)

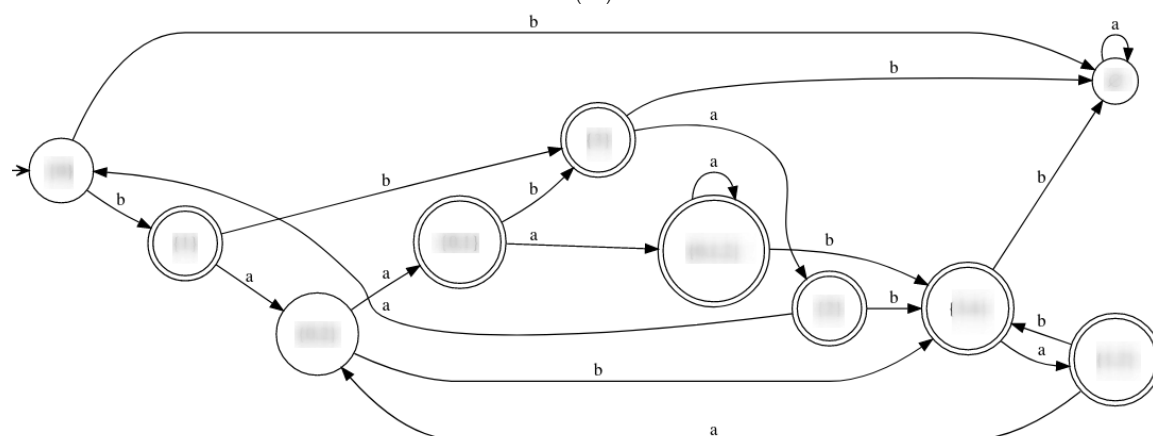


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

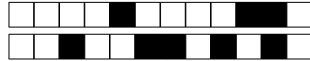


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b				f	g		i	j

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

			d	e	f	g			j	k

Question 5 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

a			d				h			k		m	n

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b		d	e	f	g			j	k	l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

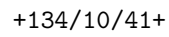
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b A accepte le langage universel.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ e Σ^* est fermé par suffixe.
☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ b P est forcément déterministe.
☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii- ☐ b la Figure 3-iv- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii- ☐ d la Figure 3-i-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii- ☐ la Figure 4-i- ☐ c la Figure 4-iv- ☐ d la Figure 4-iii-

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$	☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

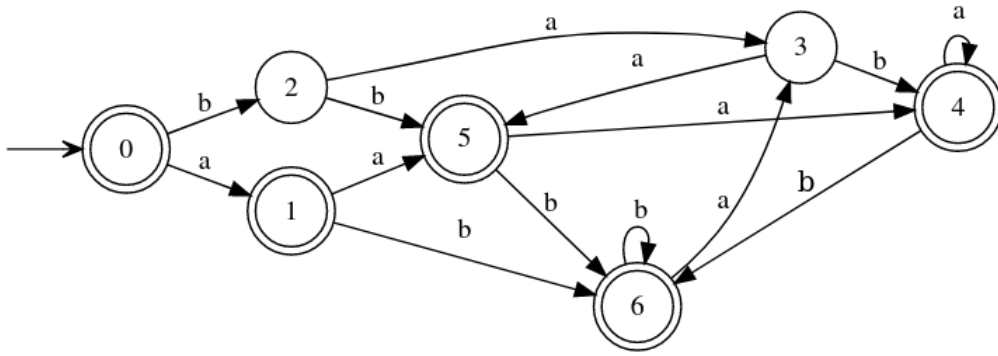
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

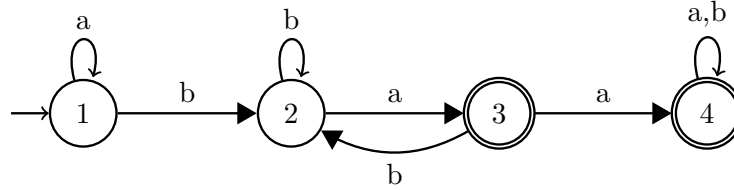
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

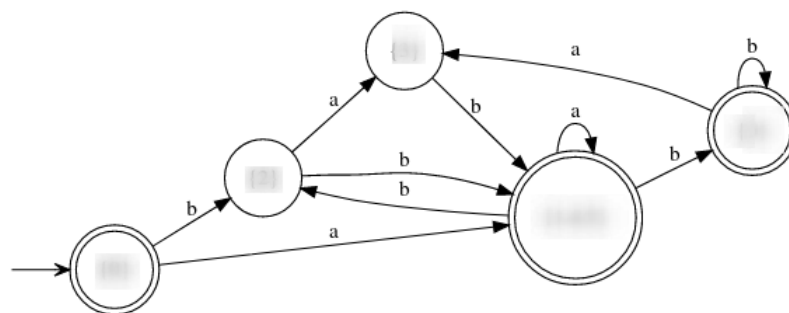
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 0 ☒ 4 ☐ f 1 ☐ g 3

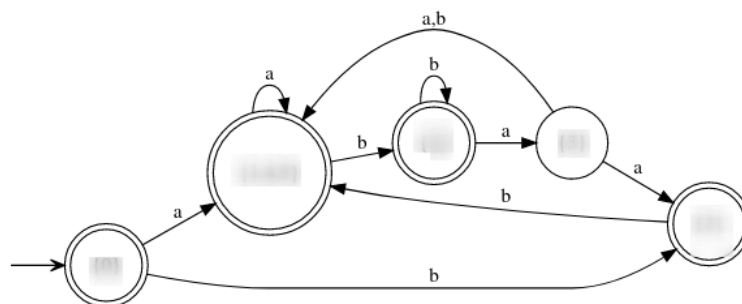
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

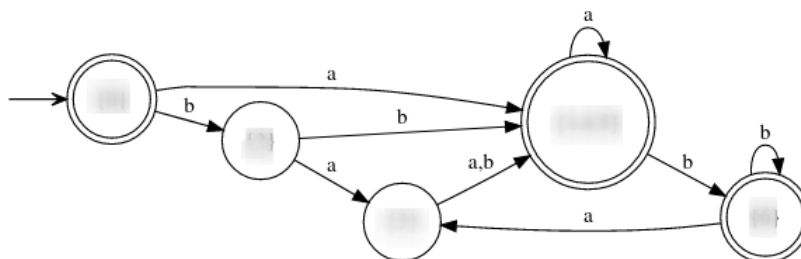
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



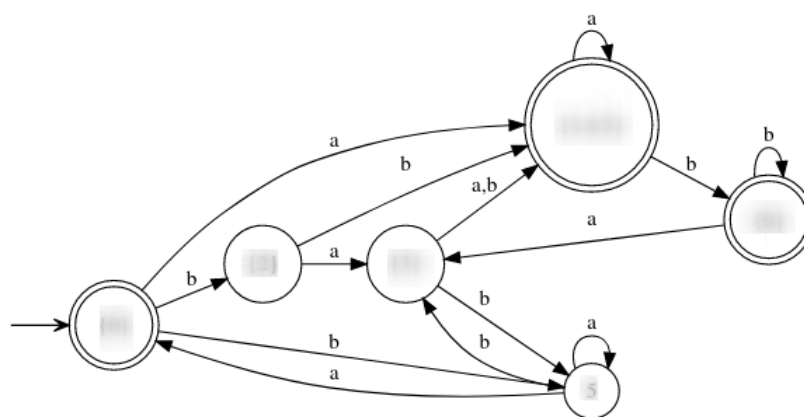
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



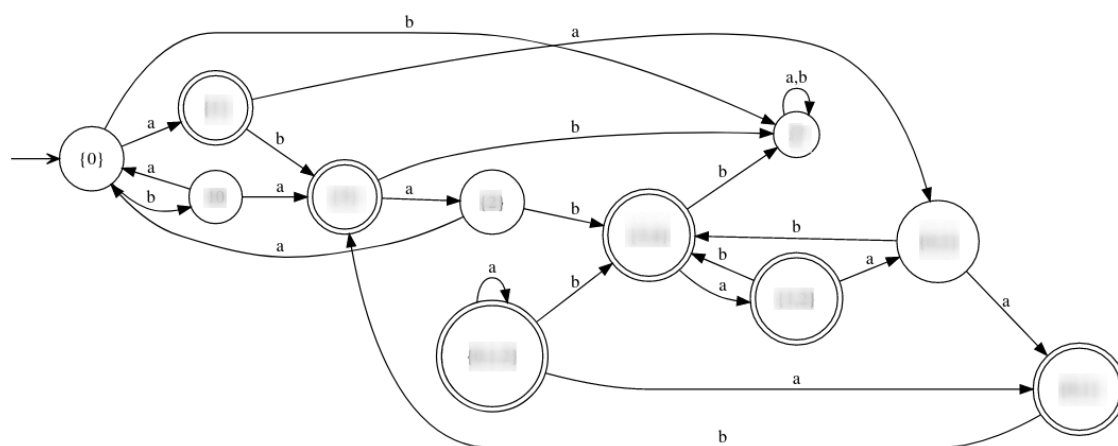
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

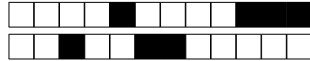


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 3 :

	b	c	d		f			i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a	b	c				g			j	k

Question 7 :

a		c				g				k		m	n

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d		f		h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

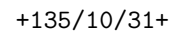
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ b A est complet.
- ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d u est accepté par A .
- ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ b A accepte le langage universel.
- ☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ e A possède un état puits
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
- ☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ b Σ est fermé par suffixe.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ d Σ est fermé par facteur.
- ☒ e Σ^* est fermé par facteur.
- ☒ f Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ g Σ est fermé par préfixe.
- ☒ h Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ g A a au moins un état non accessible.
☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot est une fonction. ☐ f Un mot peut être infini.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

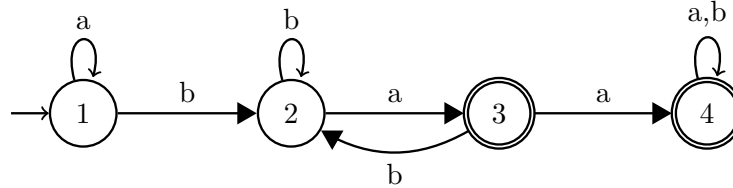
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

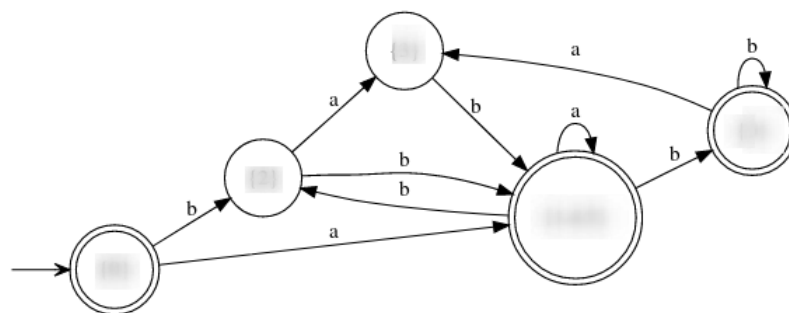
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 1 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 5 ☐ f 6 ☐ g 3

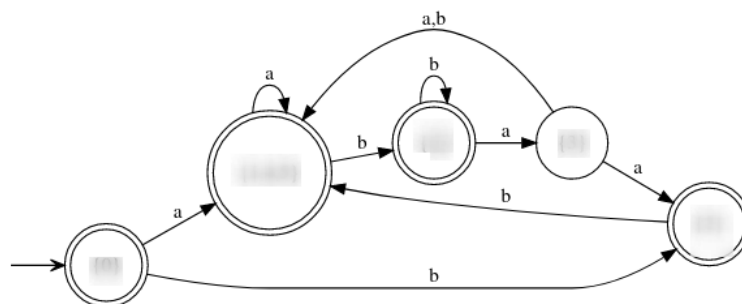
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

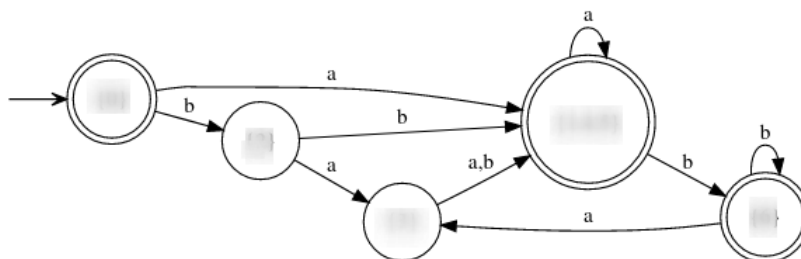
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



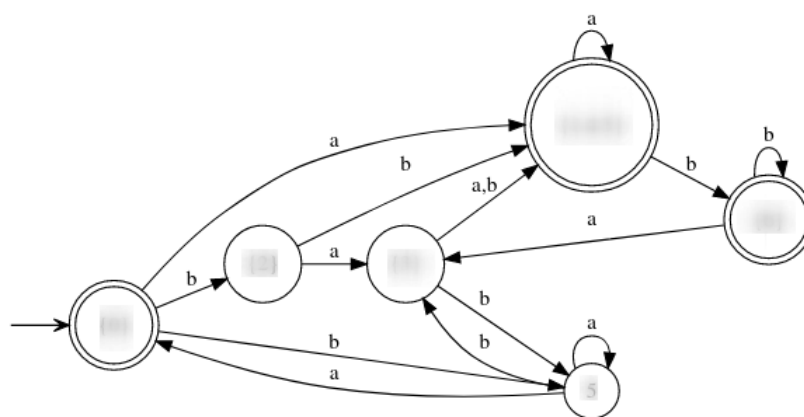
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

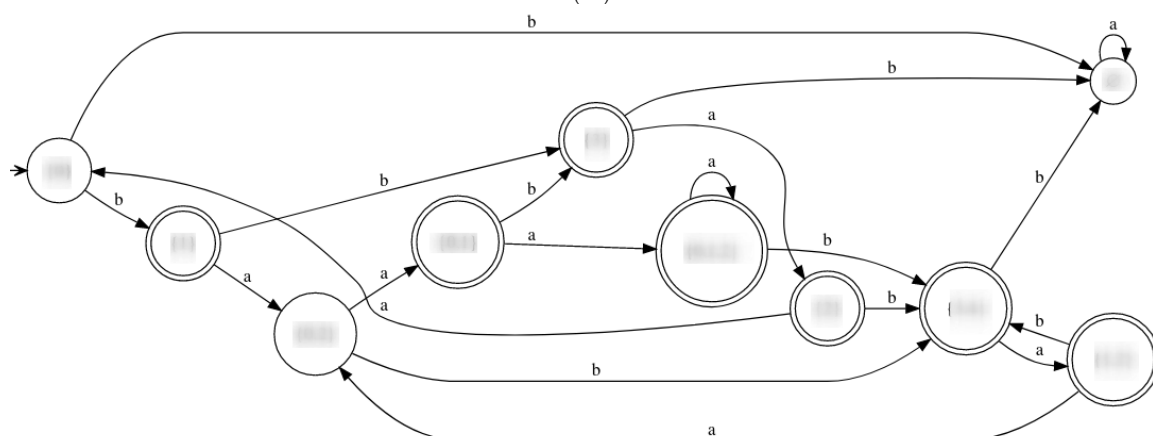


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



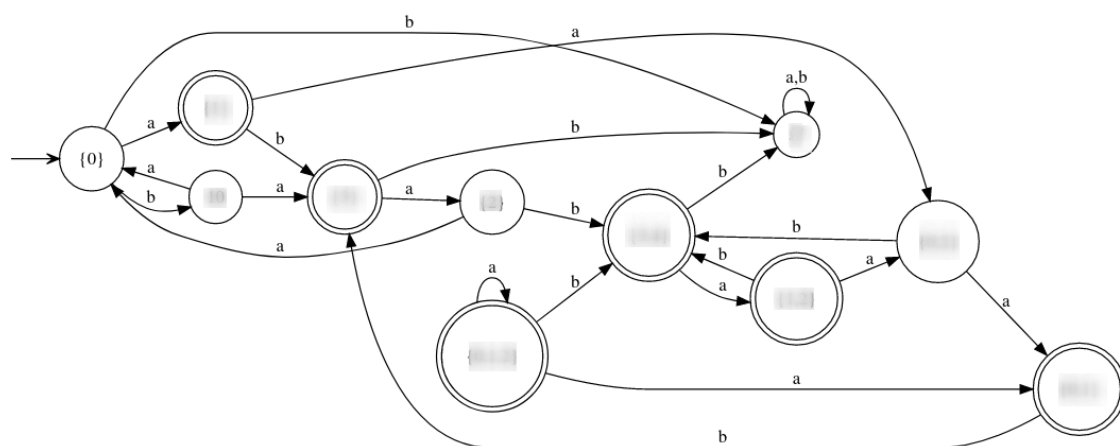
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

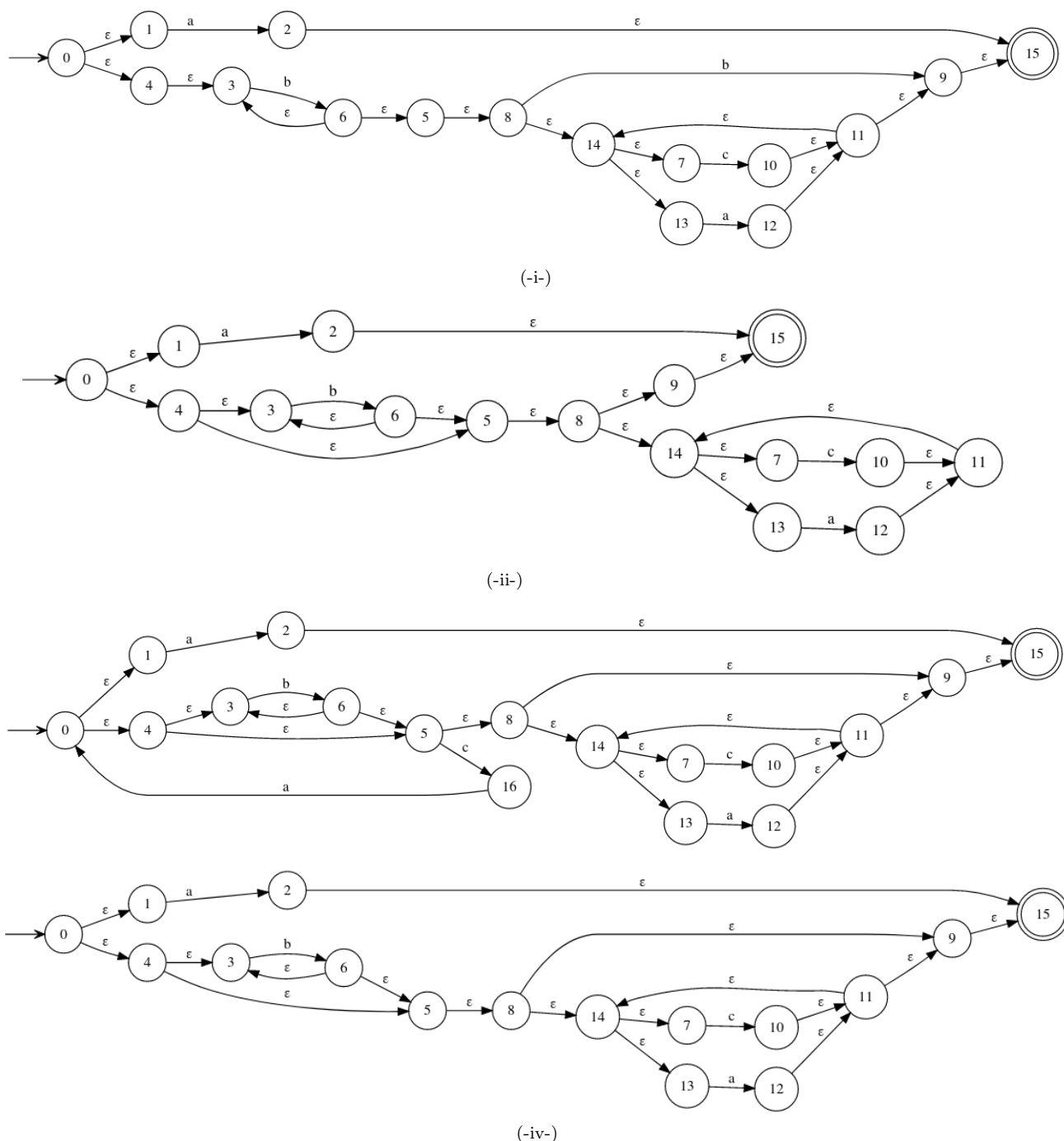
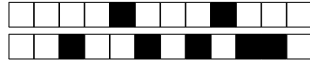


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 5 :

	b	c	d			g		i	j

Question 6 :

		c	d	e

Question 7 :

a		c	d			g			j	k

Question 8 :

		c			f			i	j			m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a				e	f	g	h		j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

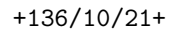
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet.
- ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d u est accepté par A .
- ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ i Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ j Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot est une fonction.
- ☐ l Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ m Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ n Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ o Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ p Un mot peut être infini.
- ☐ q Un mot est une application.
- ☐ r Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ s Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ t Un mot peut être vide.
- ☐ u Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ v Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ w L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ x A accepte le langage universel.
- ☐ y $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f A possède un état puits ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A n'est pas complet. ☐ c A a au moins un état co-accessible.
☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

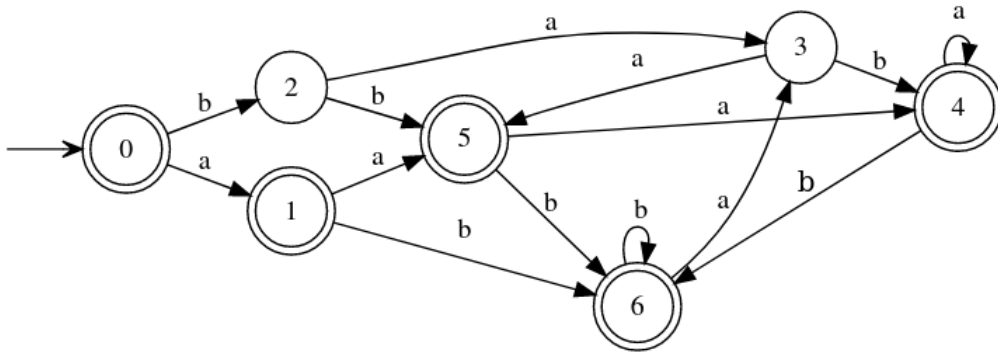
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

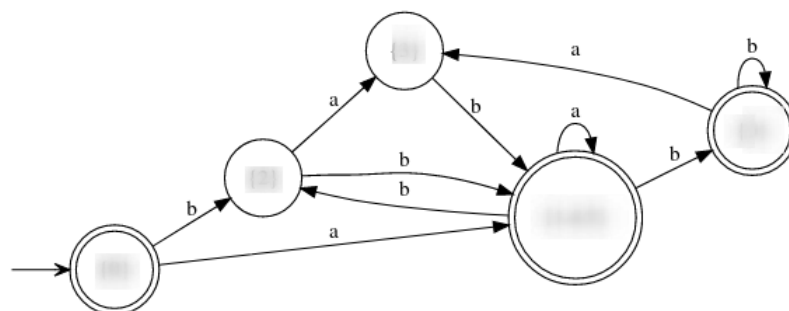
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ 4 ☐ c 6 ☐ d 0 ☐ e 1 ☐ f 2 ☐ g 5

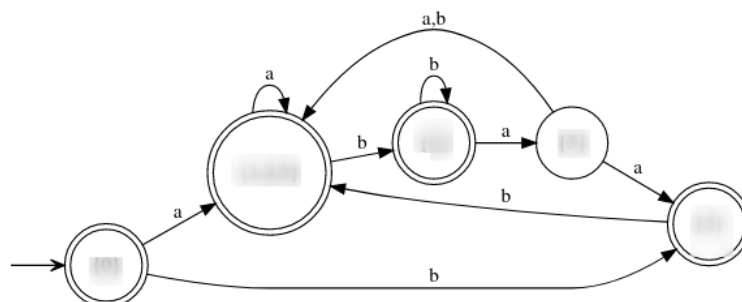
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

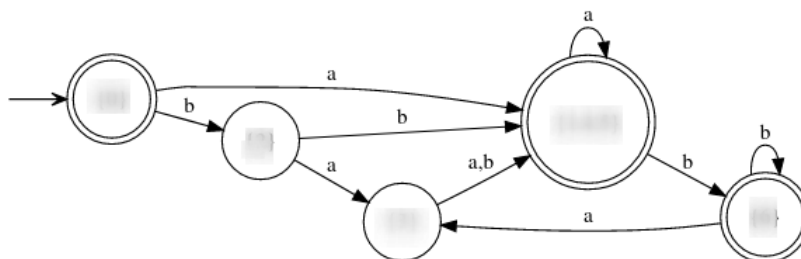
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



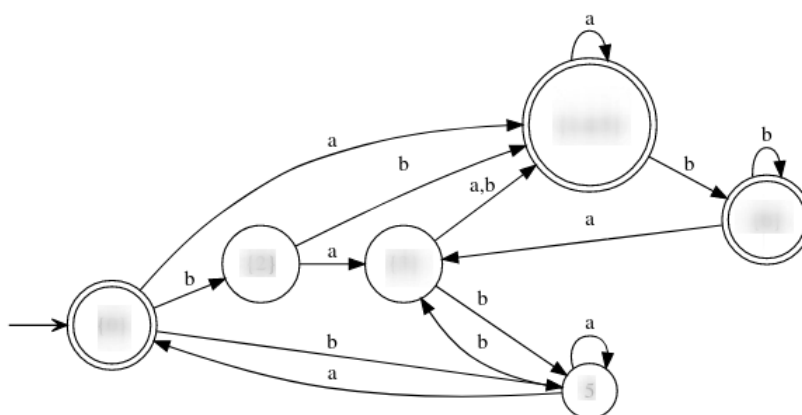
(-i-)



(-ii-)

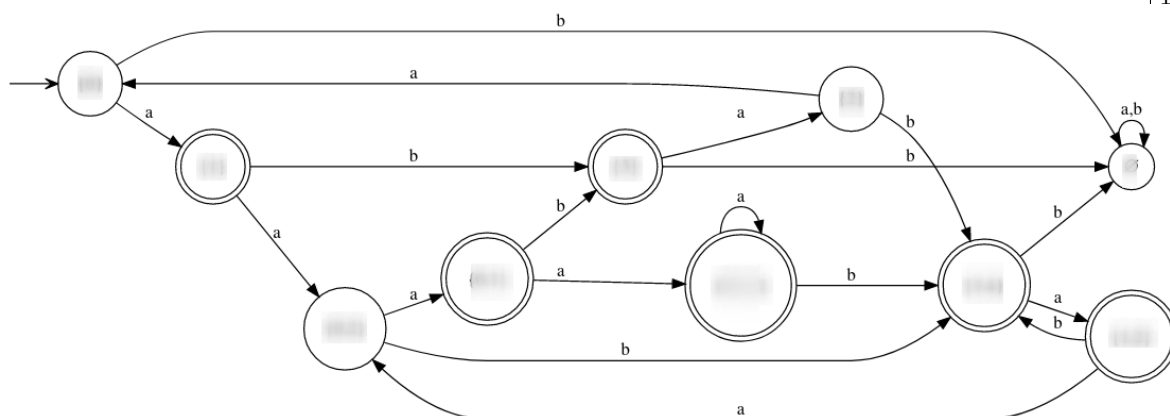


(-iii-)

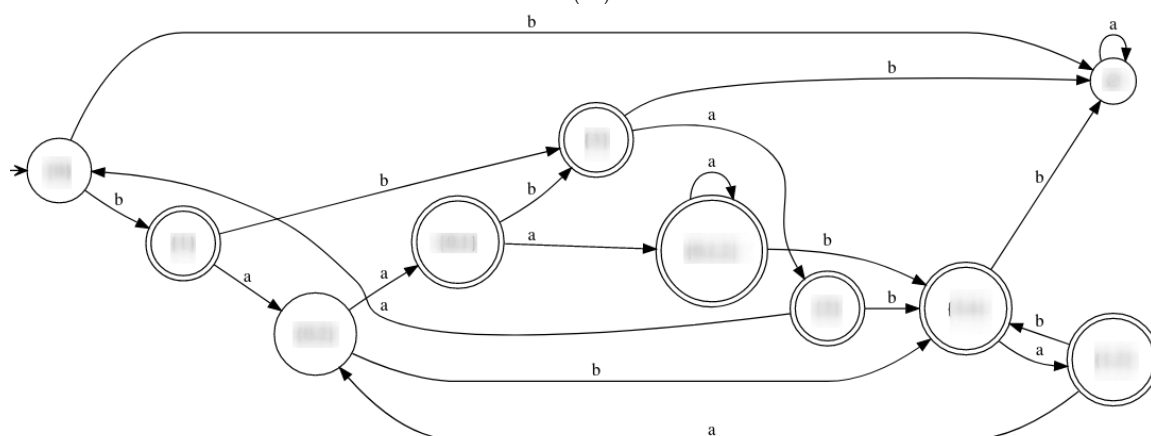


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

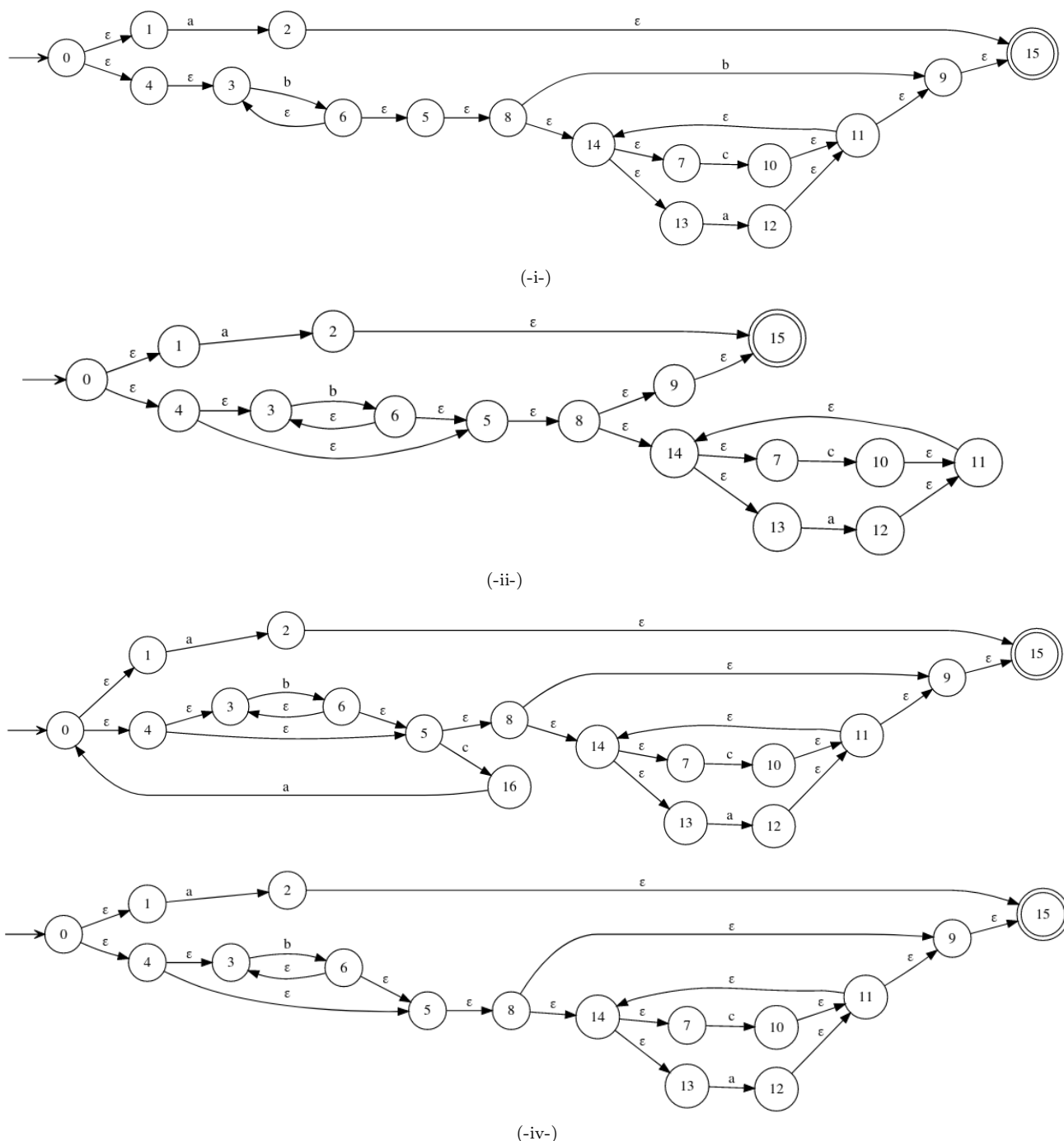
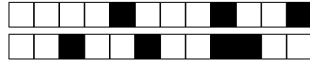


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

					f	g	h		j			m	n

Question 5 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 6 :

		c	d		f		h		j	k

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a		c			f	g		i	j

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a		c	d	e		g	h	i	j	k		

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

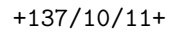
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of small, evenly spaced dots, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

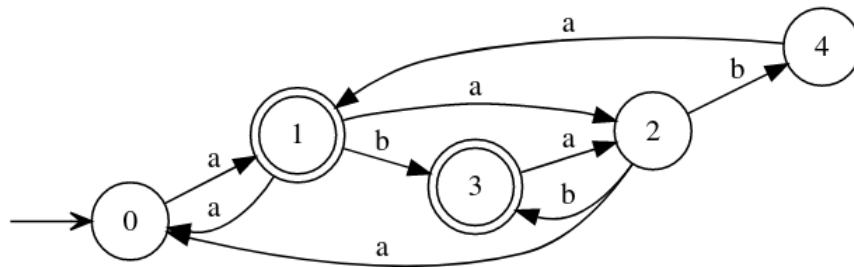
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

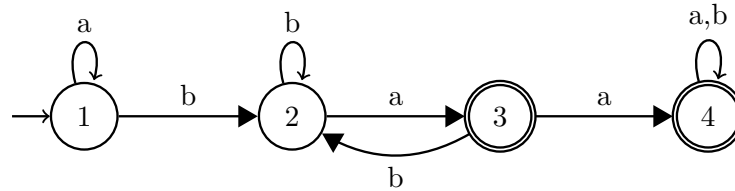
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

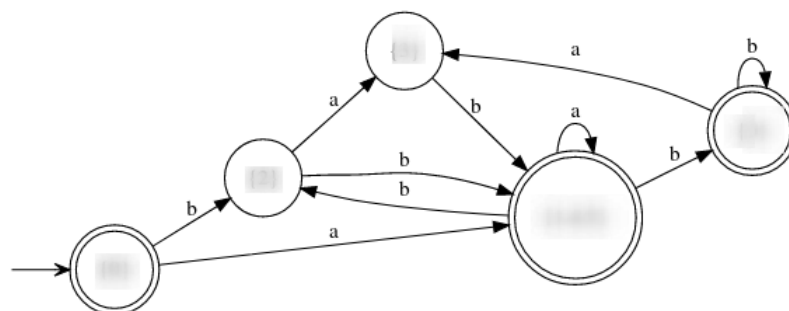
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☐ c 3 ☐ d 2 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 0

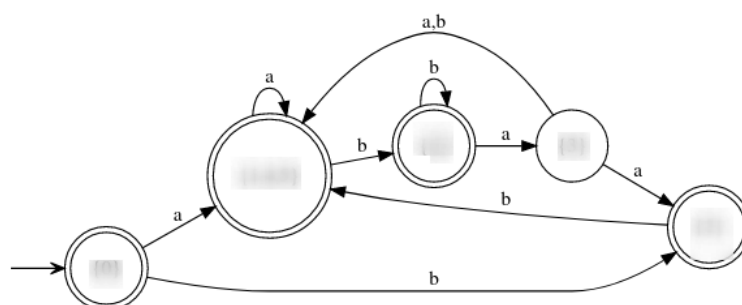
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

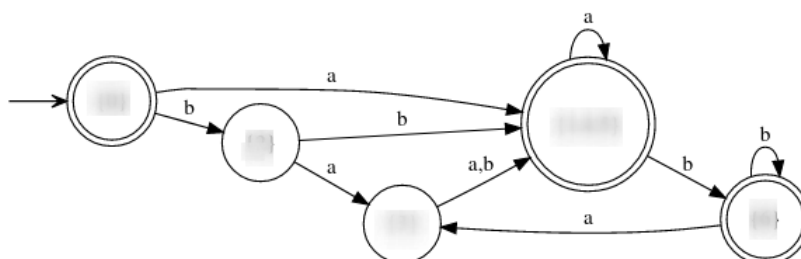
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



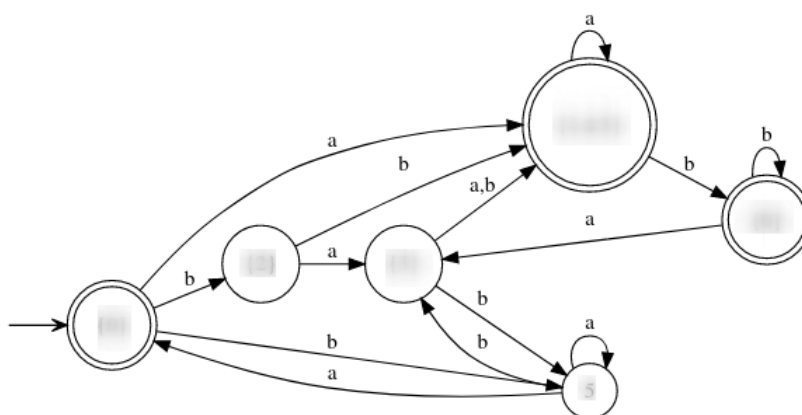
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

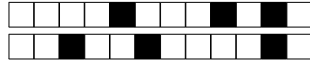


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f g  i j

Question 3 : a  c  e f g h i

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c d 

Question 6 :  b     g h i    m n

Question 7 :  b  d e

Question 8 : a  c d     i j k

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a  c d e f g  i   l m

Question 12 :  b c d e f g h

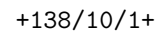
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits
☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
☒ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b P est forcément déterministe.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par suffixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ A a au moins un état accessible. ☒ A n'est pas complet.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ d A a au moins un état co-accessible. ☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☐ h A a au moins un état non accessible.
☒ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot est une application.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot peut être infini.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

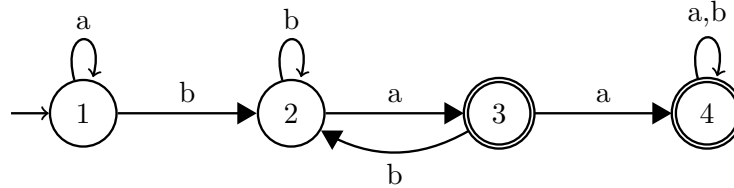
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

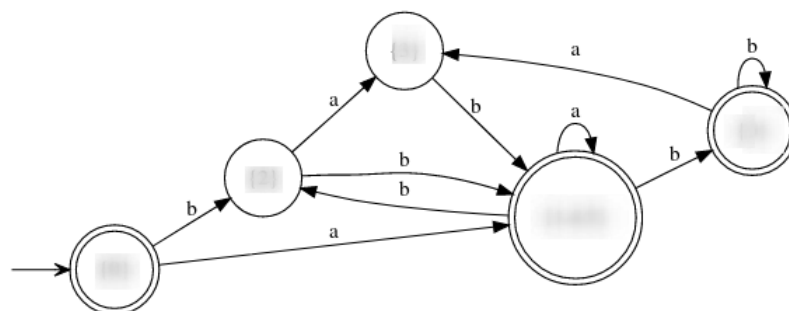
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 5 ☐ f 3 ☐ g 1

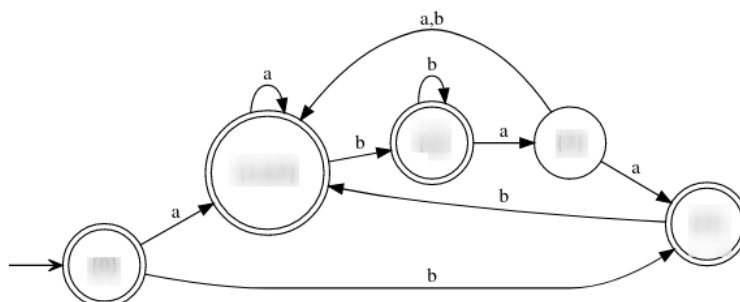
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

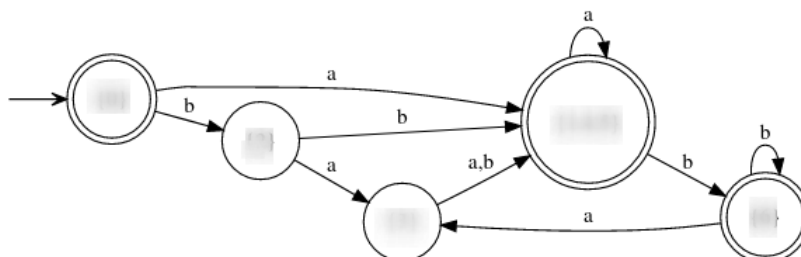
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



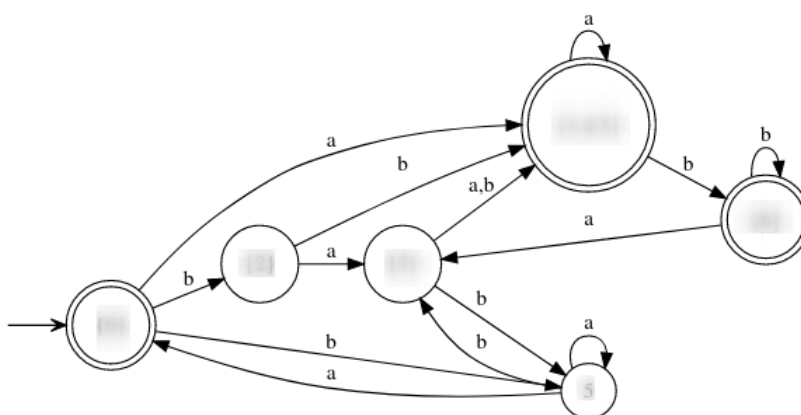
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

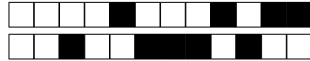


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 5 :

a			d	e

Question 6 :

a		c		e			h	i	j

Question 7 :

			d	e		g	h		j	k

Question 8 :

			d		f					k	l	m	n

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c		e	f			i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

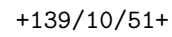
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A .
- ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ e A est complet.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ e Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ f $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☒ g A a au moins un état accessible.
- ☒ h u n'est pas accepté par A .
- ☒ i A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.

- ☐ d A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ j Un mot peut être infini.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	
☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	
☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☒ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

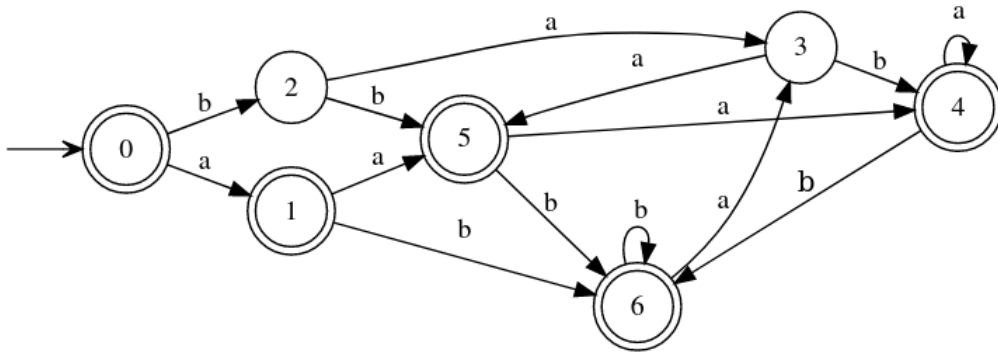
☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

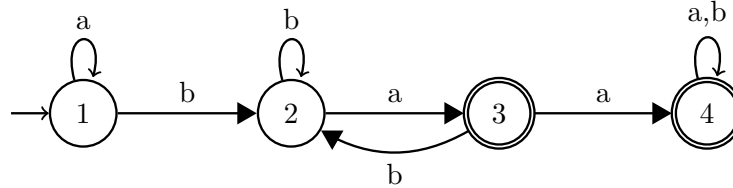
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

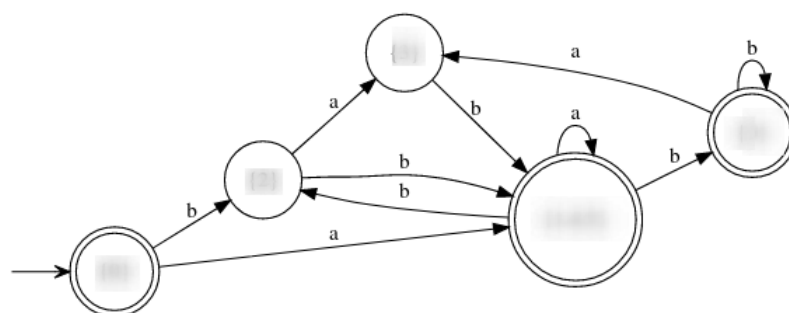
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 6 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 0

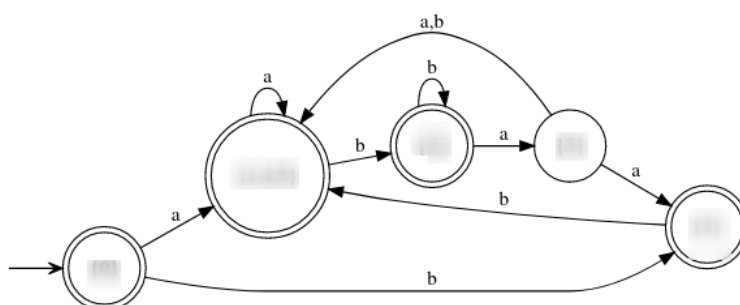
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

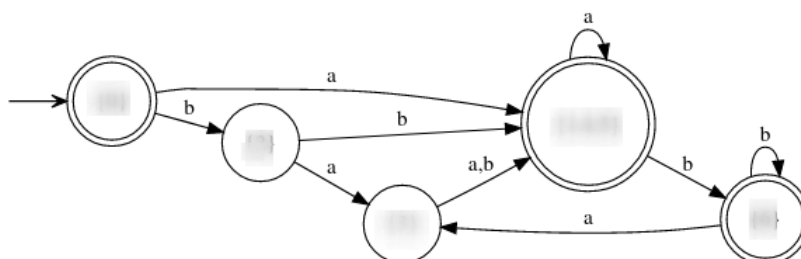
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



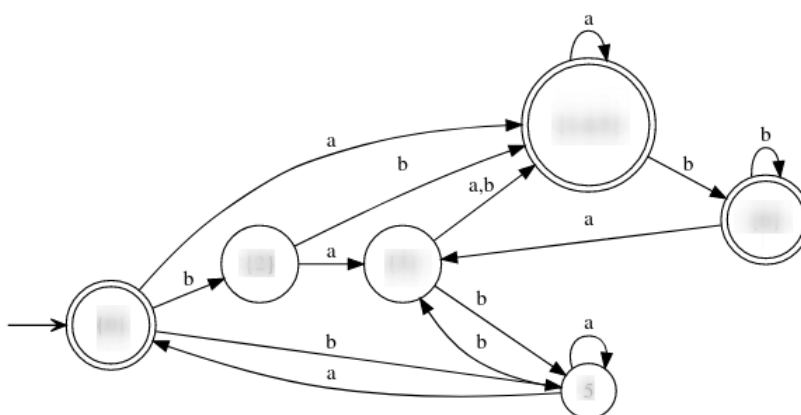
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

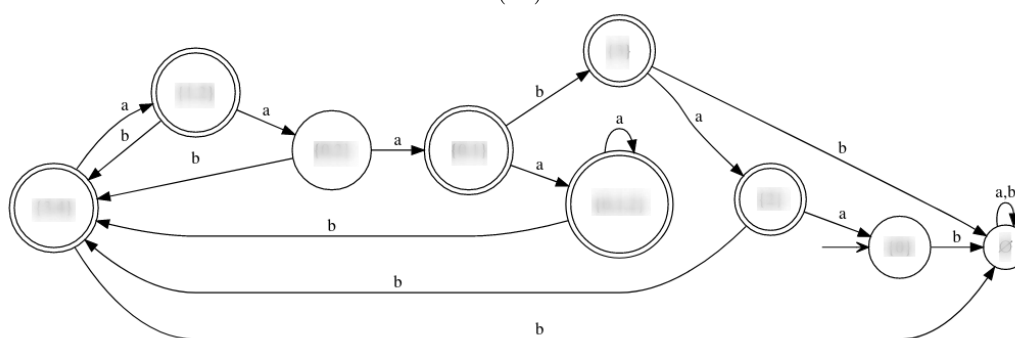
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



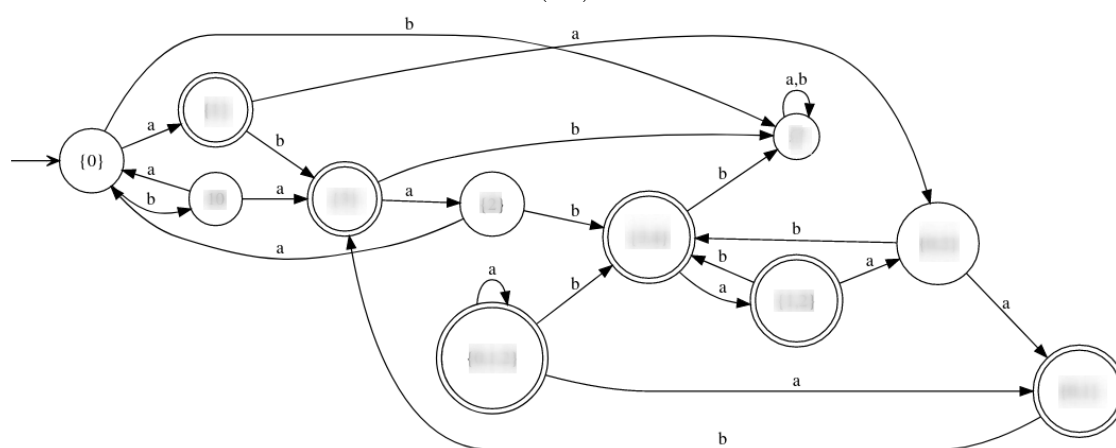
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

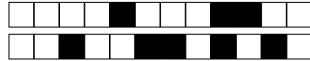


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a	b	c	d						j	k

Question 5 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 6 :

	b		d	e

Question 7 :

	b	c		e	f			i	j

Question 8 :

	b	c						j	k		m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

	b	c	d	e	f	g		i	j			m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

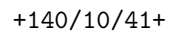
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A est complet. ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
☐ d A possède un état puits ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ c Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ d Un mot est une application.
☐ e Un mot peut être infini. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ h Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible.
 ☐ b A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ A n'est pas complet.
- ☐ f A a au moins un état non co-accessible.
 ☐ u $\notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ h A a au moins un état non accessible.
 ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ b Σ est fermé par facteur.
 ☐ c Σ est fermé par suffixe.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe.
 ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-
 ☐ b la Figure 3-i-
 ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-
 ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-
 ☐ la Figure 4-i-
 ☐ c la Figure 4-ii-
 ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
				☐ j	$X_4 = a + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

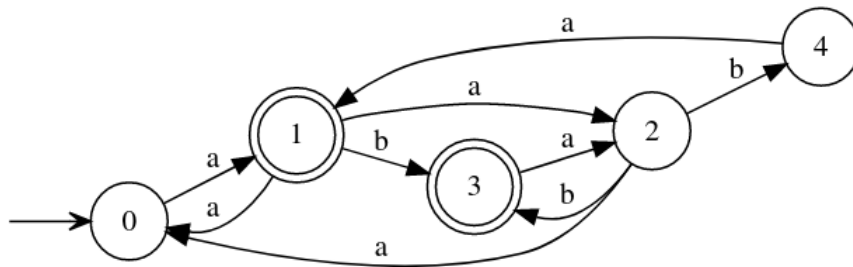
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

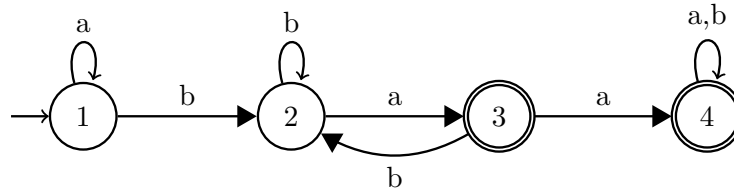
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

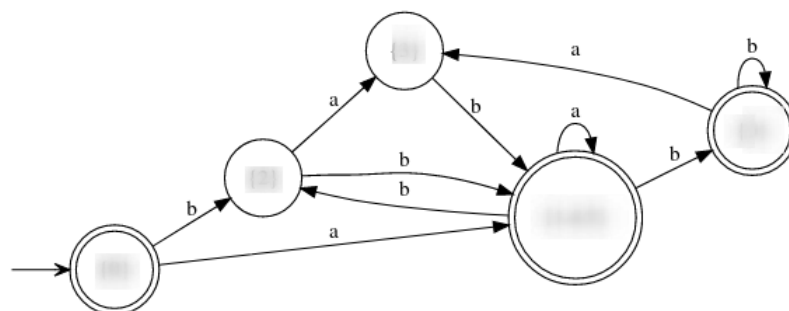
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 5 ☐ c 3 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 6 ☐ g 2

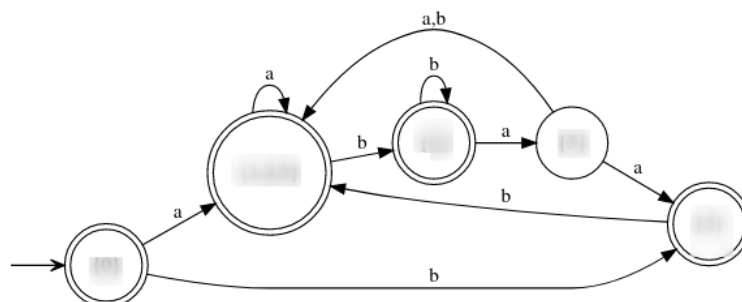
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

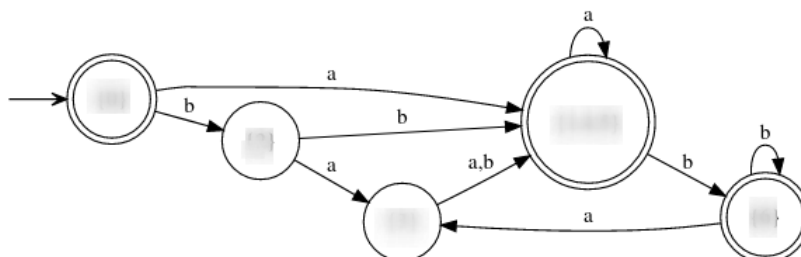
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



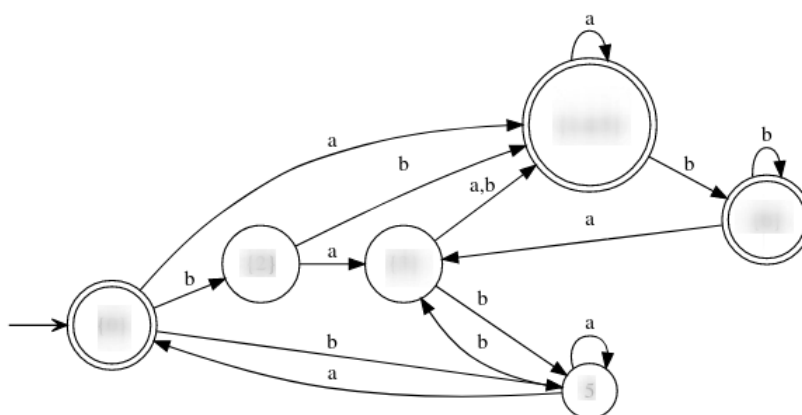
(-i-)



(-ii-)

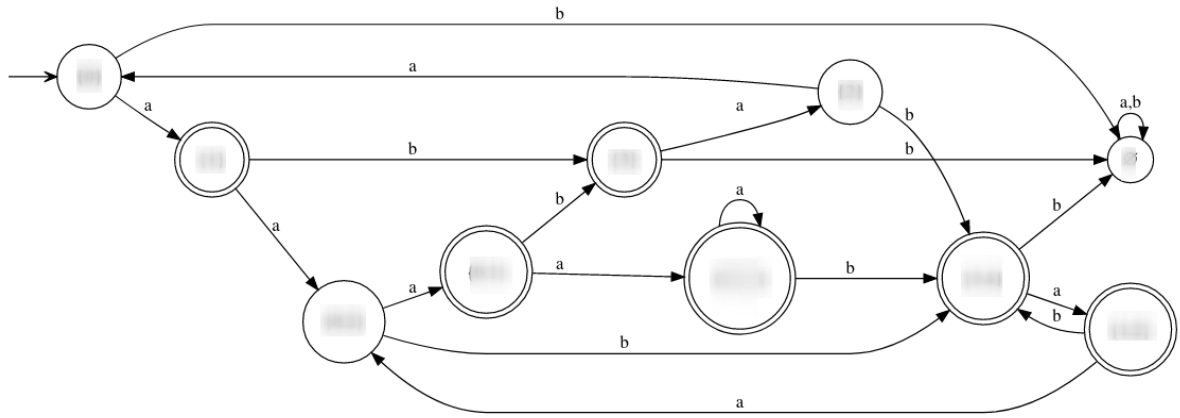


(-iii-)

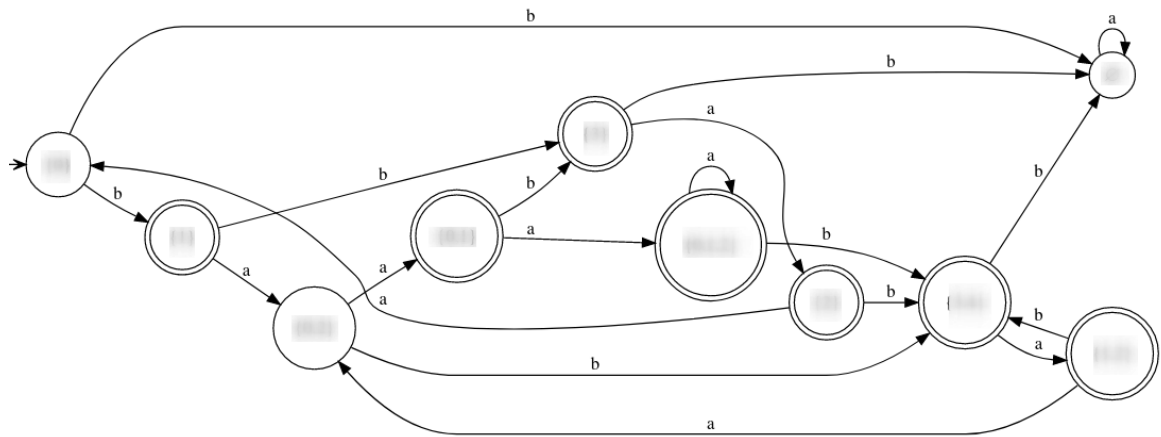


(-iv-)

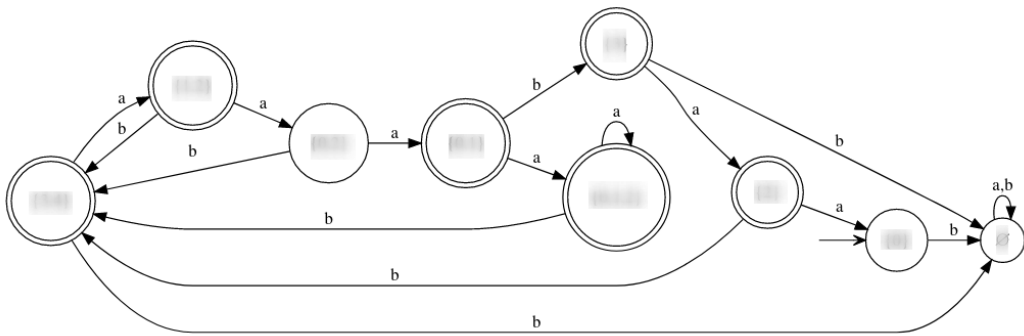
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



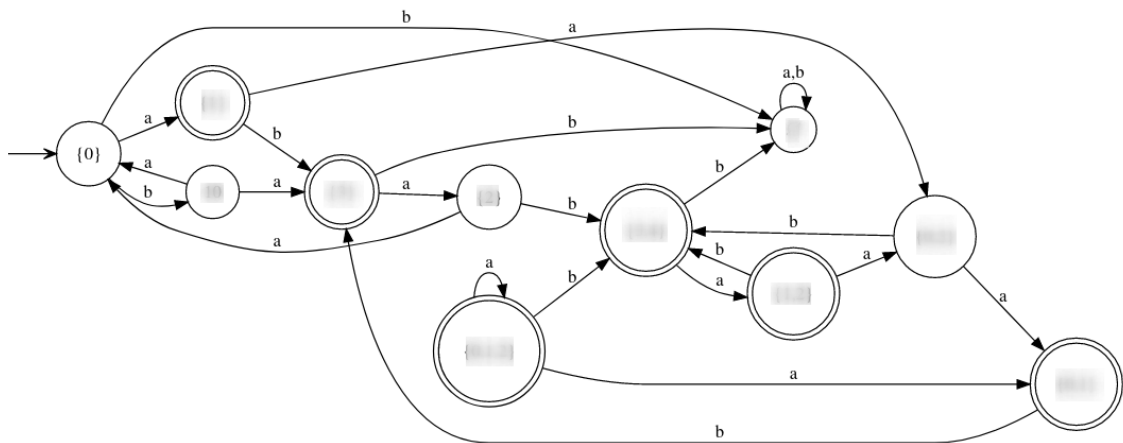
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

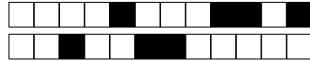


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a		c	d	e		g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a	b			e	f						m	n

Question 6 :

	b		d		f		h		j	k

Question 7 :

	b	c	d	e				i	j

Question 8 :

a			d	e

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c		e	f		h	i	j	k		m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

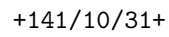
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling. The paper has a solid black border on the top, bottom, and right sides, while the left side is open. There are ten horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for handwriting practice. The lines extend from the left edge to the right edge of the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d u est accepté par A . ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot est une application.
- ☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ e Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot peut être vide.
- ☐ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ c Σ est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par préfixe.

- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ u n'est pas accepté par A . ☐ e A a au moins un état co-accessible.
☐ f A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.
☒ A a au moins un état accessible. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c A accepte le langage universel.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_4 = a + b$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

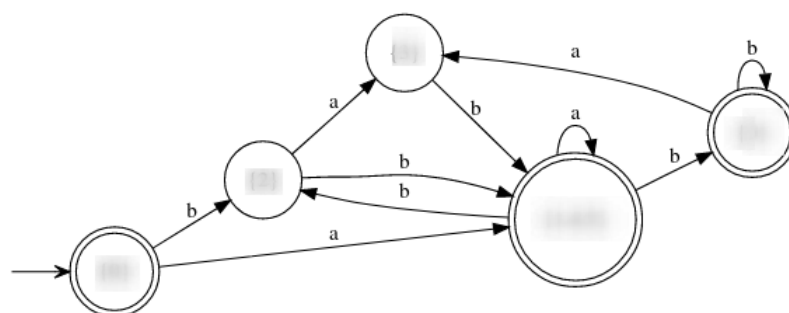
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 0 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 3

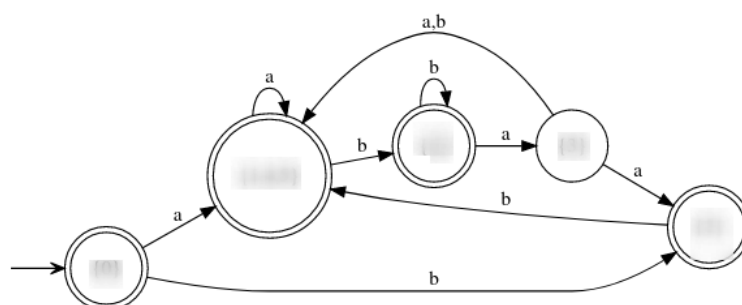
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

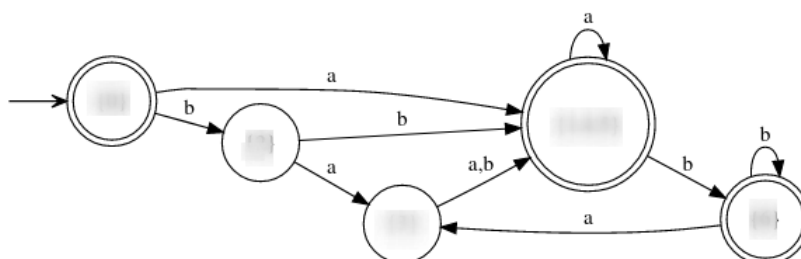
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



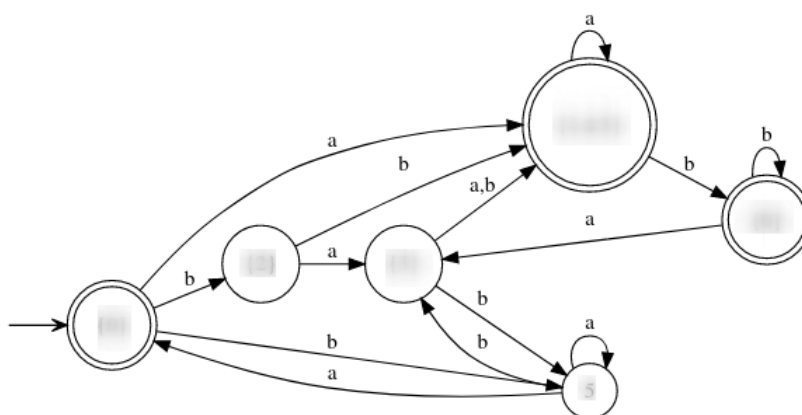
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

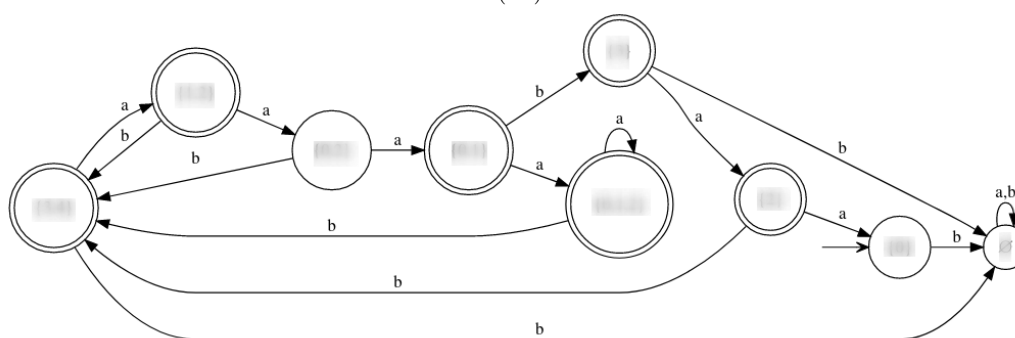
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



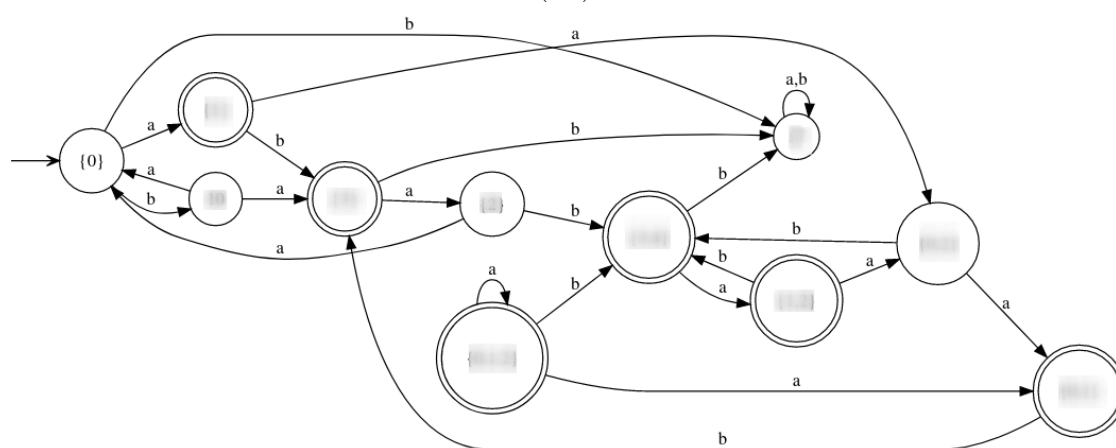
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

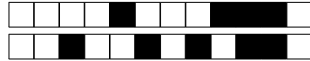


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :    d    h i   l m n

Question 5 :   c d e f   i j

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a    e f   i j k

Question 8 :  b c d e  g h i

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c   f g h   k l m

Question 12 : a  c d e f g h

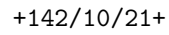
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a. A a des états accepteurs. ☐ b. A est complet. ☐ c. u est accepté par A .
☐ d. Les états de A sont tous accessibles. ☐ e. Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f. $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g. Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a. P est forcément déterministe.
☐ b. Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c. $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d. Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a. A a au moins un état accessible. ☒ b. u n'est pas accepté par A .
☐ c. A a au moins un état co-accessible. ☐ d. A a au moins un état non co-accessible.
☒ e. A n'est pas complet.
☒ f. Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ g. $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ h. A a au moins un état non accessible. ☐ i. A n'a pas d'état accepteur.
☐ j. Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a. L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b. Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
				☐ m	$X_4 = a + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

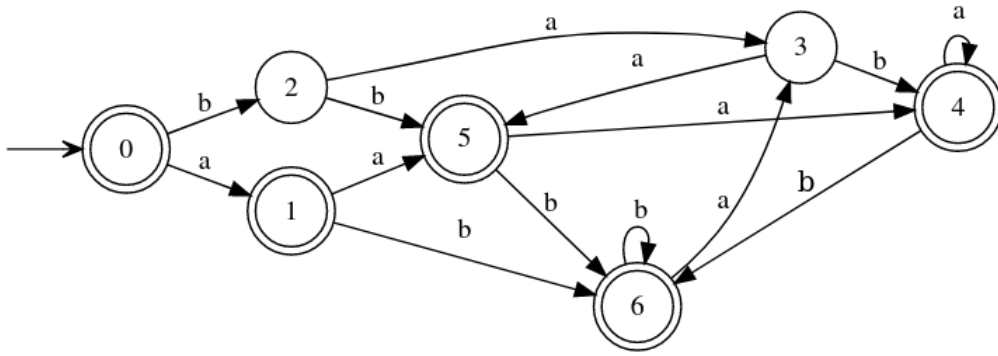
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

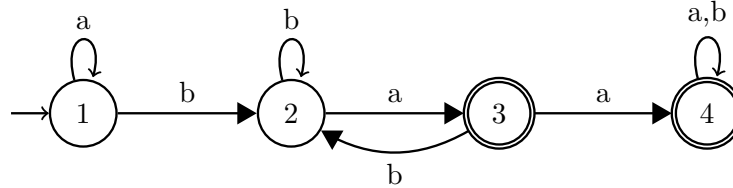
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

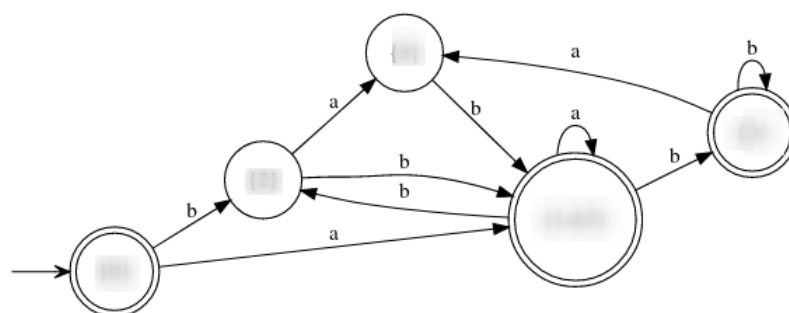
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 1 ☐ g 2

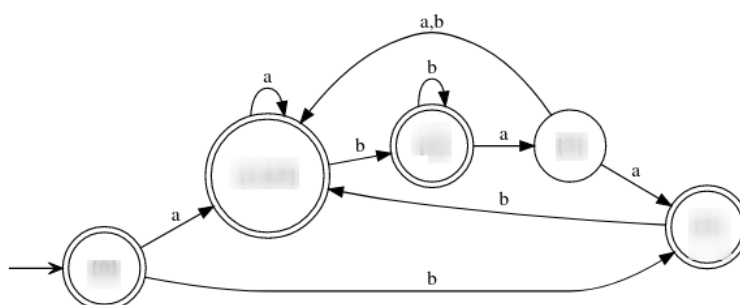
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

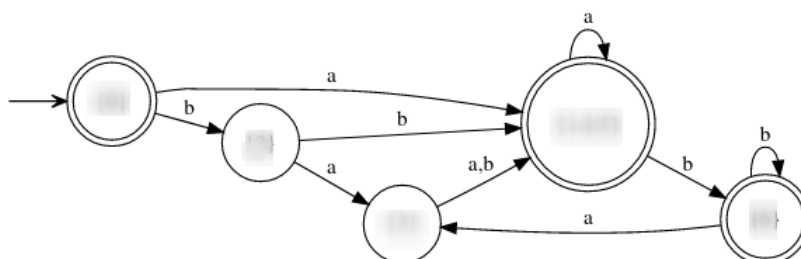
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



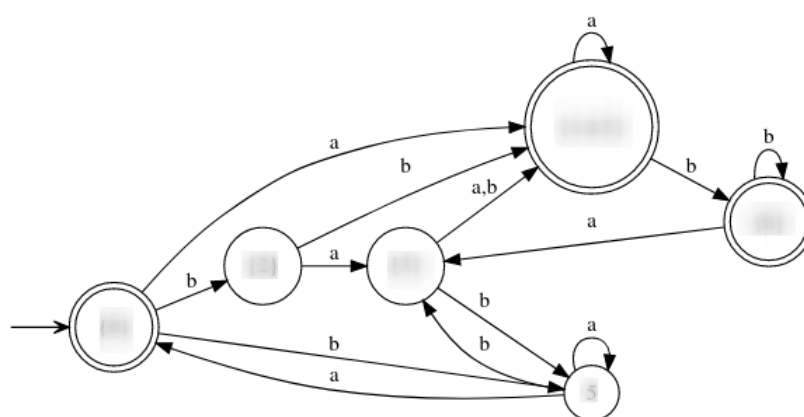
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

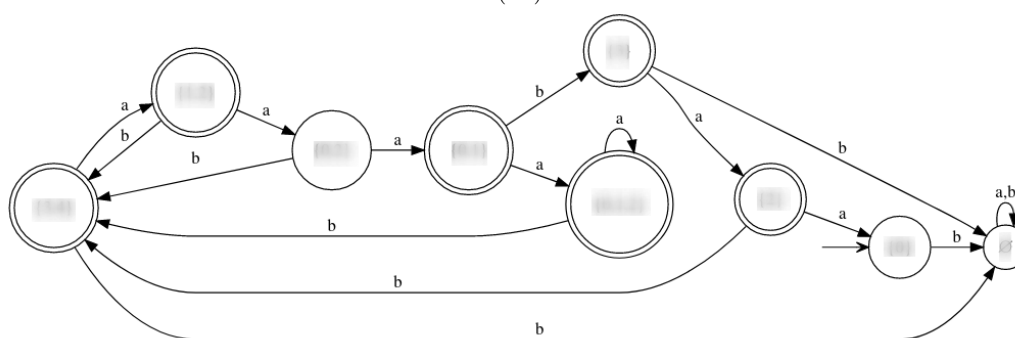
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

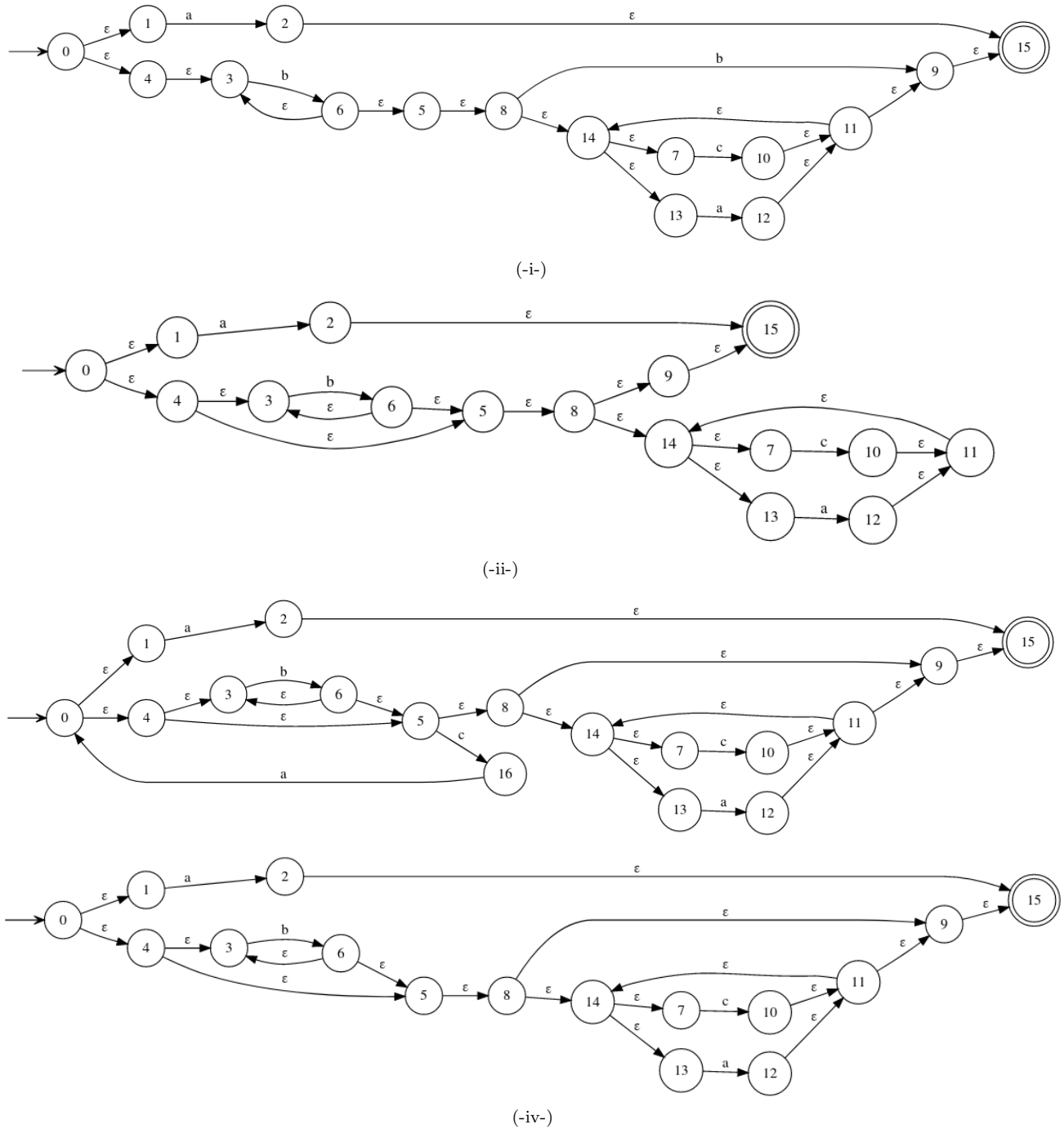
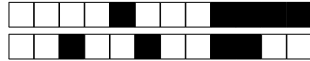


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b		d	e

Question 4 :

		c	d				h	i	j	k

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 7 :

	b						h	i		k		m	n

Question 8 :

a		c				g	h	i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d				h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

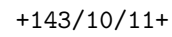
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ d A a au moins un état co-accessible. ☐ e A a au moins un état non accessible.
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A est complet.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ e u est accepté par A . ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot peut être infini.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot est une application. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e A possède un état puits ☐ f A accepte le langage universel. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

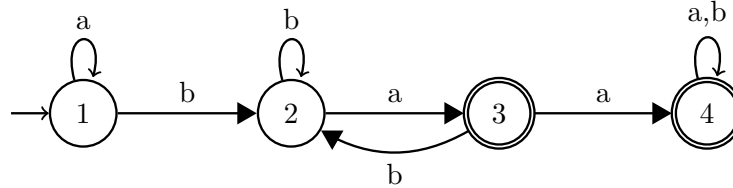
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

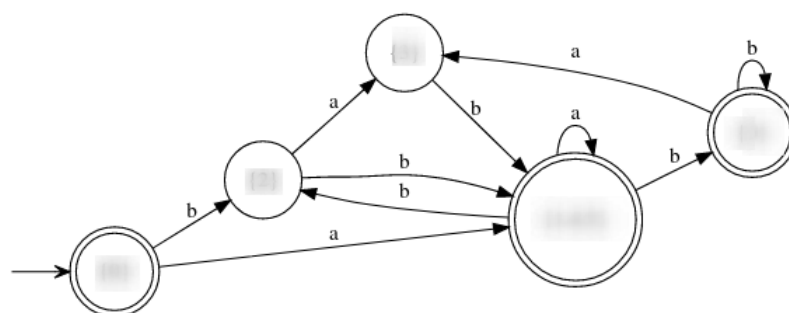
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 2 ☐ f 5 ☐ g 1

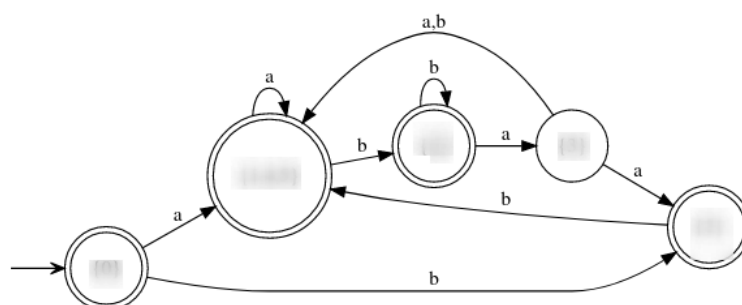
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

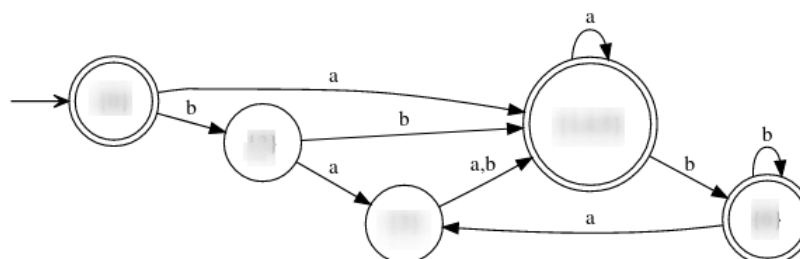
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



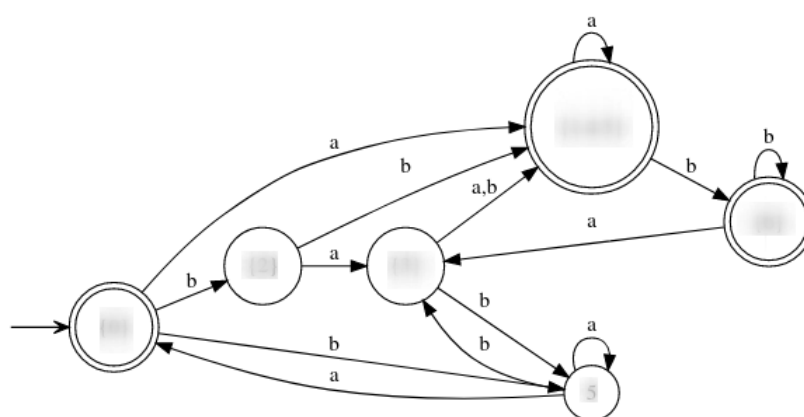
(-i-)



(-ii-)

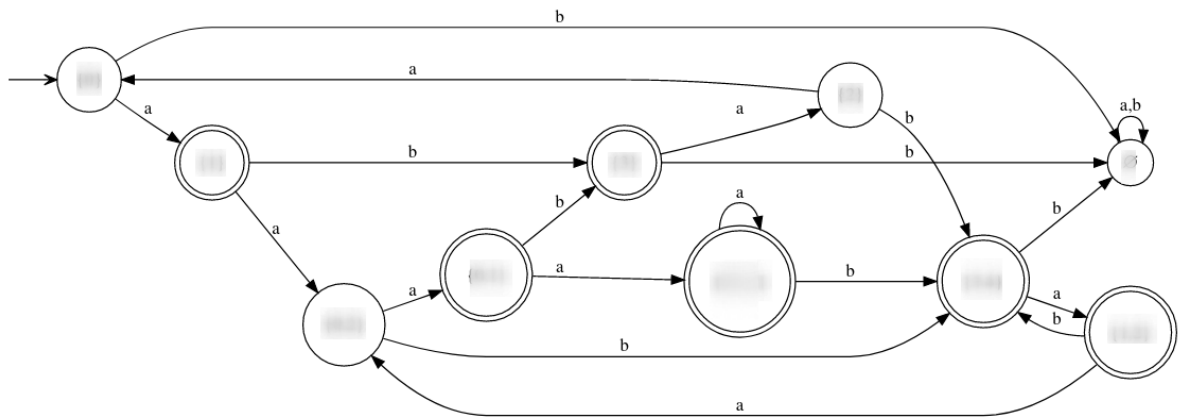


(-iii-)

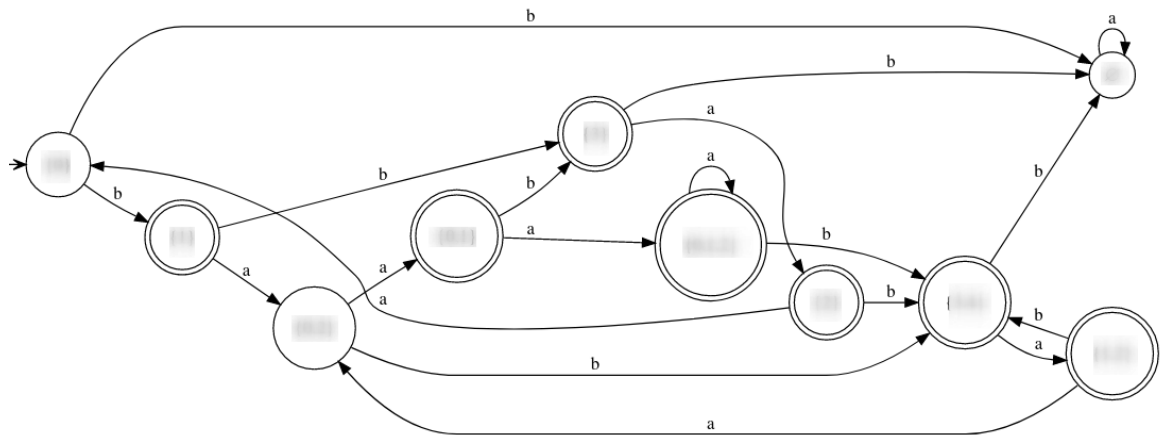


(-iv-)

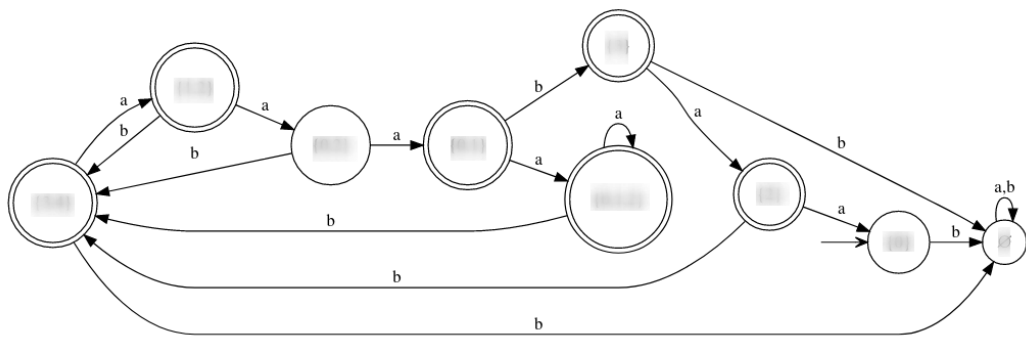
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



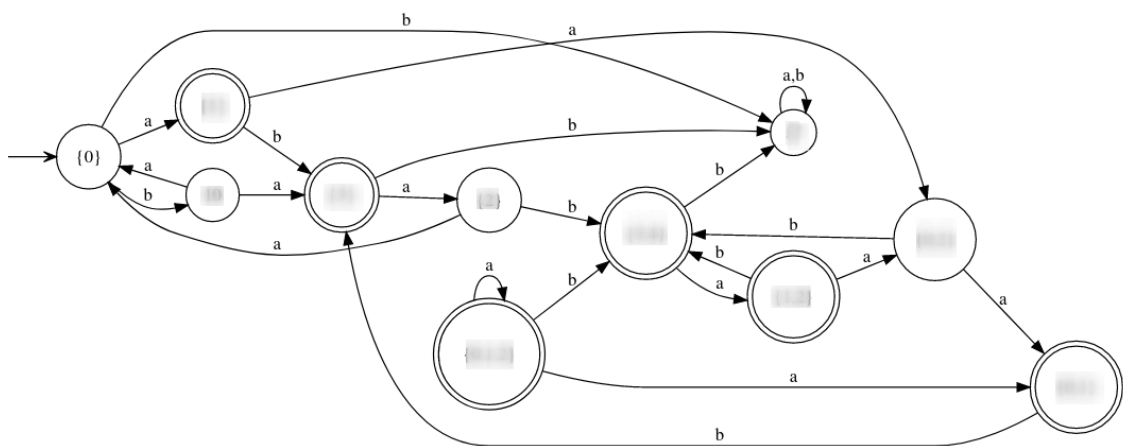
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

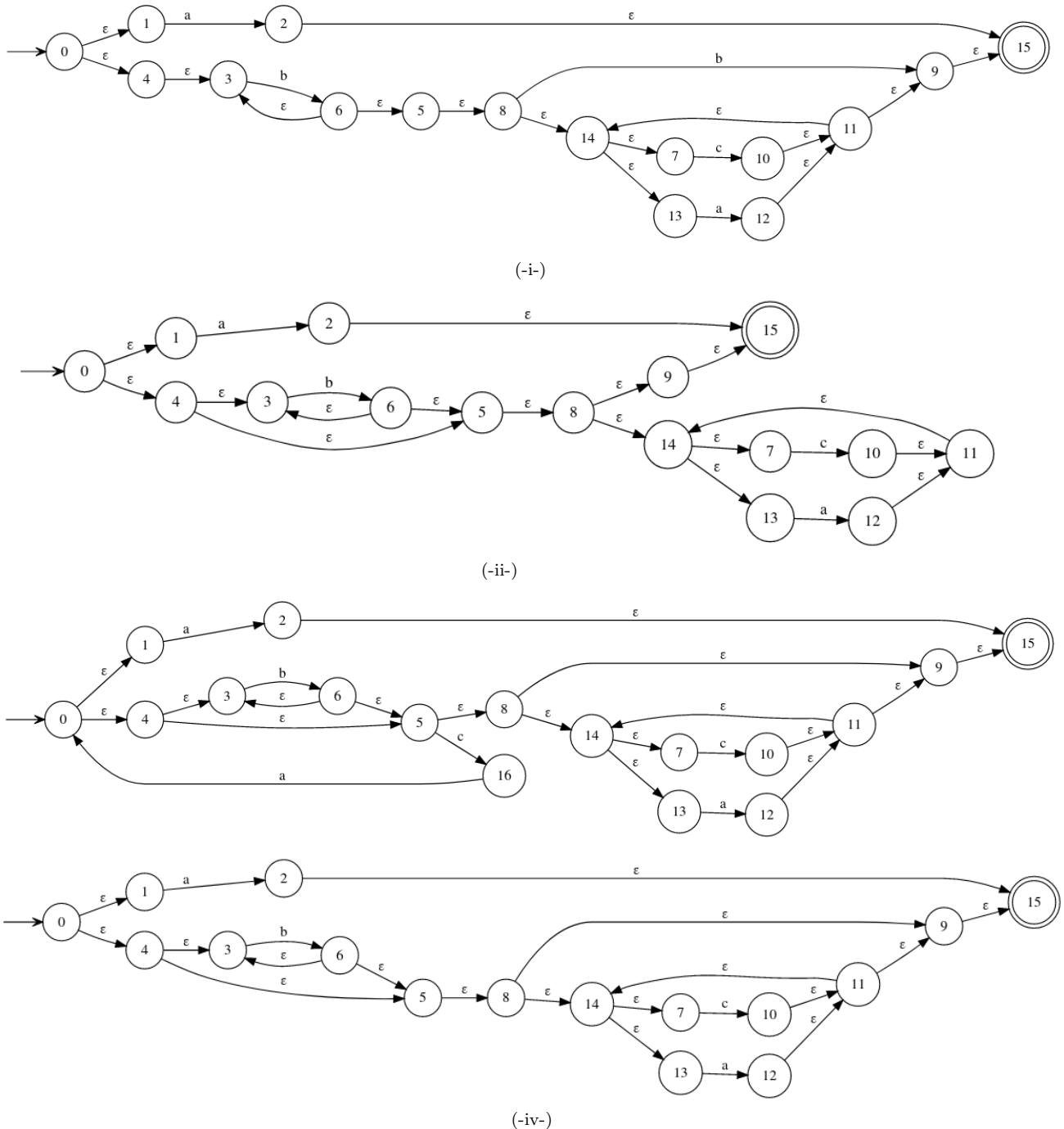
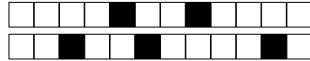


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f g   j k

Question 3 :  b c   f g  i j

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c d 

Question 6 :     f g   j  l m n

Question 7 : a  c  e f g h i

Question 8 : a   d e

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a  c d e f  h  j  l m

Question 12 :  b c d e f g h

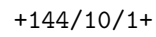
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. A single solid line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot peut être vide.	☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a au moins un état non accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ g A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d A possède un état puits
☐ e A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

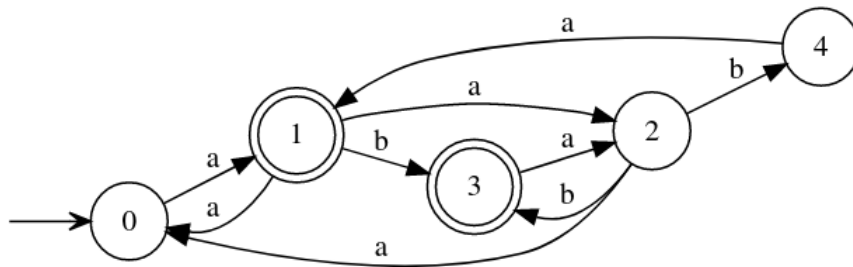
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

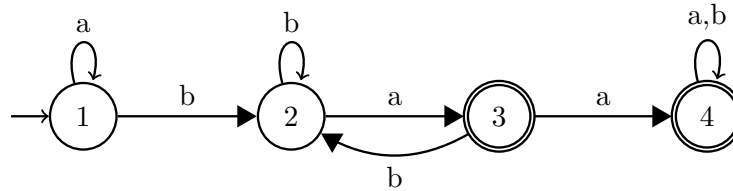
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

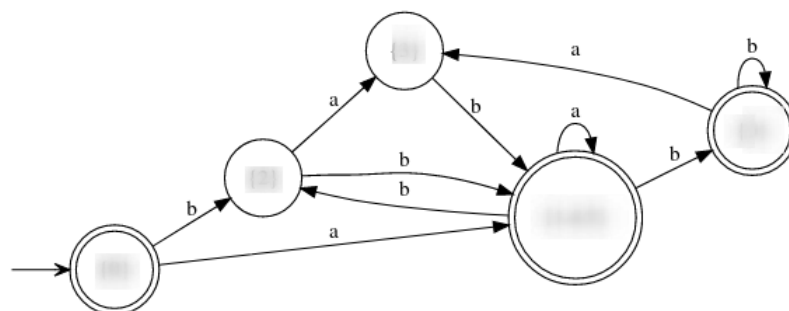
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 6 ☐ e 5 ☒ f 4 ☐ g 1

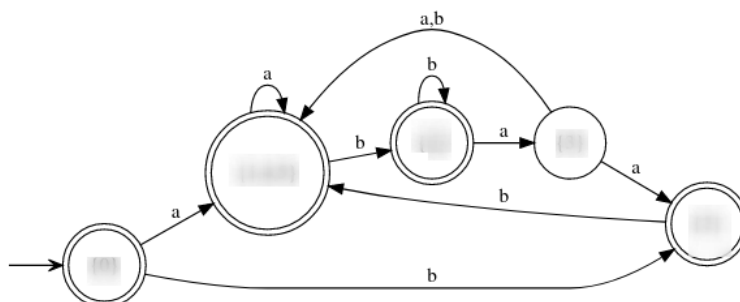
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

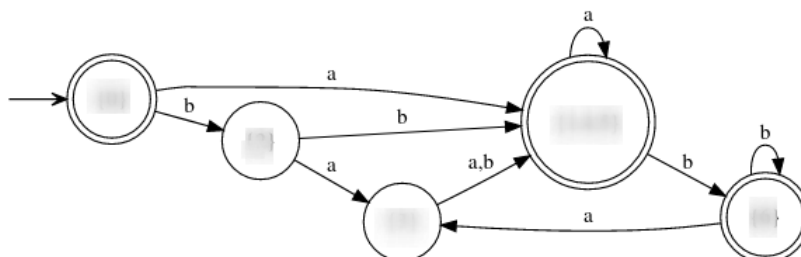
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



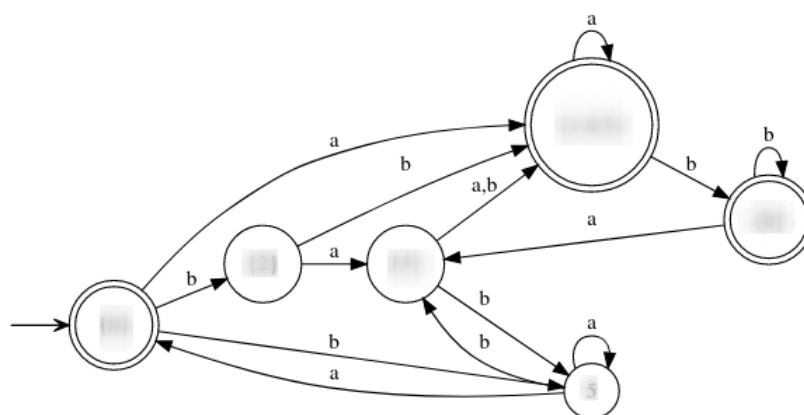
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



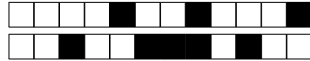
(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ g ☐ h ☐ i ☐ ☐ k ☐ ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 4 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ ☐ e ☐ ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ k

Question 5 : ☐ a ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐

Question 8 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

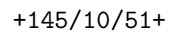
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ ☐ b

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a A a au moins un état accessible.
- ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☒ c $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d A a au moins un état co-accessible.
- ☐ e A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ g u n'est pas accepté par A .
- ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ i A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ c P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A possède un état puits
☐ c A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot est une application.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot peut être vide.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ f Σ est fermé par préfixe.
☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

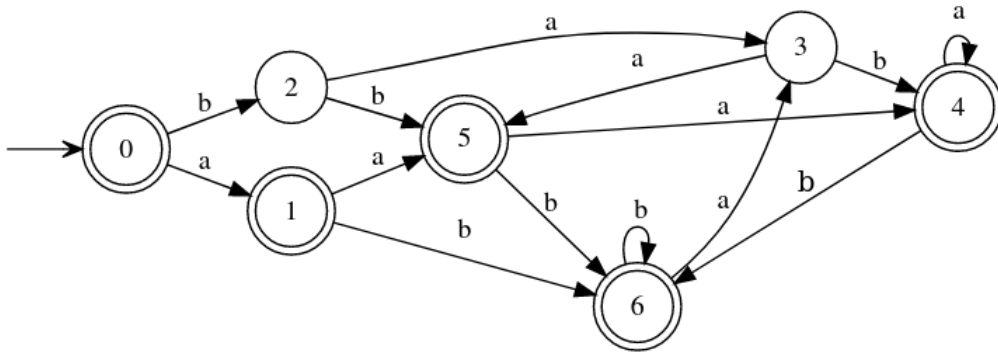
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

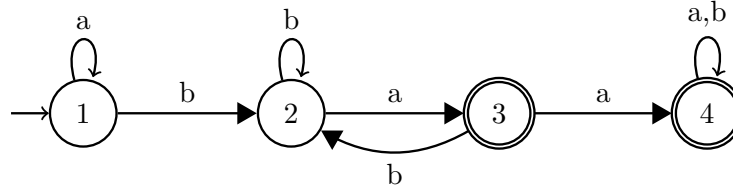
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

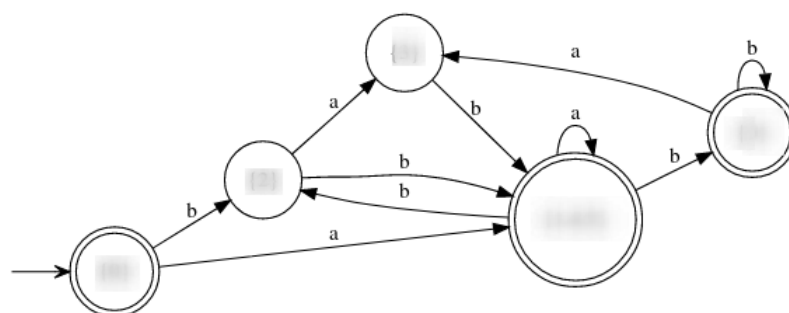
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 3 ☐ e 2 ☐ f 0 ☐ g 6

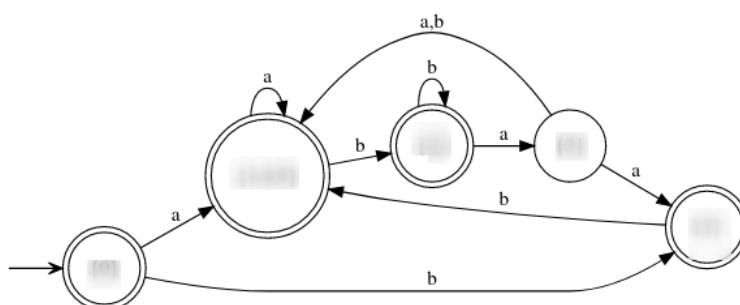
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

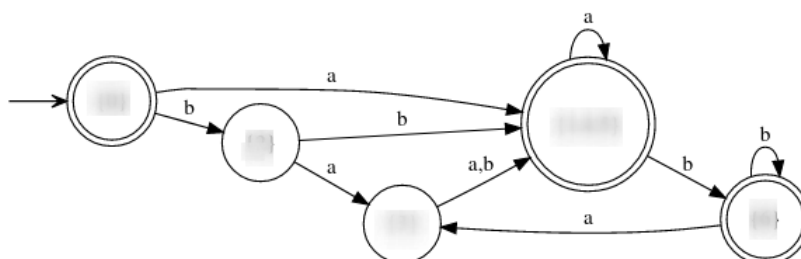
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



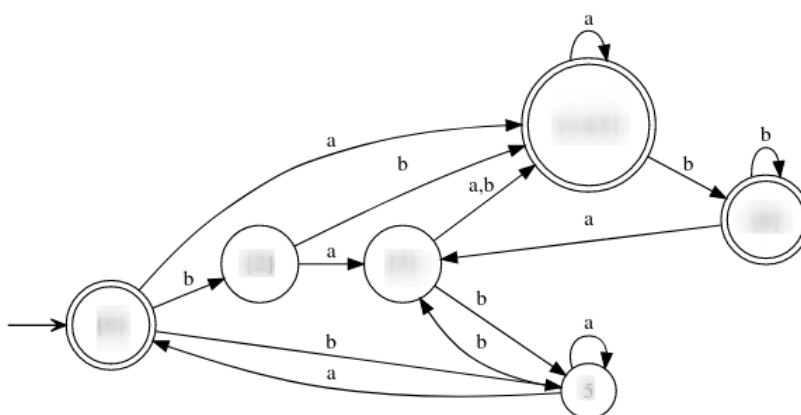
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

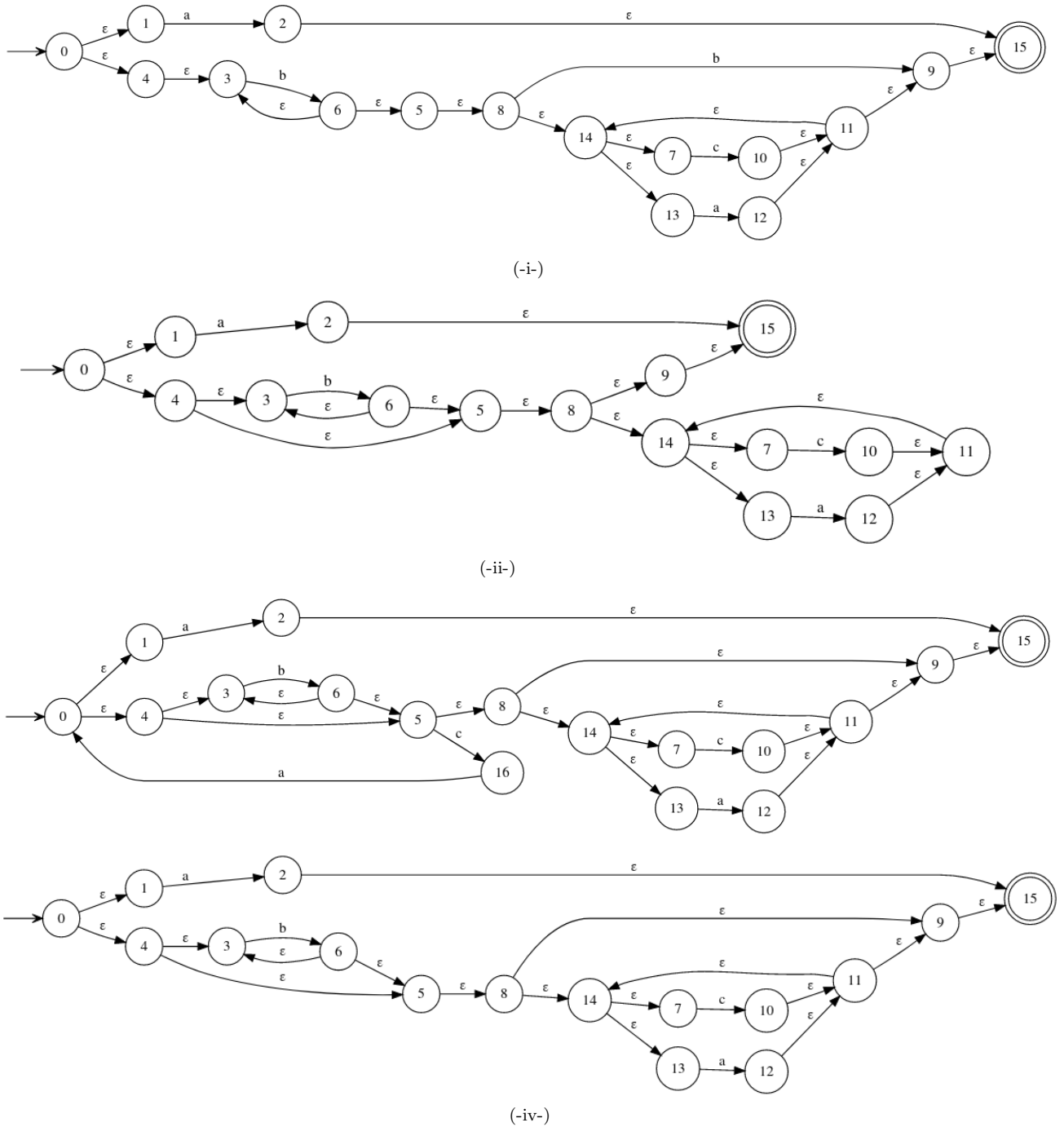
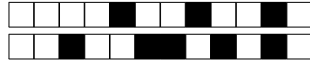


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

	b		d	e			h		j	k

Question 4 :

	b		d	e

Question 5 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

	b				f	g				k		m	n

Question 8 :

a				e	f	g		i	j

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f		h	i			l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

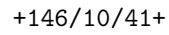
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ b	Un mot peut être infini.
☐	Un mot peut être vide.	☐ d	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot est une application.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ h	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ j	Un mot possède une infinité de préfixe.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a	u est accepté par A .	☐ b	A est complet.	☐ c	A a des états accepteurs.
☐ d	Les états de A sont tous accessibles.	☐ e	$u \in \mathcal{L}(A)$.		
☐ f	Les états de A sont tous co-accessibles.				
☐ g	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.				
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.				

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐	A n'est pas complet.	☐ b	A a au moins un état non accessible.
☐	A a au moins un état accessible.	☐ d	A a au moins un état co-accessible.
☐	$u \notin \mathcal{L}(A)$.	☐ f	A n'a pas d'état accepteur.
☐ g	A a au moins un état non co-accessible.		
☐	u n'est pas accepté par A .		
☐	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .		
☐ j	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.		
☐ k	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.		

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ f A possède un état puits ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

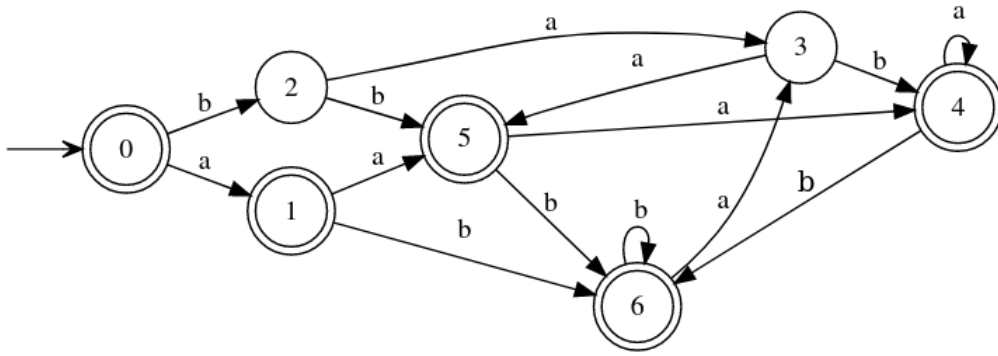
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a+b)^*$
☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

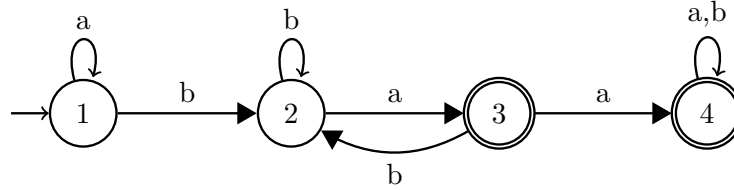
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

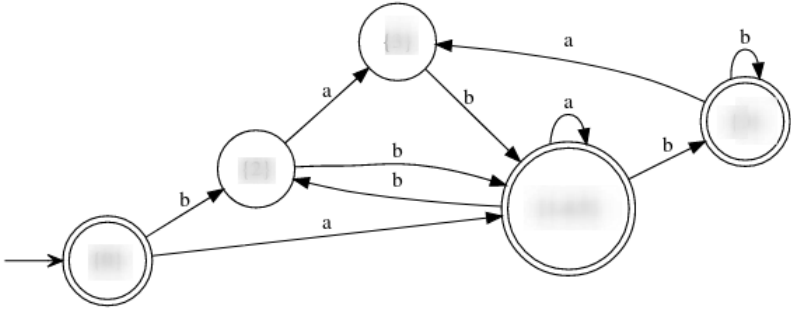
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 1 ☒ d 4 ☐ e 6 ☐ f 0 ☐ g 5

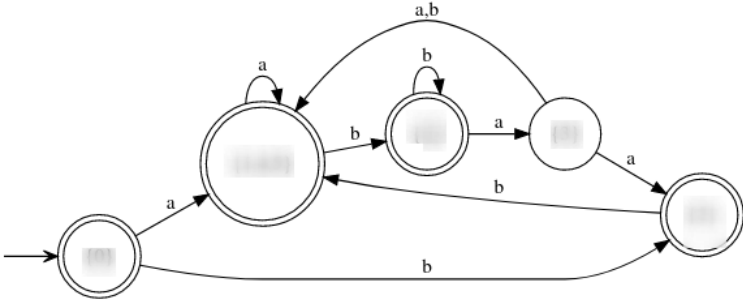
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

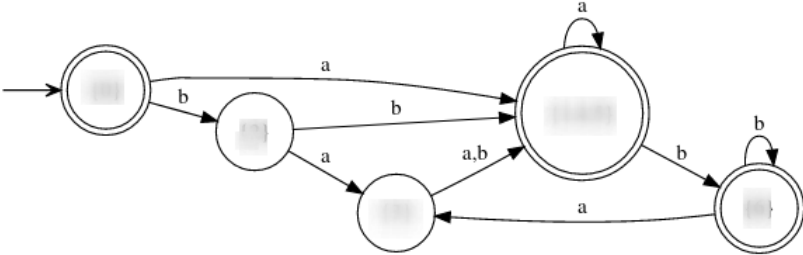
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



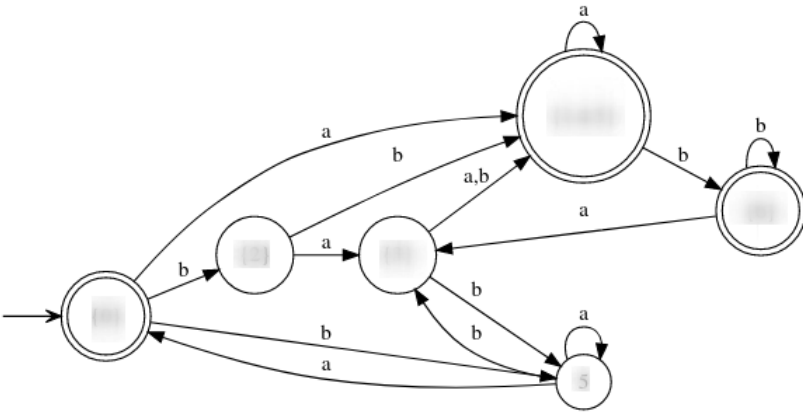
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

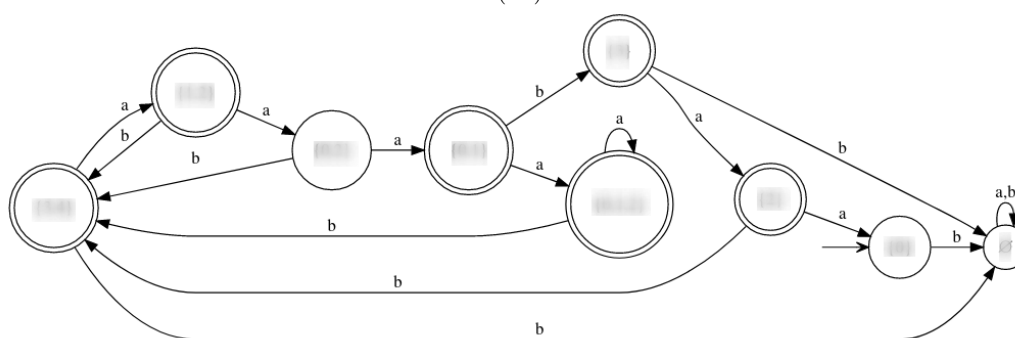
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



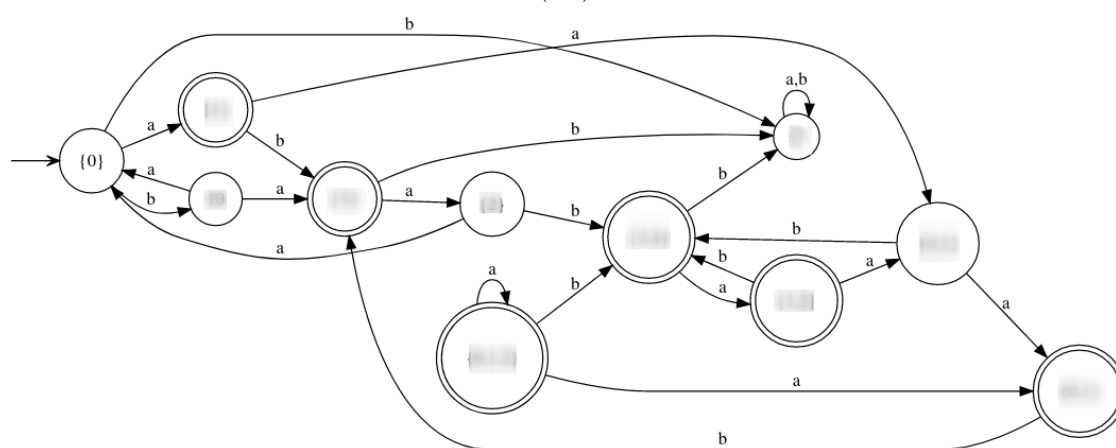
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

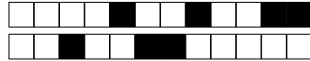


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d    h  j   m n

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :  b  d  f g   j k

Question 5 : a  c d  f g h i

Question 6 : a   d e

Question 7 : a b c d 

Question 8 :  b   e f  h i j

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 :  b  d  f g h i j k  m

Question 12 : a  c d e f g h

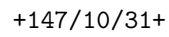
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☐ f A a au moins un état non accessible.
- ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ est fermé par facteur.
- ☐ e Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e A est complet.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

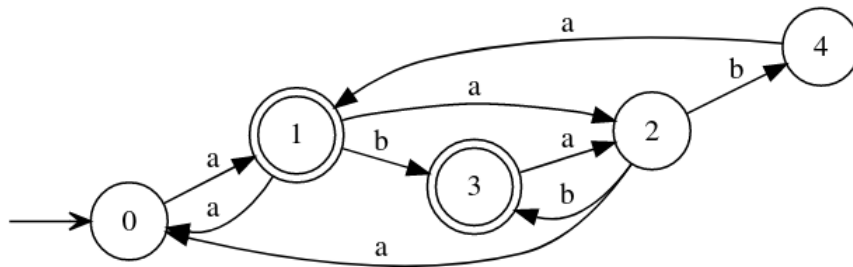
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

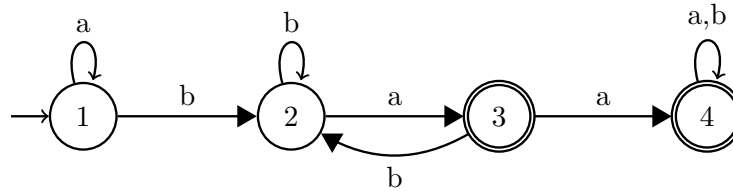
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

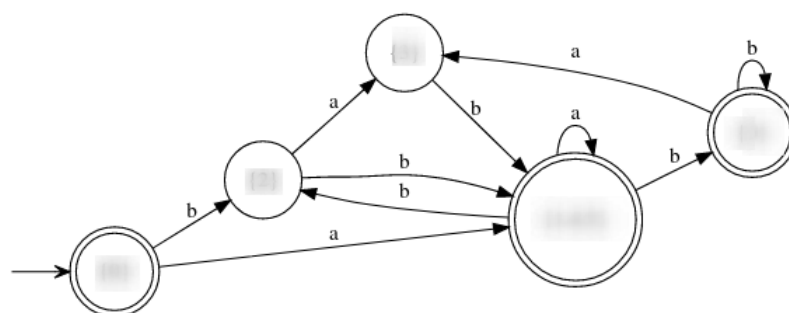
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☐ c 2 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 5

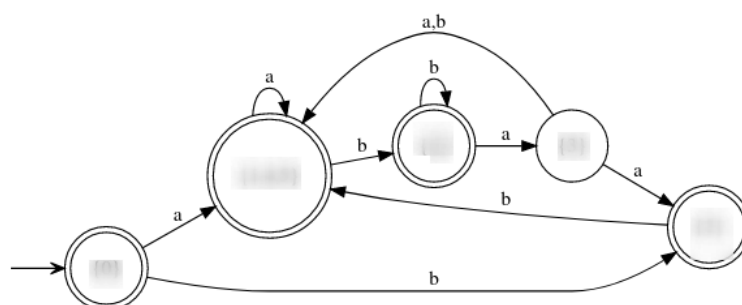
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

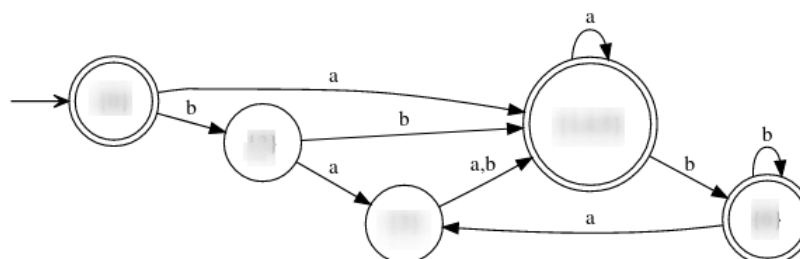
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



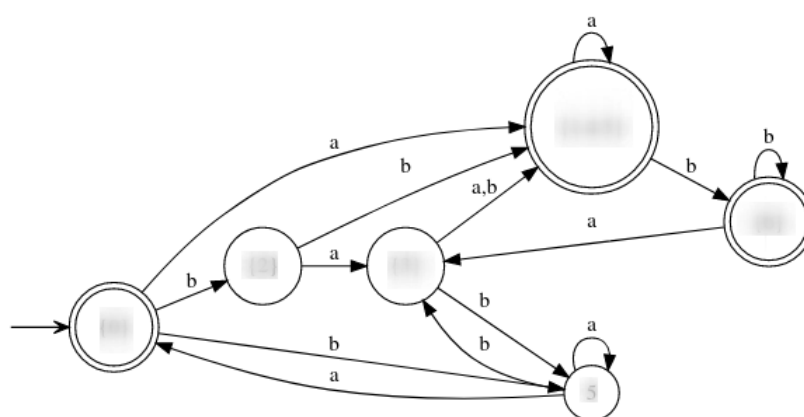
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

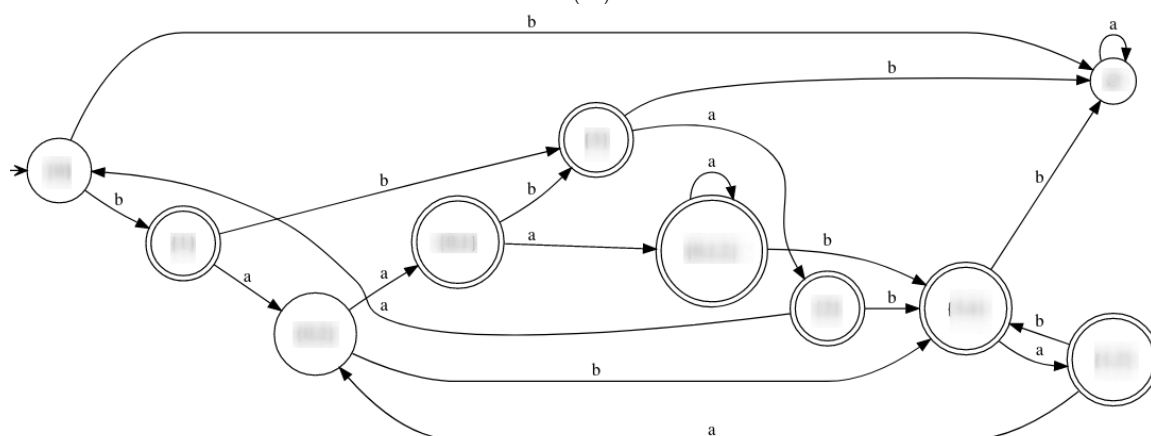


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



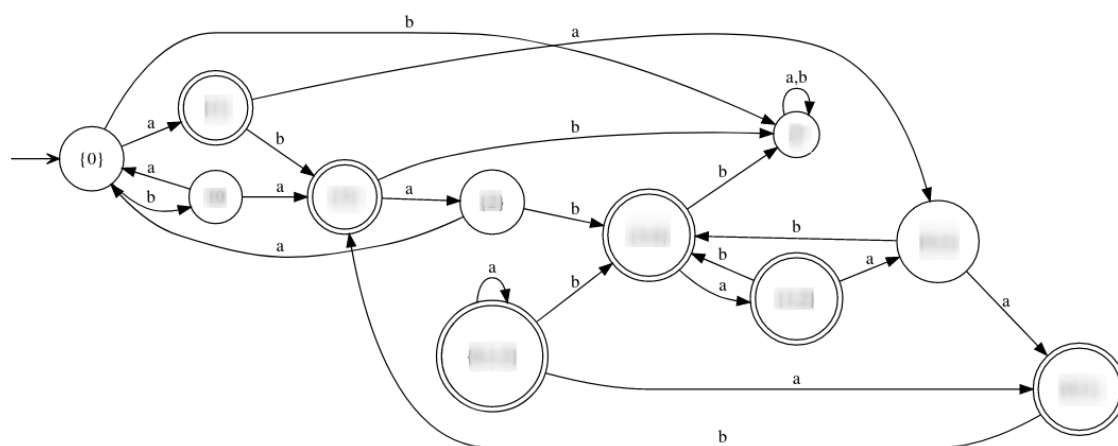
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

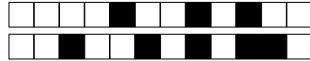


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 4 :

	b						i	j		l	m	n

Question 5 :

a			d	e	f				j	k

Question 6 :

		c	d	e		g		i	j

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c		e	f	g		i	j			m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

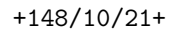
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three lines: two solid outer lines and a dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed in a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A possède un état puits ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A . ☐ A est complet. ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
☒ A a au moins un état accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☒ A n'est pas complet. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ g A a au moins un état non accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Un mot peut être infini.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot est une fonction. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot est une application. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒ c	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

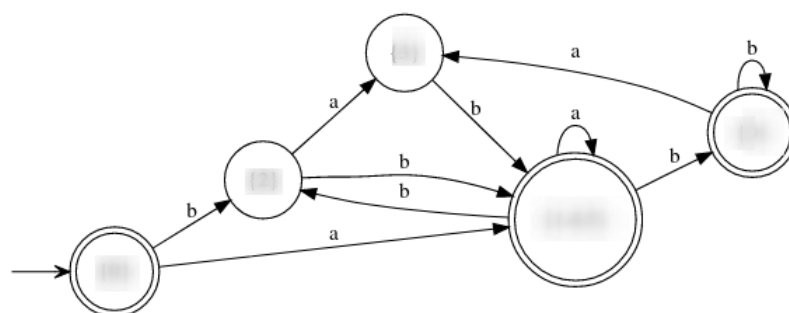
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☒ c 4 ☐ d 6 ☐ e 0 ☐ f 5 ☐ g 2

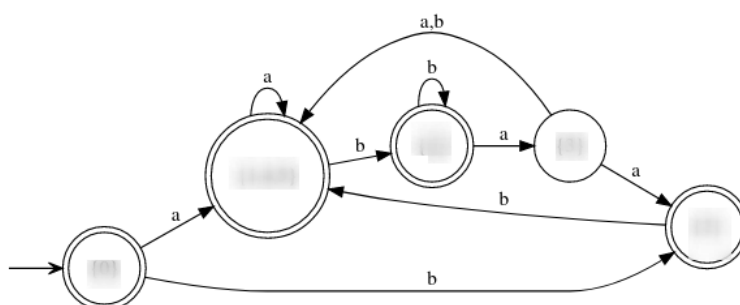
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

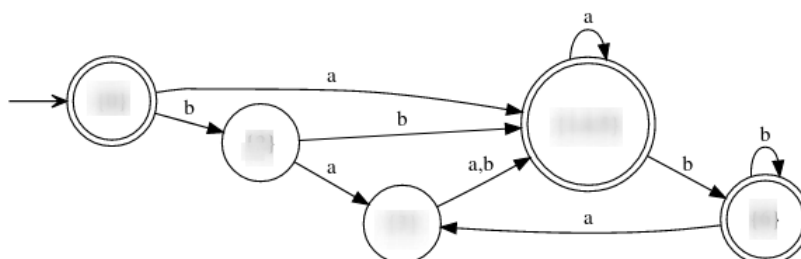
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



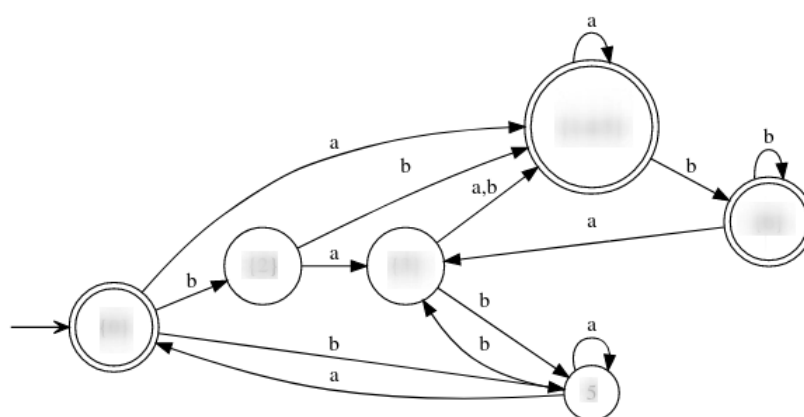
(-i-)



(-ii-)

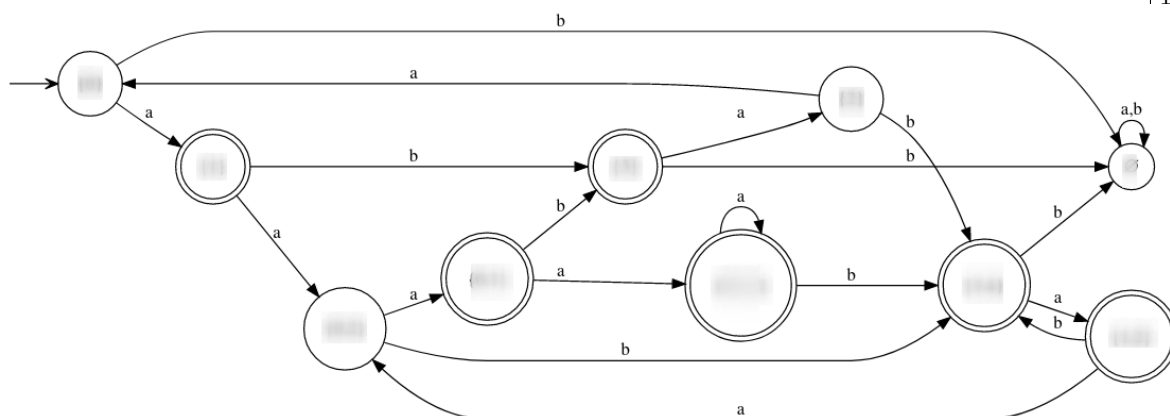


(-iii-)

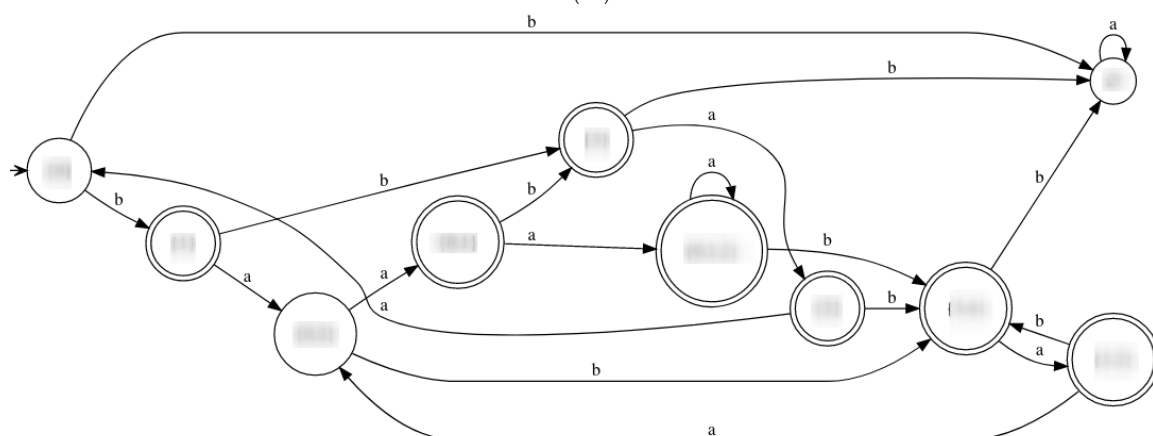


(-iv-)

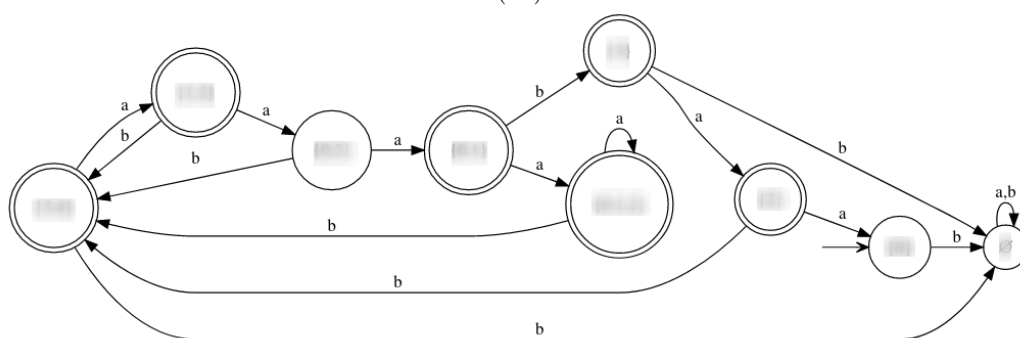
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



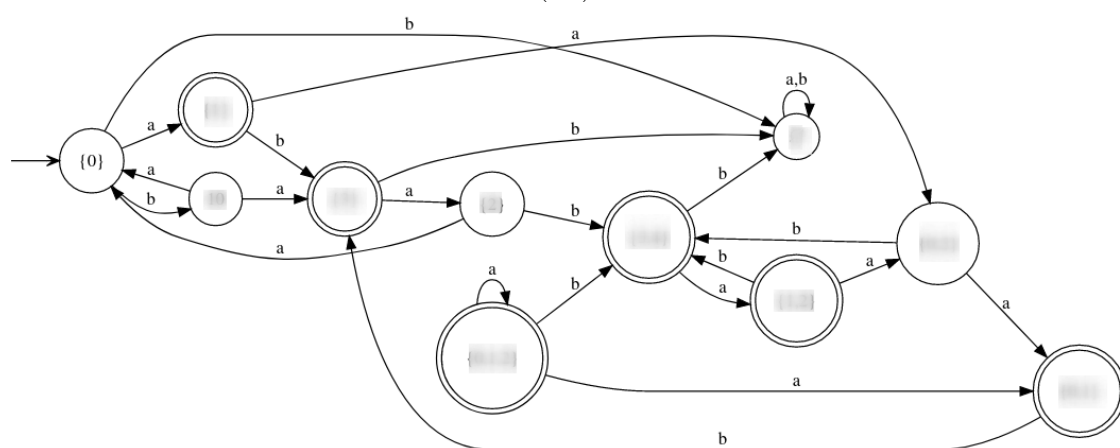
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

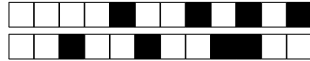


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c   f g  i j

Question 3 : a  c d  f g h i

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :   c d e

Question 7 : a b  d   g   j k

Question 8 :  b   f  h   k  m n

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b  d e  g  i j k l 

Question 12 : a b  d e f g h

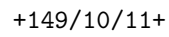
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A possède un état puits
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ i Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ j Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
 ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
 ☐ c A est complet.
- ☐ d u est accepté par A .
 ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-
 ☐ la Figure 3-iii-
 ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-
 ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-
 ☐ b la Figure 4-iv-
 ☐ la Figure 4-i-
 ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

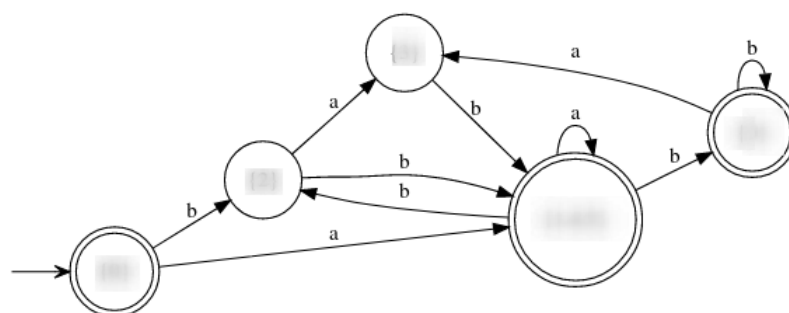
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 0 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 2 ☐ g 5

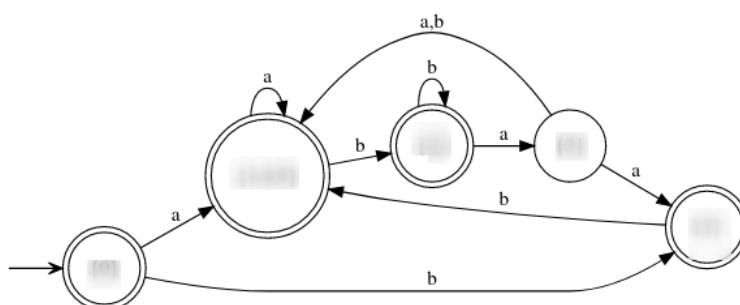
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

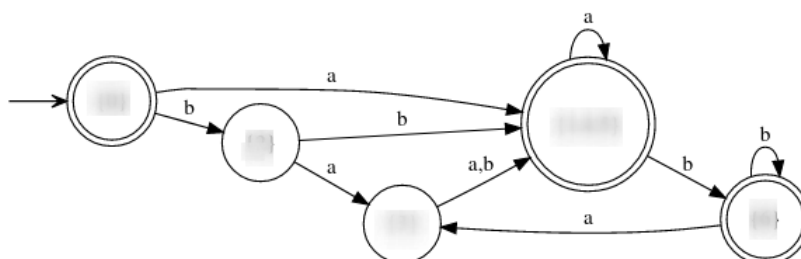
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



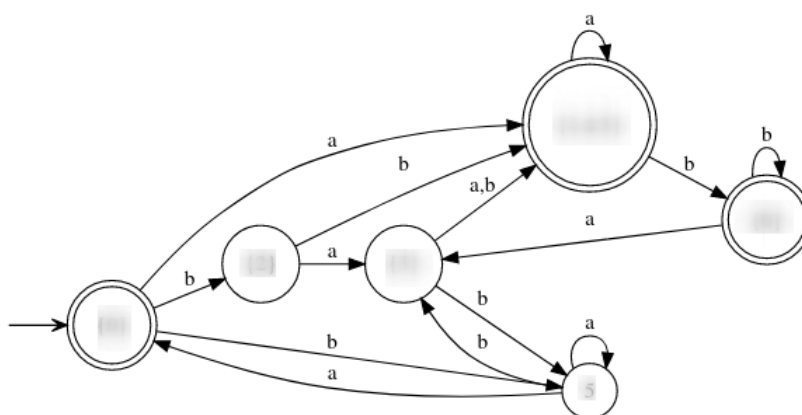
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

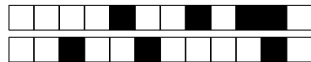


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c  e f g h i

Question 3 :  b   e f   i j k

Question 4 :   c d  f g  i j

Question 5 :      g h i j   m n

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :  b  d e

Question 8 : a b c d 

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a  c d e f g h   k  m

Question 12 : a b  d e f g h

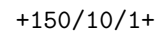
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire sheet is framed by a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d A accepte le langage universel.
☒ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f A possède un état puits ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ b P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ b Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ c Un mot est une application. ☒ d Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ f Un mot peut être infini.
☒ g Un mot est une fonction. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ i Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ j Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ k Un mot peut être vide. ☒ l Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ A est complet.
☐ A a des états accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

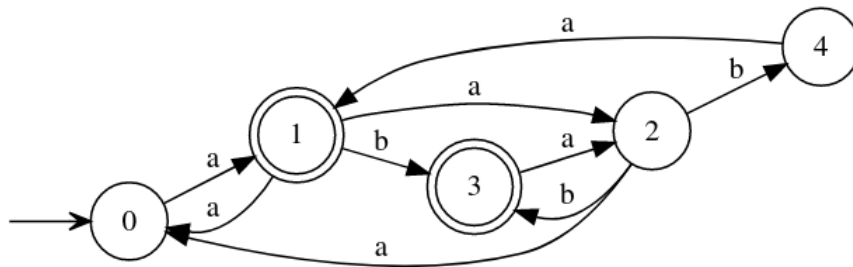
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

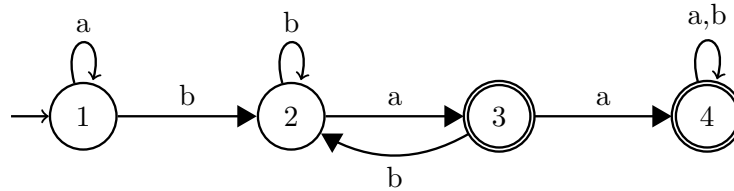
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

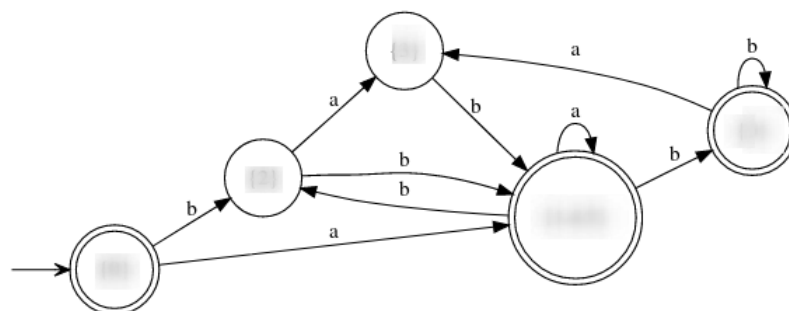
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 5 ☐ c 0 ☐ d 1 ☐ e 6 ☐ f 2 ☒ 4

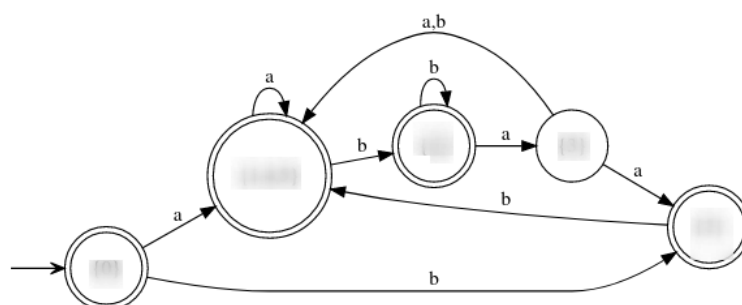
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

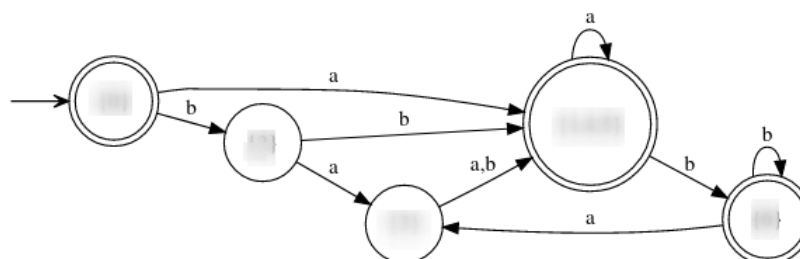
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



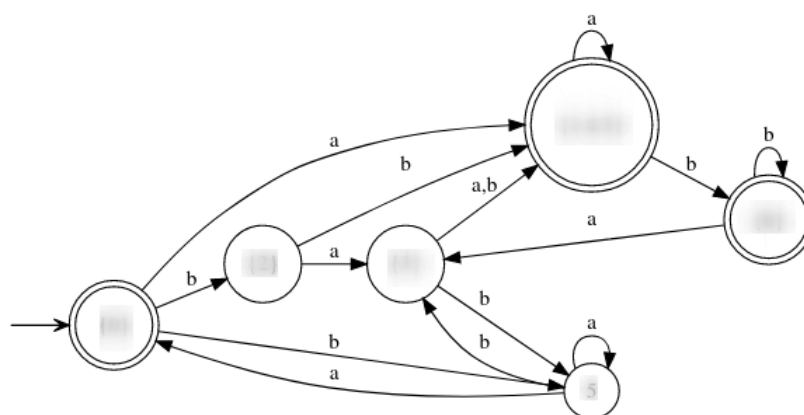
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

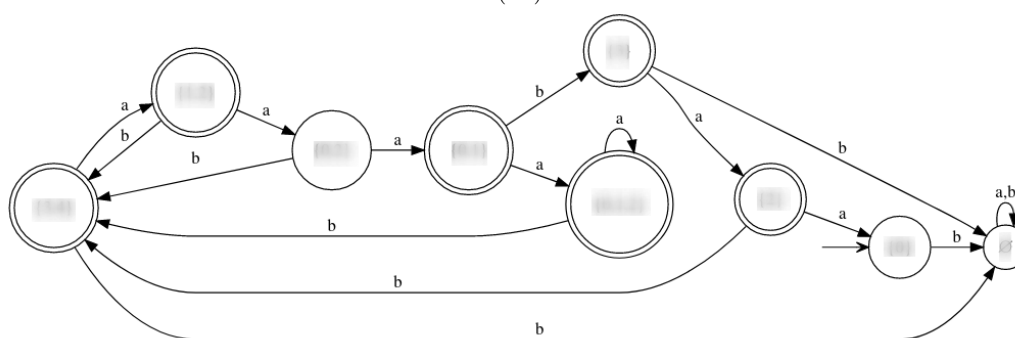
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



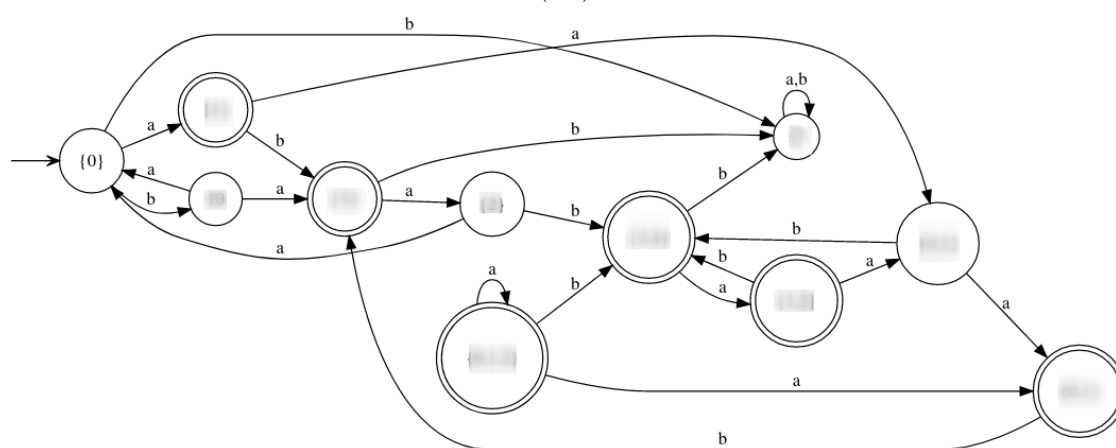
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

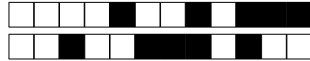


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

a				e	f		h					m	n

Question 5 :

			d	e	f		h		j	k

Question 6 :

	b	c		e		g		i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

	b		d	e			h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

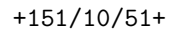
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ e u est accepté par A . ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par facteur.
☒ c Σ^* est fermé par suffixe. ☒ d Σ^* est fermé par facteur.
☒ e Σ^* est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☒ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut être vide. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ c Un mot est une fonction. ☒ d Un mot est une application.
☒ e Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot peut être infini. ☒ j Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ l Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d A possède un état puits ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☒ A n'est pas complet.
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ u n'est pas accepté par A . ☐ h A a au moins un état co-accessible.
- ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

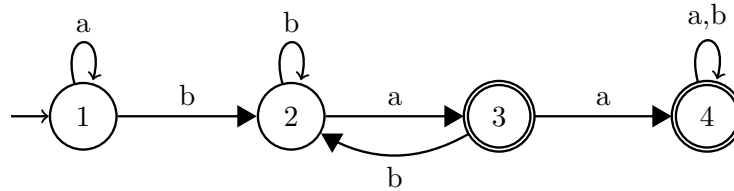
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

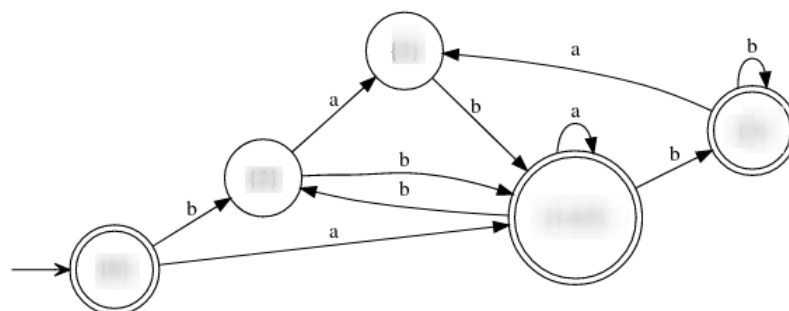
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 3 ☒ 4 ☐ g 0

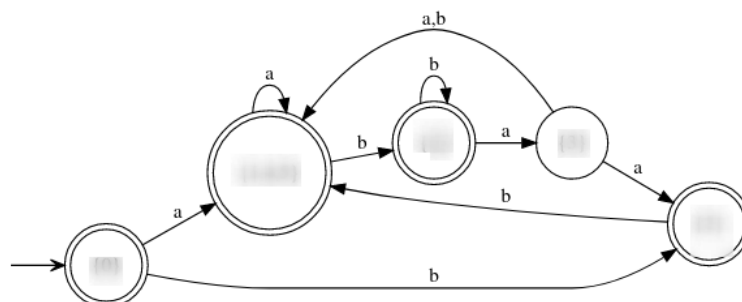
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

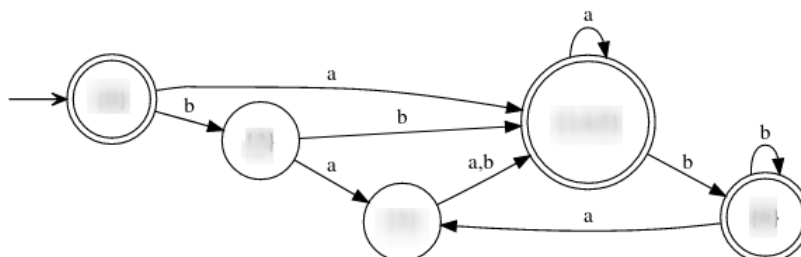
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



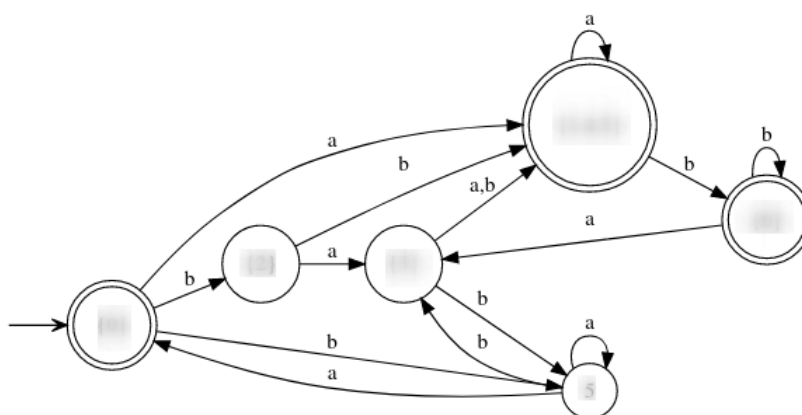
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

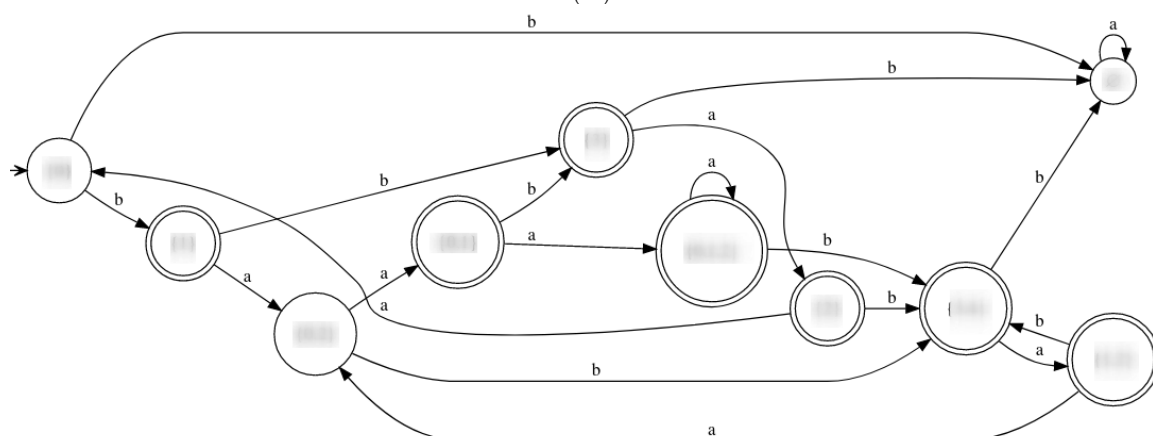


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

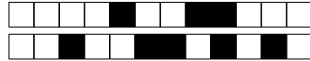


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b				f	g		i	j

Question 4 :

	b						h	i		k		m	n

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

		c	d	e

Question 7 :

	b		d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a		c					h	i	j	k

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b		d	e	f	g		i		k	l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

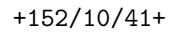
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three lines: two solid outer lines and a dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed in a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e u est accepté par A .
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une fonction. ☐ b Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ c Un mot peut être infini. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot est une application. ☐ f Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ g Un mot peut être vide. ☐ h Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ i Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☒ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A possède un état puits
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ A a au moins un état accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☒ A n'est pas complet. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

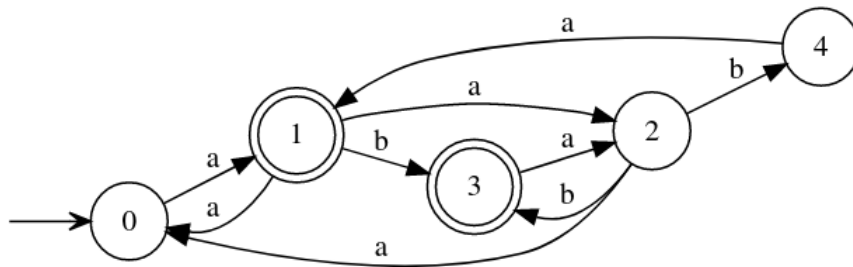
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

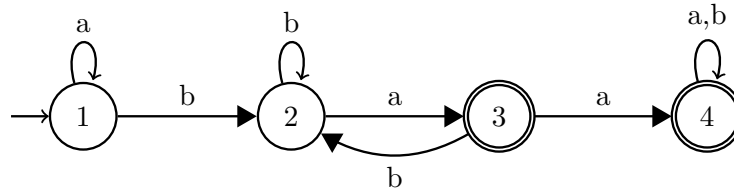
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

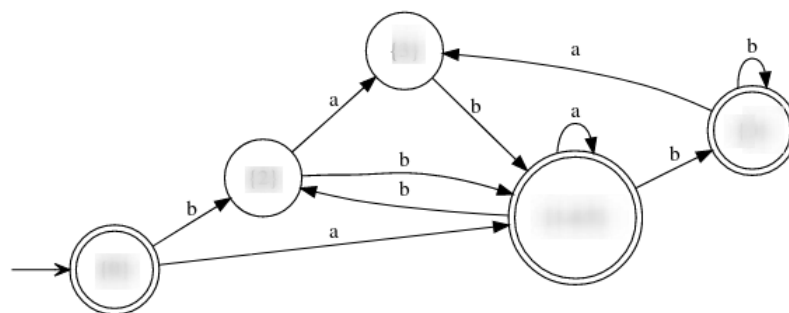
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 2 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 3

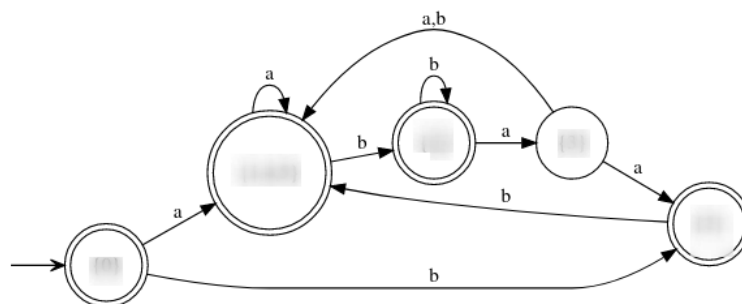
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

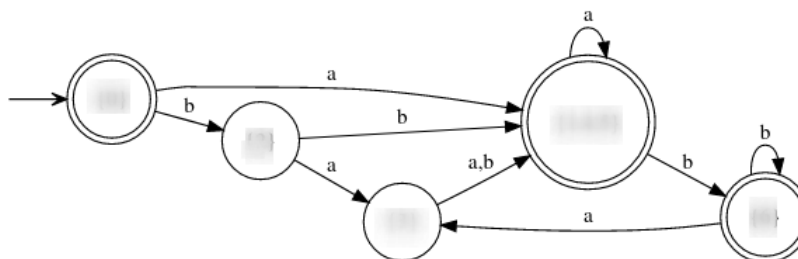
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



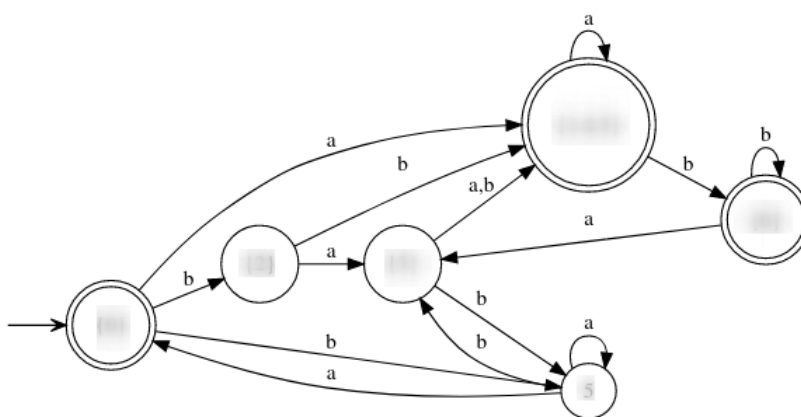
(-i-)



(-ii-)

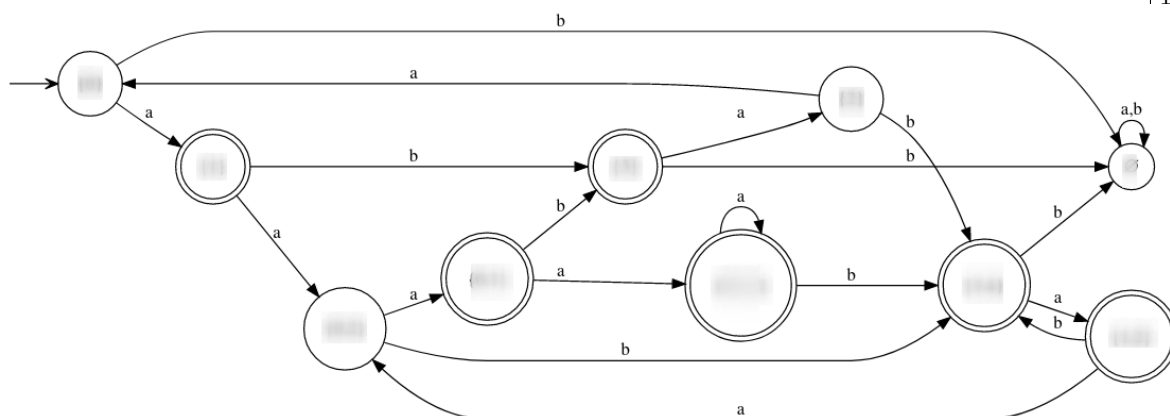


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

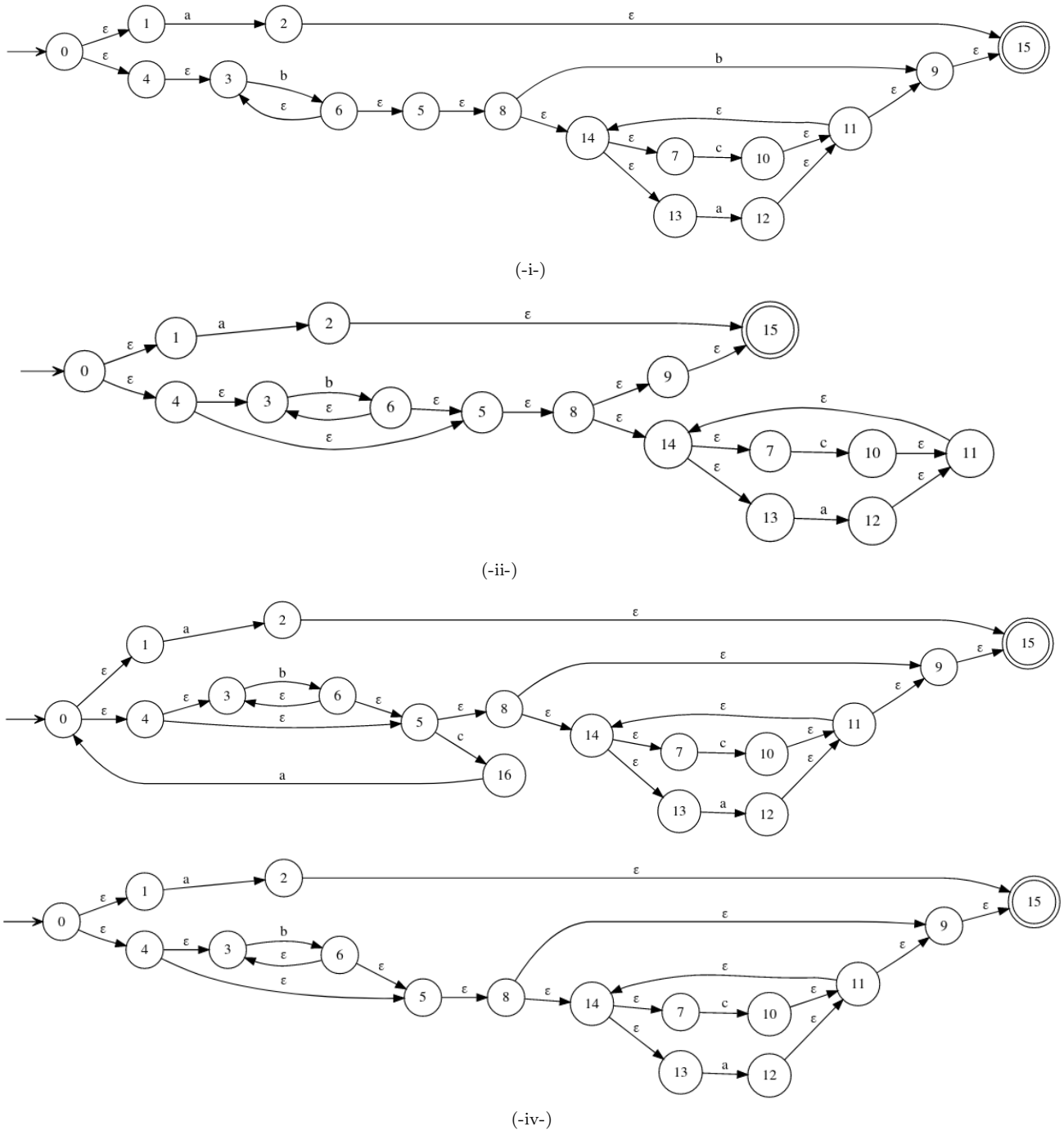
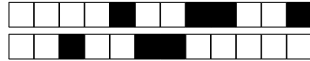


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d		f		h	i	j

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

		c	d					j		l	m	n

Question 5 :

	b		d	e

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

		c	d	e	f	g	h	i

Question 8 :

	b		d	e		g			j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b		d	e	f		h	i			l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

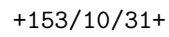
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☒ A n'est pas complet. ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☐ f A a au moins un état co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b u est accepté par A . ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d A est complet. ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c A accepte le langage universel. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ e Tous les états de A sont accepteurs. ☐ f A possède un état puits
- ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot est une application.
- ☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot peut être vide.
- ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
				☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

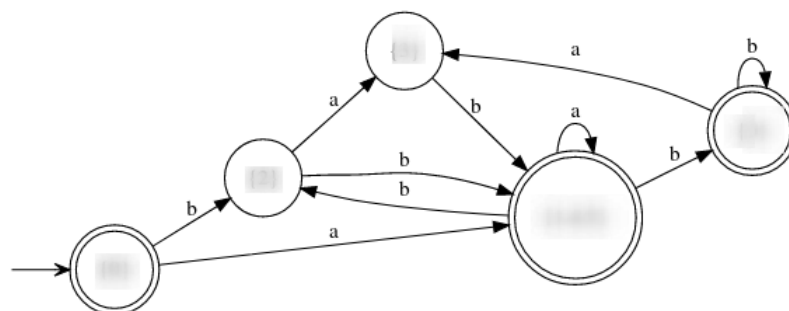
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☐ c 1 ☐ d 5 ☐ e 0 ☐ f 2 ☒ 4

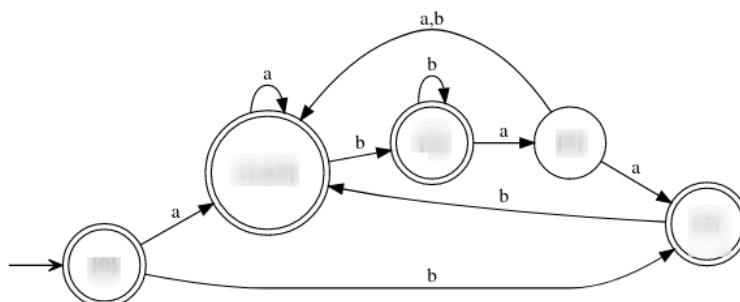
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

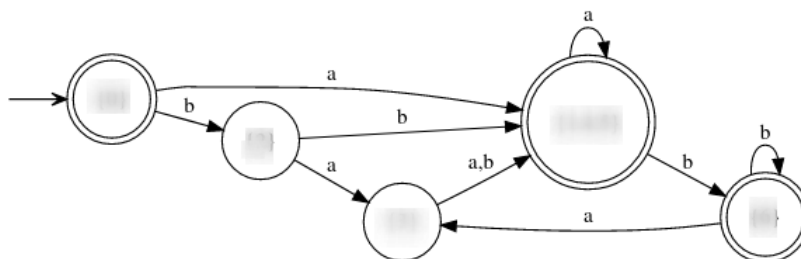
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



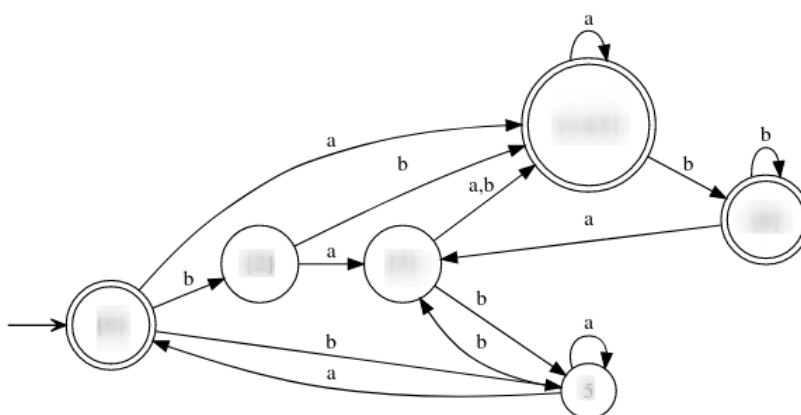
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

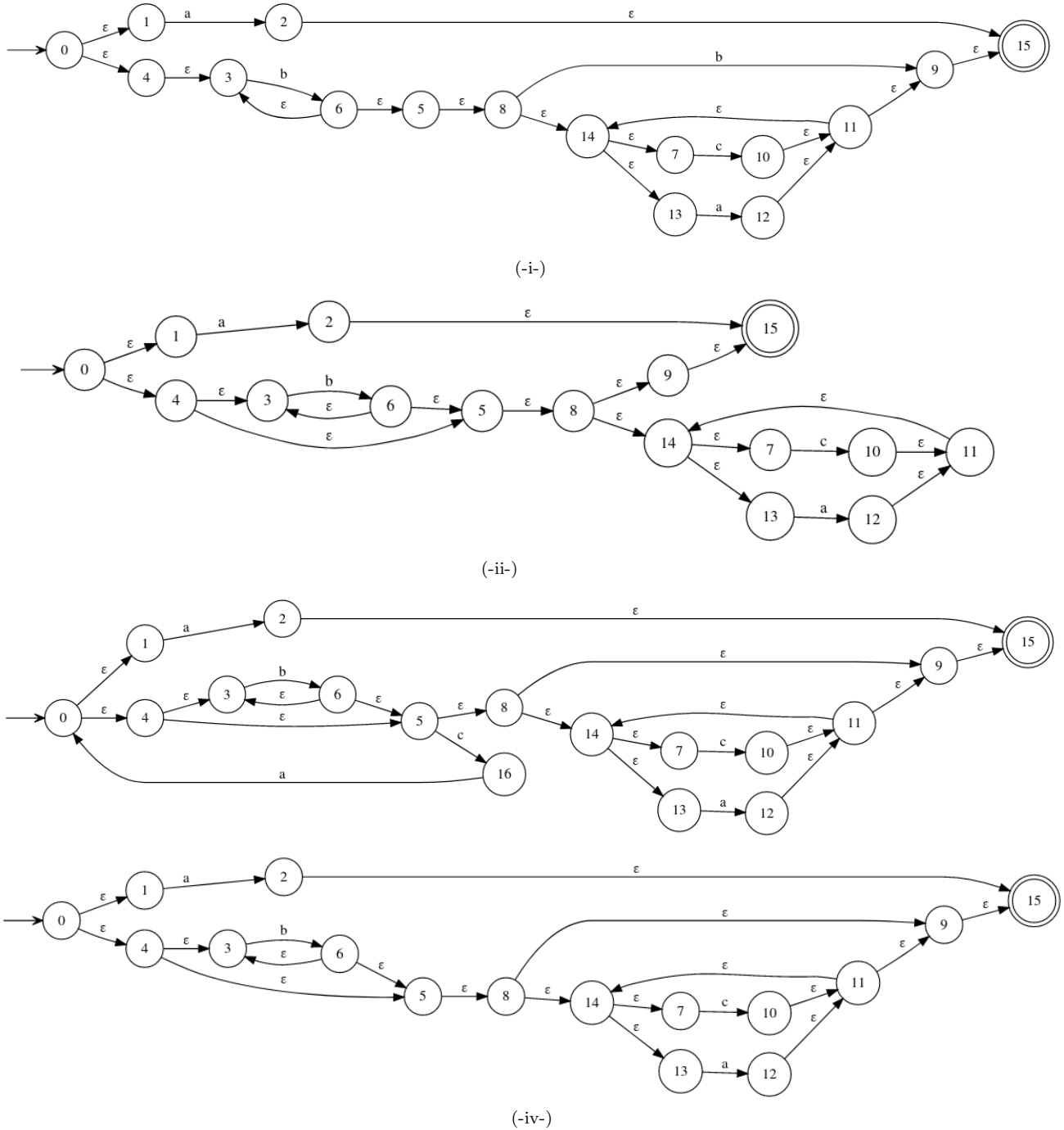
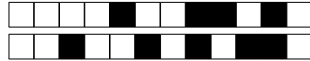


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a		c			f		h		j	k

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

a			d	e			h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

		c	d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b						h	i				m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b			e	f	g			j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

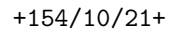
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ e A possède un état puits ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ g Σ est fermé par facteur.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐	☐	☐	☐	☐	☐
☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐	$X_4 = a + b$	☐	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)X_4$
☐	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐	$X_4 = a + b$
☐	$X_4 = a^* + b^*$	☐	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐	$X_1 = a^+bX_2$	☐	$X_1 = a^*b$	☐	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐	$X_3 = a(a + b)^*$
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

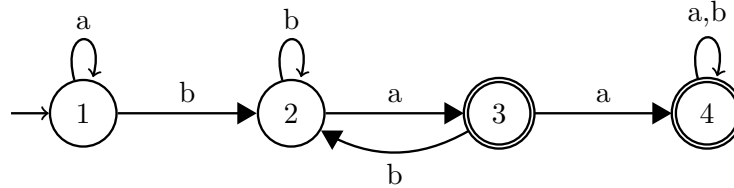
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
		☐	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

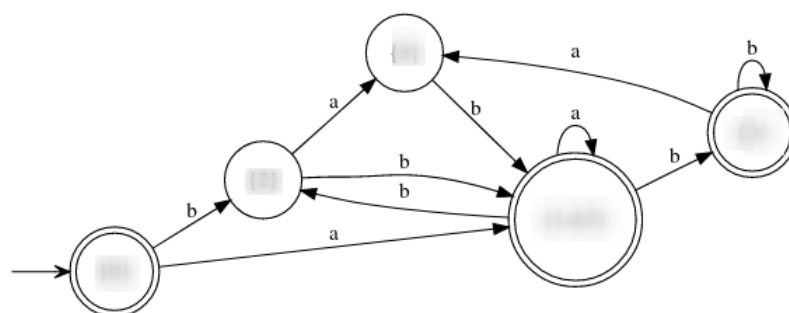
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 0 ☐ e 6 ☐ f 5 ☐ g 1

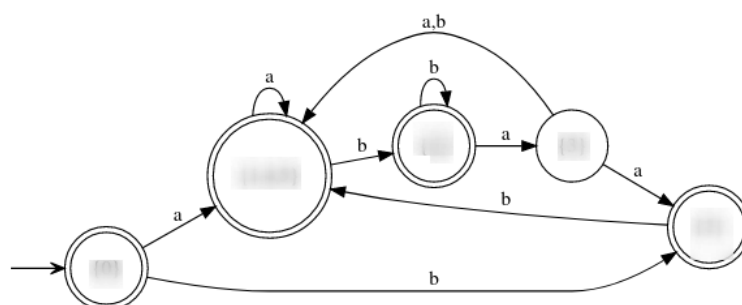
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

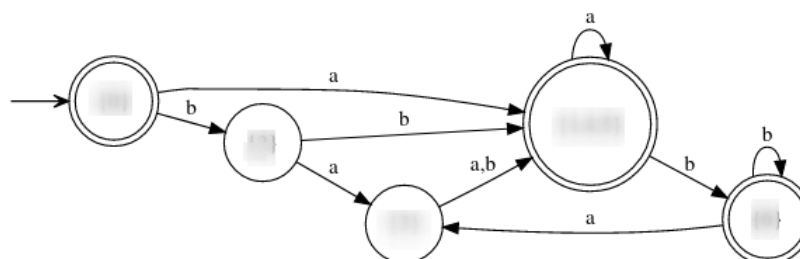
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



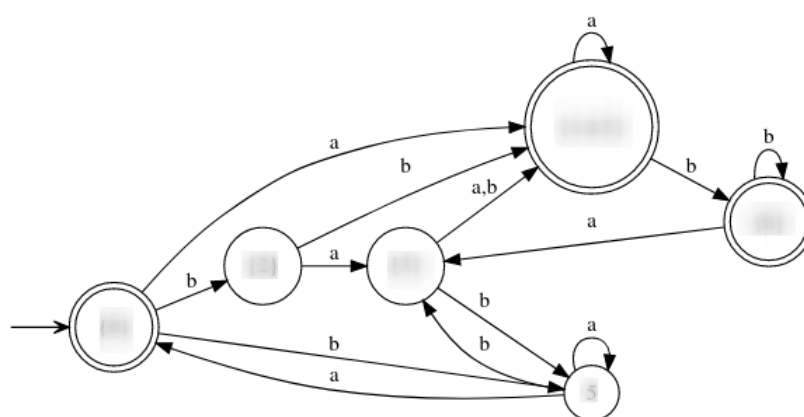
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

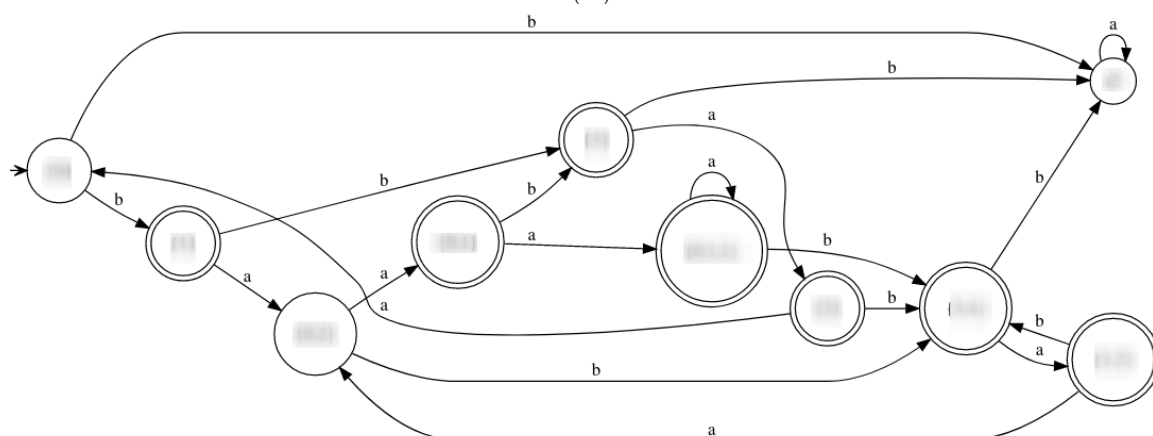


(-iv-)

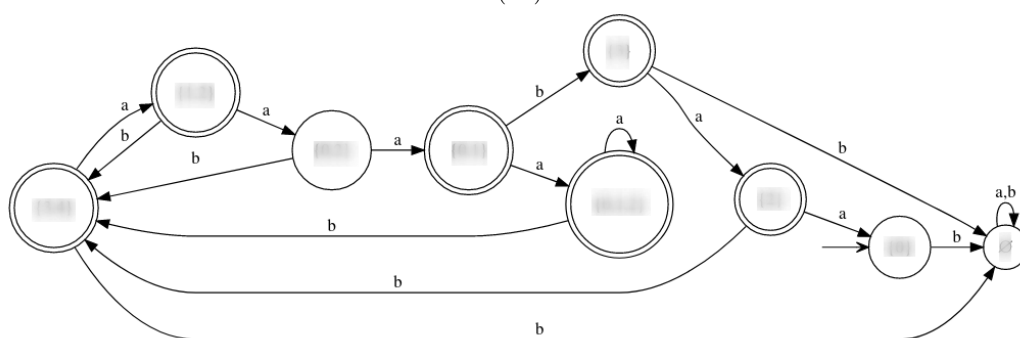
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



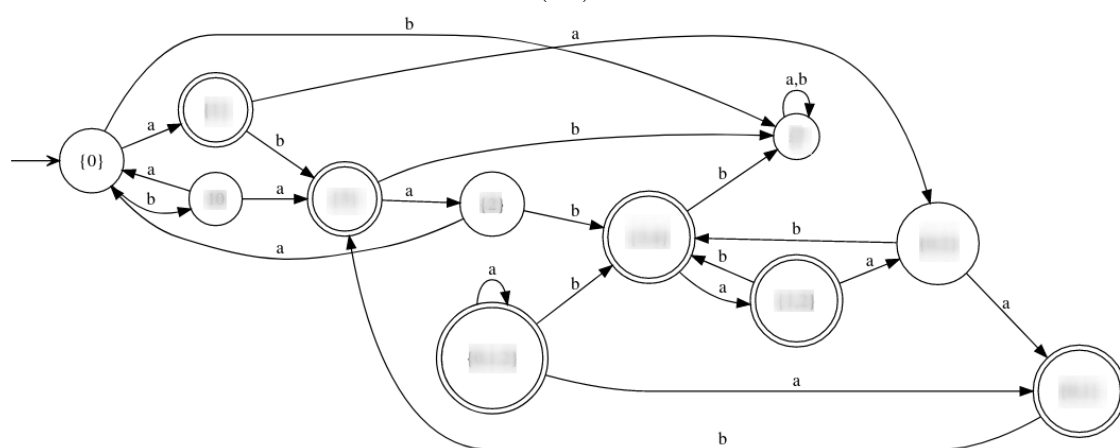
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

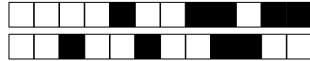


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ c ☐ e ☐ h ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ b ☐ f ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k

Question 4 : ☐ b ☐ d ☐ e

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 6 : ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 7 : ☐ a ☐ d ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 9 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ b ☐ c ☐ e ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

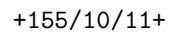
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☒ A n'est pas complet. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ g A a au moins un état non co-accessible.
☒ A a au moins un état accessible. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ A est complet.
☐ A a des états accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

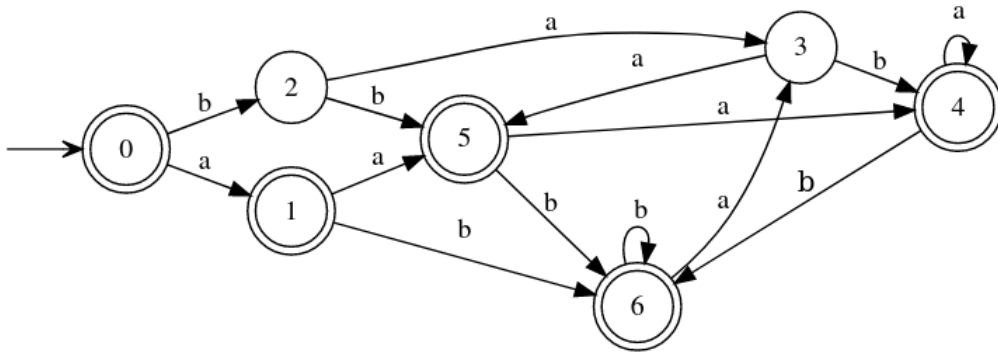
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

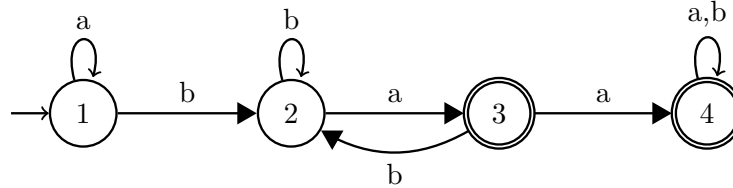
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

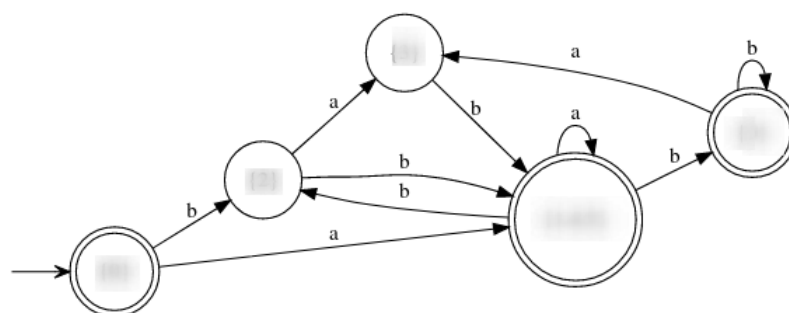
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 6 ☐ e 5 ☐ f 1 ☐ g 3

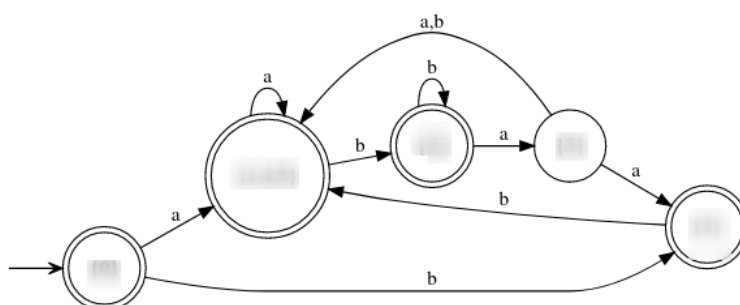
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

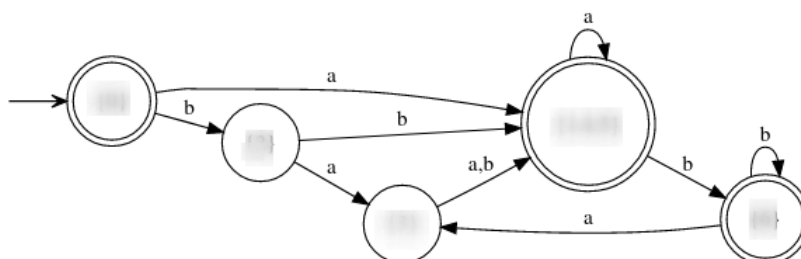
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



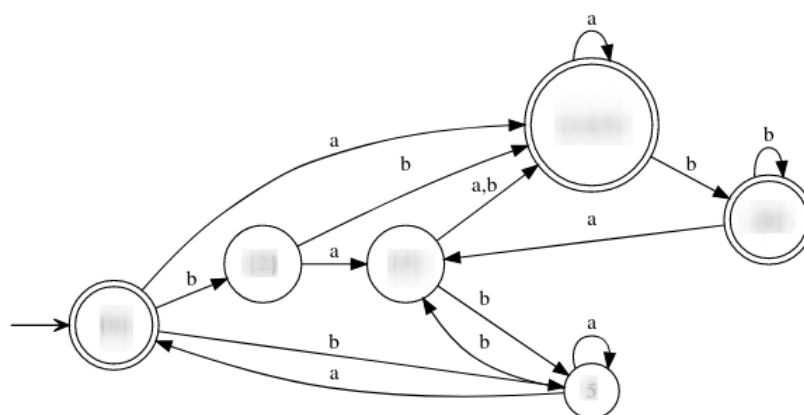
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

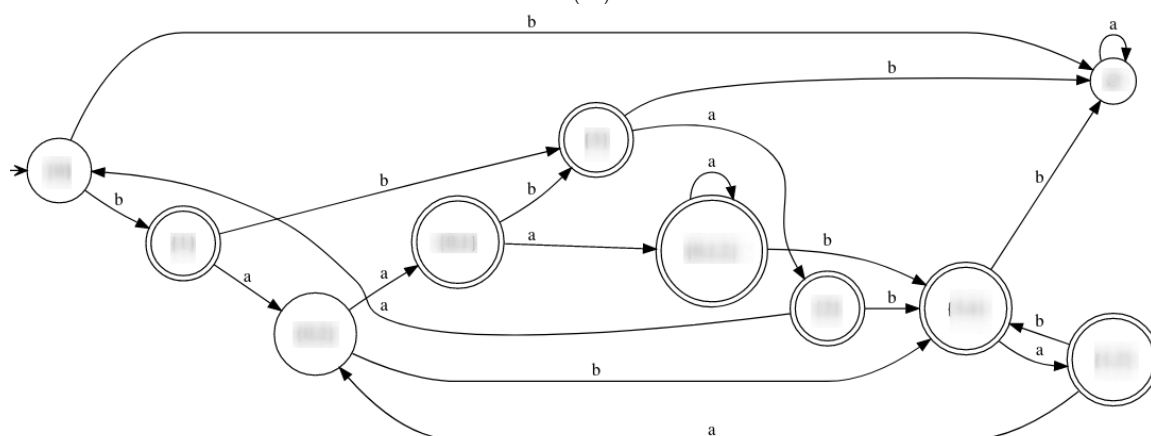


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

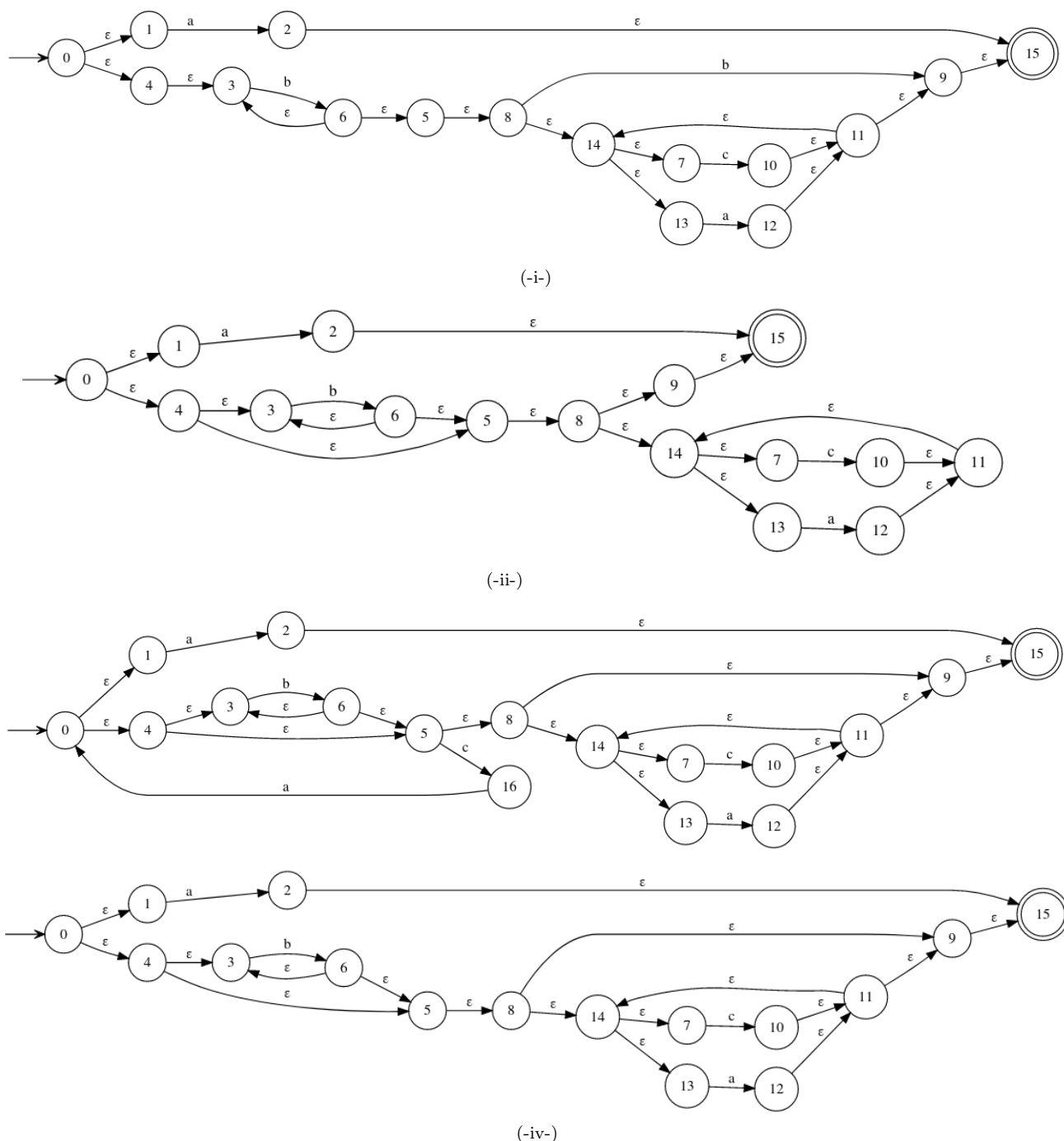
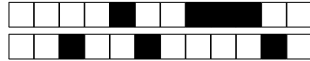


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 3 :

	b		d	e

Question 4 :

a	b					g		i	j	k

Question 5 :

		c	d	e	f			i	j

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

				e	f		h			k		m	n

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b			e	f	g	h	i		k	l	

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

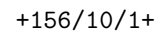
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A a des états accepteurs.
☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A accepte le langage universel. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ f A possède un état puits ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-.
- ☐ b la Figure 3-iv-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-.
- ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-.
- ☐ b la Figure 4-ii-.
- ☐ la Figure 4-i-.
- ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

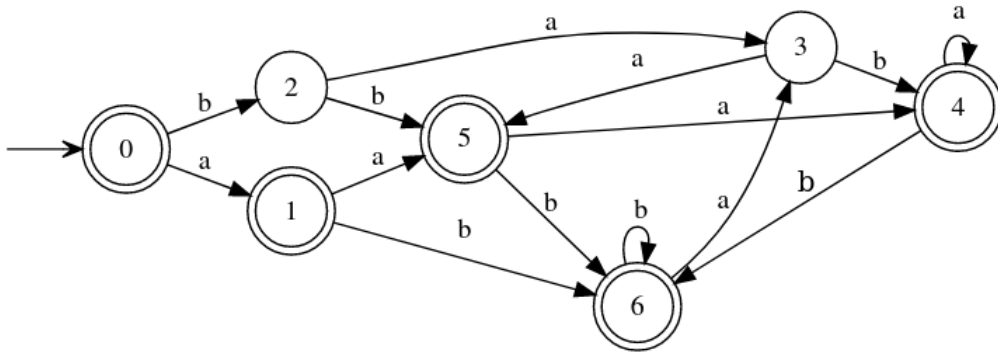
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

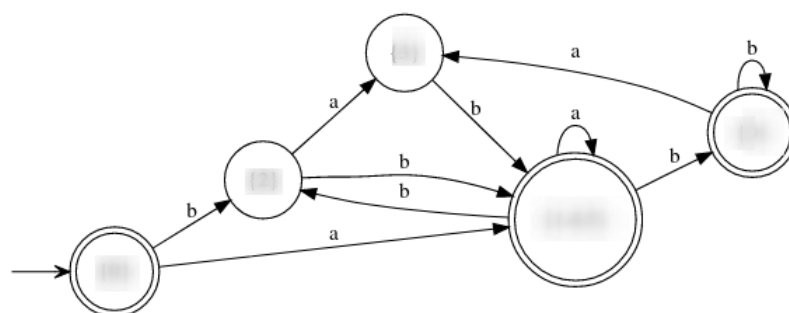
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 6 ☐ d 3 ☐ e 2 ☐ f 0 ☐ g 5

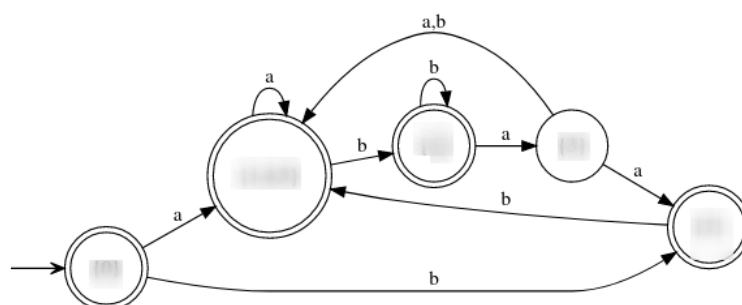
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

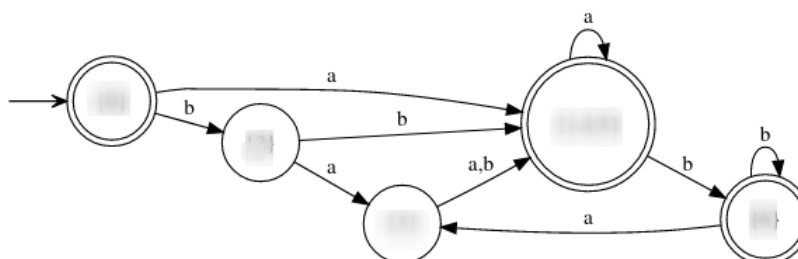
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



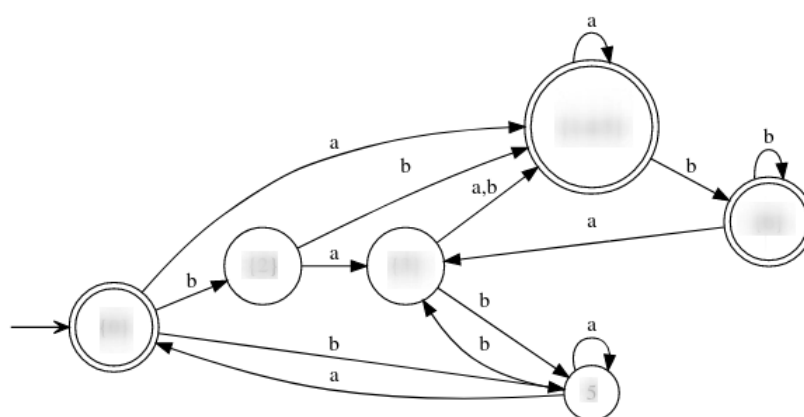
(-i-)



(-ii-)

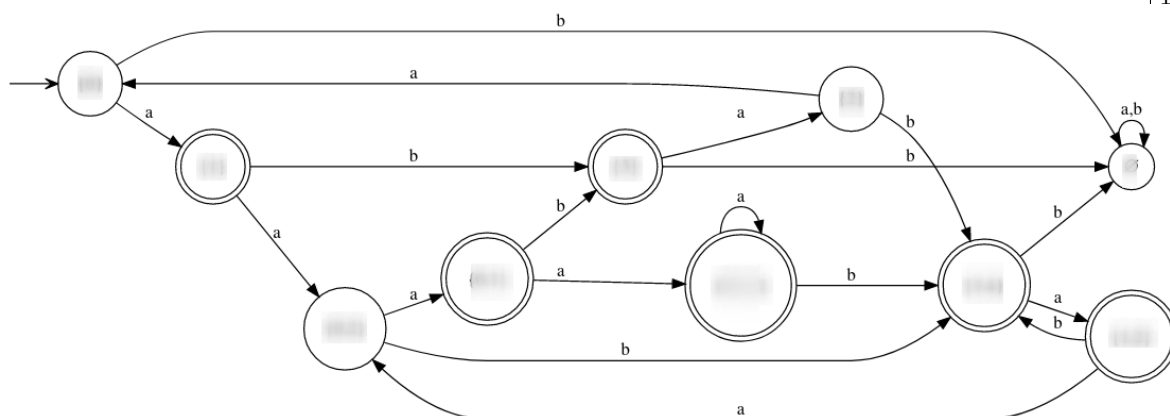


(-iii-)

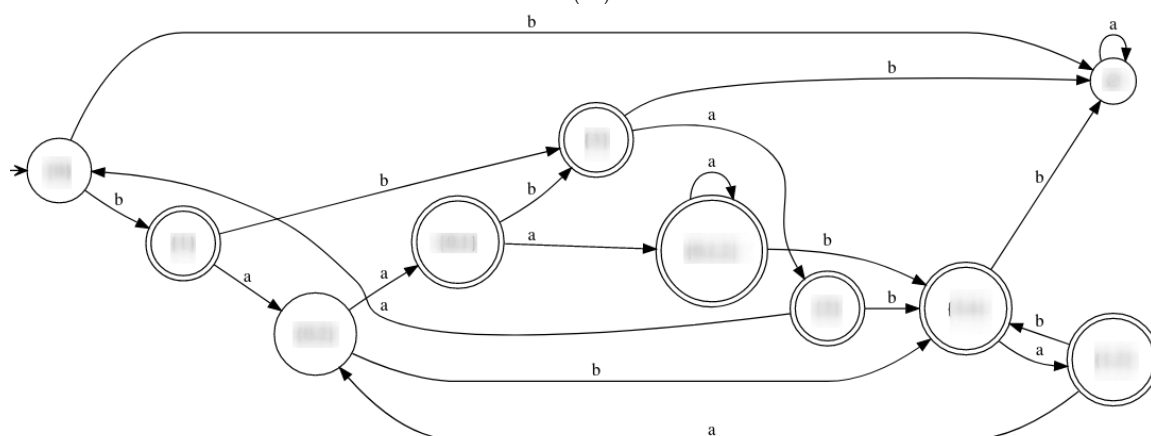


(-iv-)

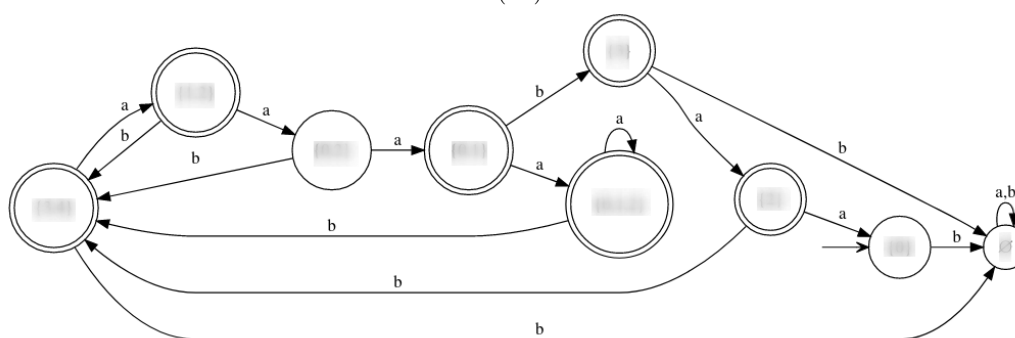
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

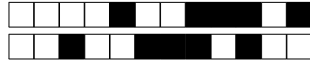


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f  h  j k

Question 3 :    d e f g  i j

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c   f g h i

Question 6 : a b      h    l m n

Question 7 : a b c d 

Question 8 :  b  d e

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a  c  e  g h i j  l m

Question 12 : a  c d e f g h

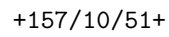
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ A est complet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e A possède un état puits
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐	$X_4 = a + b$	☐	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + b$
☐	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐	$X_4 = (a + b)X_4$
	☐	☐	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = a + b$	☐	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐	$X_4 = a^* + b^*$
☐	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐	$X_1 = a^*b$	☐	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐	$X_1 = a^+bX_2$	☐	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

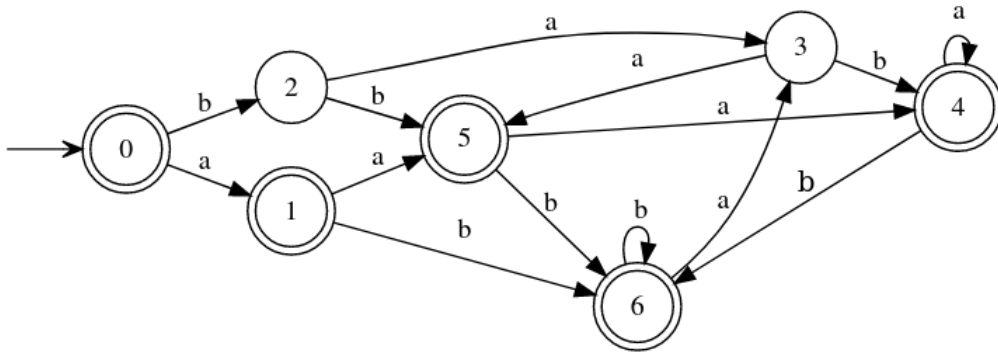
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐	$X_3 = a(a + b)^*$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

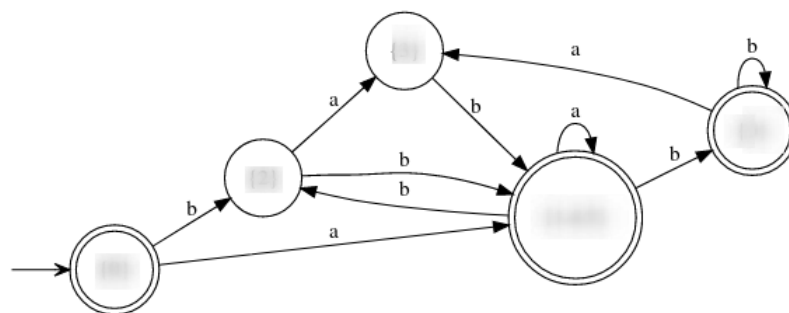
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 6

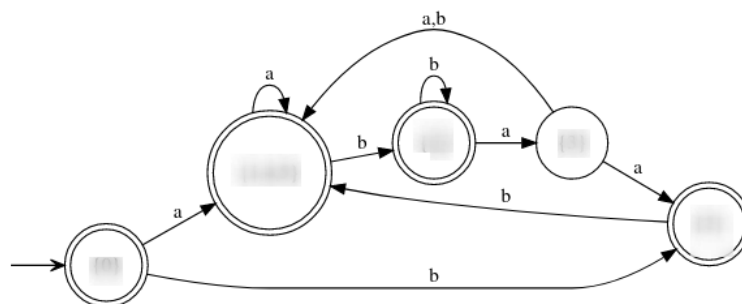
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

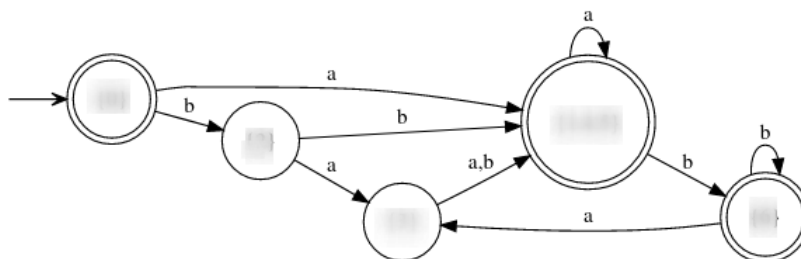
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



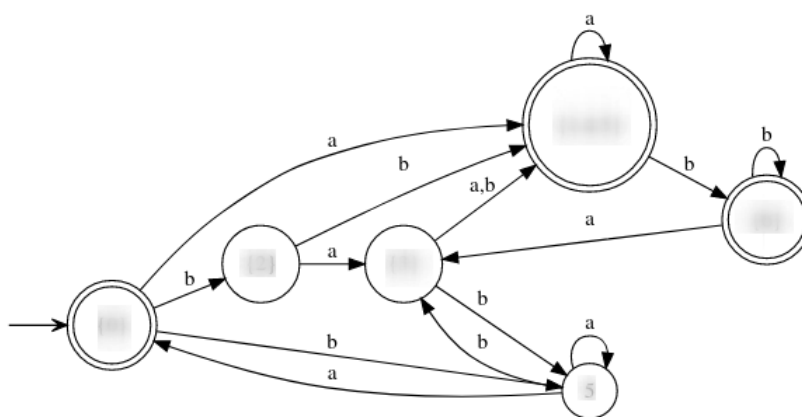
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

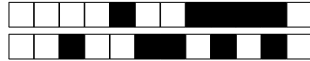


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e  g  i j k

Question 3 :   c d   g   j   m n

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a  c d e  g h i

Question 6 : a b c d 

Question 7 :   c d e

Question 8 :  b  d  f  h i j

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b  d

Question 11 :  b c d e f g   j  l m

Question 12 : a b  d e f g h

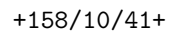
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits
- ☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d u n'est pas accepté par A .
- ☐ e A a au moins un état non accessible. ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ h $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ i A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une fonction. ☐ b Un mot peut être vide.
- ☐ c Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ ☐ g Un mot possède une infinité de suffixe.
 ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☐ b Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ d Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ g Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet.
 ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
 ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d A a des états accepteurs.
 ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-.
 ☐ b la Figure 3-ii-.
 ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-.
 ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-.
 ☐ b la Figure 4-ii-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

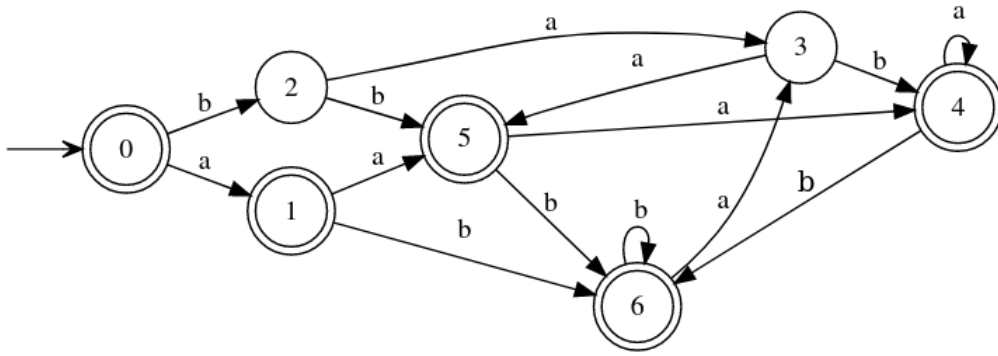
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

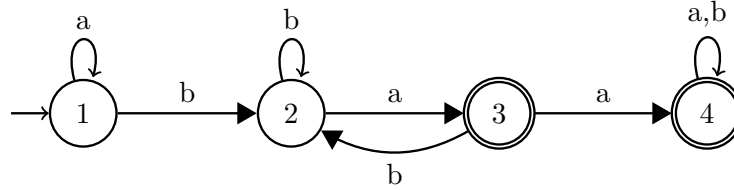
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

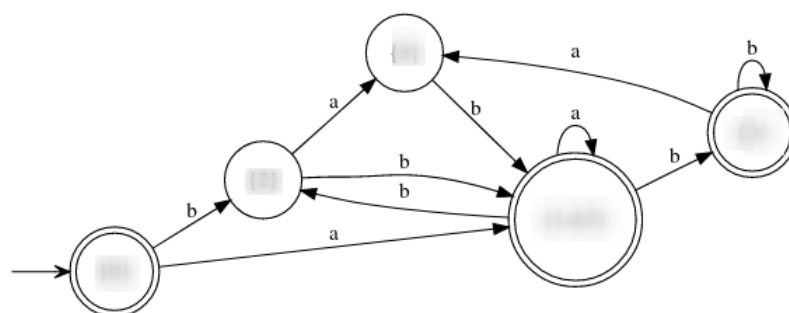
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 0 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 2

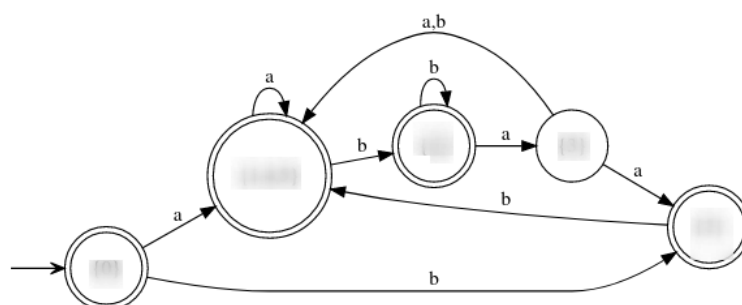
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

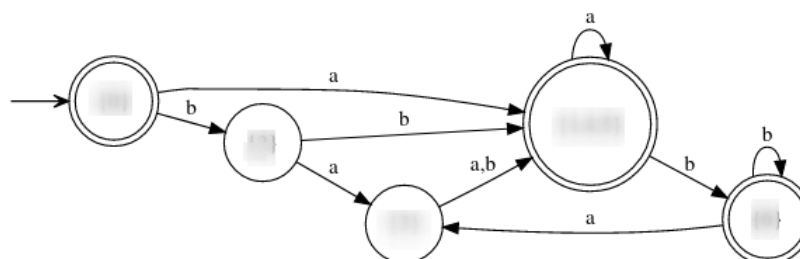
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



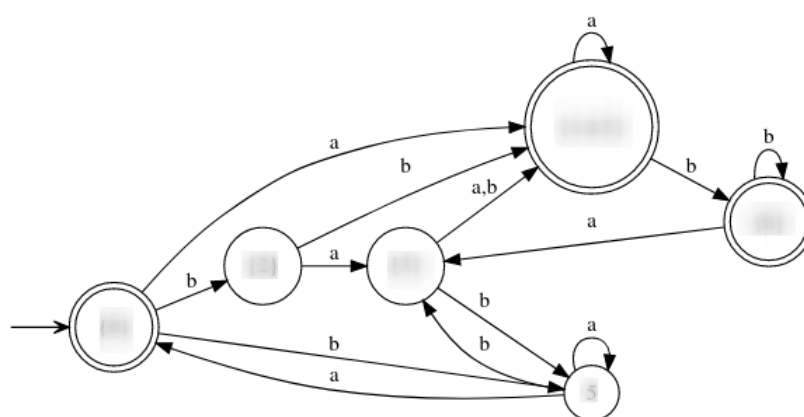
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

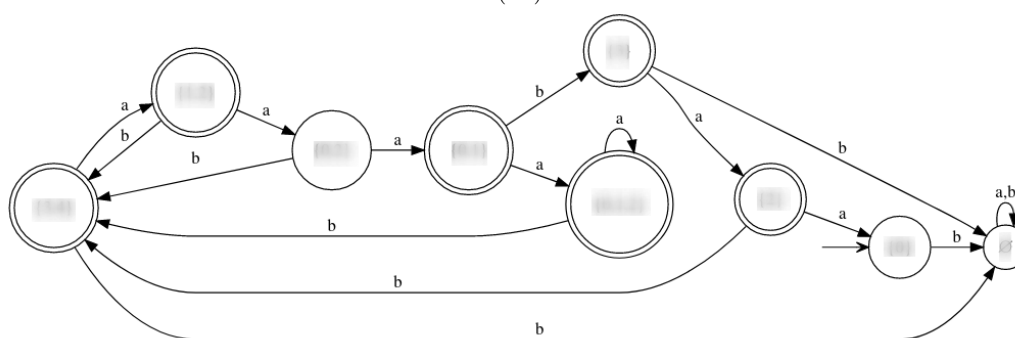
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



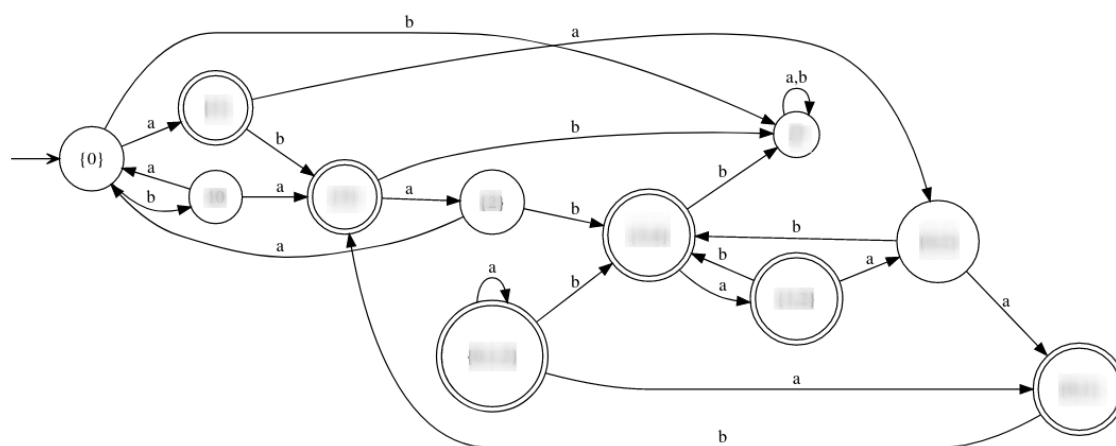
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

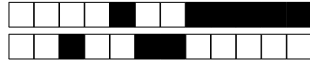


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

	b	c		e	f				j	k

Question 5 :

			d			g	h		j			m	n

Question 6 :

a	b		d			g		i	j

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d		f	g	h	i		k		

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

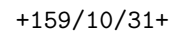
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot est une application.	☐ b	Un mot possède une infinité de préfixe.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ e	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot peut être vide.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ i	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ k	Un mot peut être infini.	☐	Un mot est une fonction.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐	A a au moins un état accessible.	☐	u n'est pas accepté par A .
☐ c	A a au moins un état co-accessible.	☐	A n'est pas complet.
☐	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .	☐	$u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ g	A a au moins un état non co-accessible.	☐ h	A a au moins un état non accessible.
☐ i	A n'a pas d'état accepteur.		
☐ j	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.		
☐ k	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.		

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a	L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b	Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c	Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d	Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A est complet.
☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ f Σ^* est fermé par suffixe. ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ h Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☐ f A accepte le langage universel.
☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-ii-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

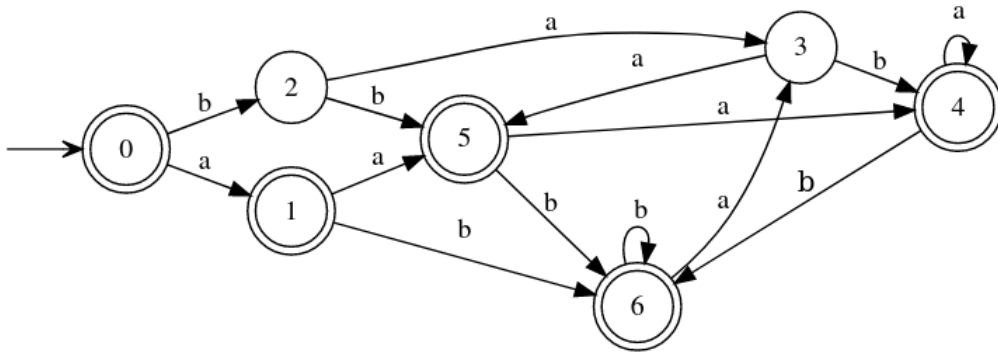
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

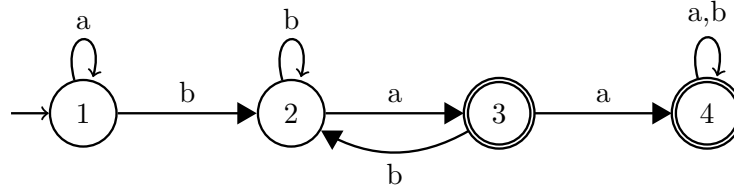
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

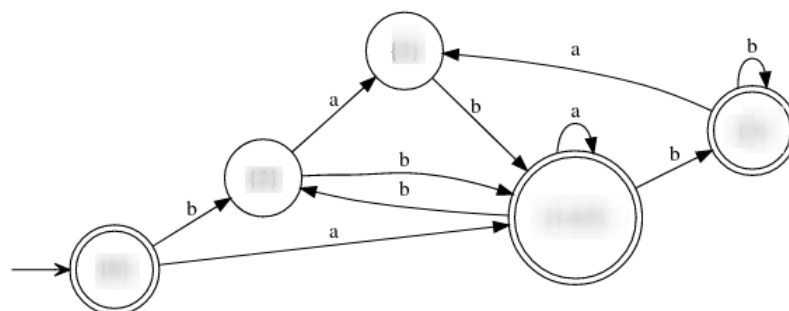
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 5 ☒ f 4 ☐ g 6

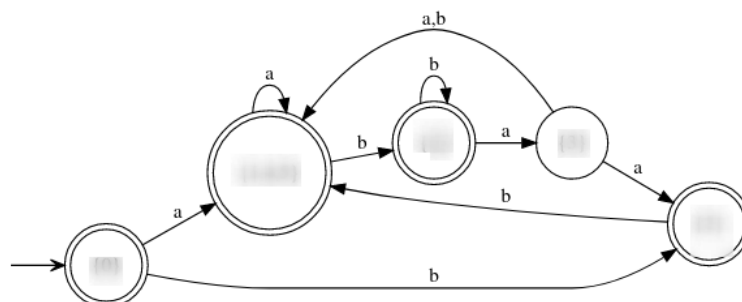
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

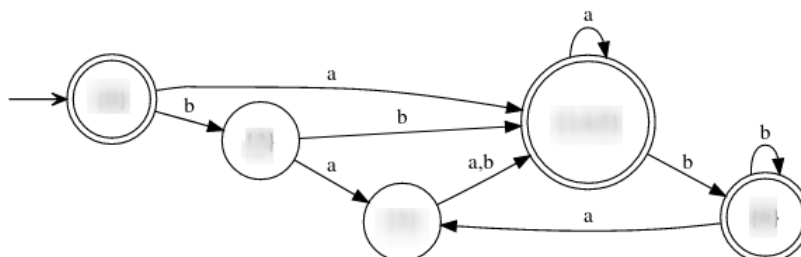
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



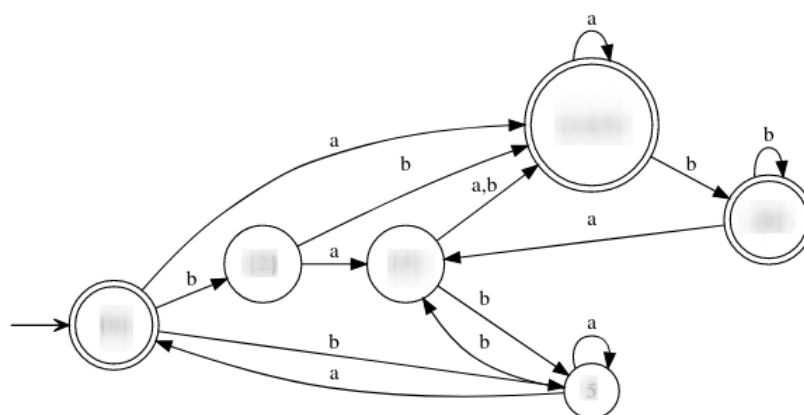
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

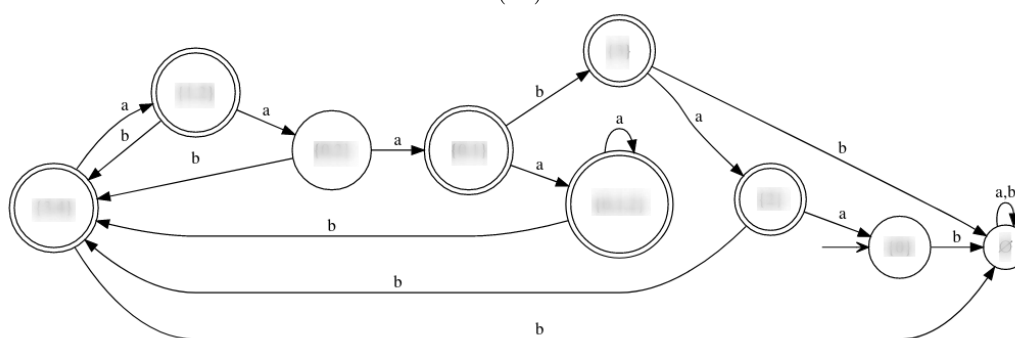
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



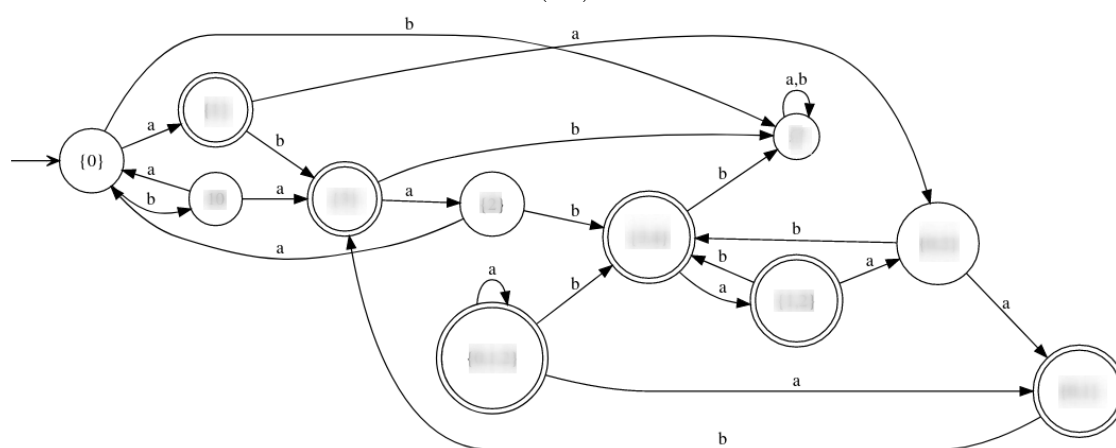
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b   e   i  k  m n

Question 3 :   c   g h i j k

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :   c d e

Question 7 :  b c d e   i j

Question 8 : a b c  e f  h i

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b  d

Question 11 :   c  e f  h i j k l m

Question 12 : a b c d  f g h

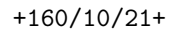
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ A est complet.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.

☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Σ est fermé par suffixe.

☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Σ^* est fermé par facteur.

- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ i Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii- ☐ b la Figure 3-ii- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv- ☐ d la Figure 3-i-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i- ☐ b la Figure 4-iii- ☐ c la Figure 4-ii- ☐ d la Figure 4-iv-

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

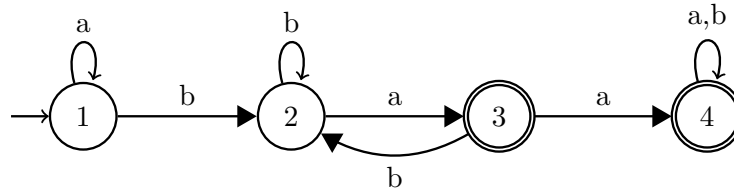
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

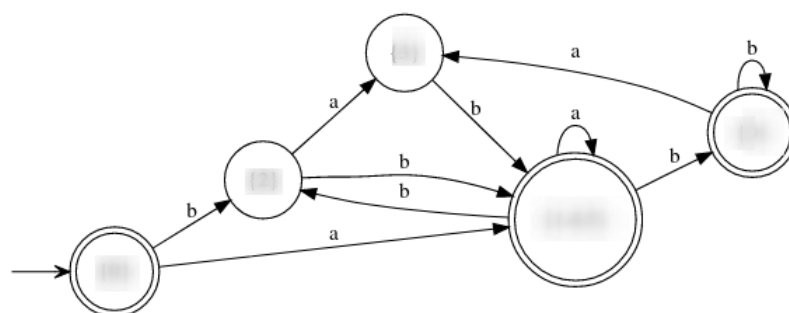
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 1 ☐ d 0 ☒ 4 ☐ f 3 ☐ g 6

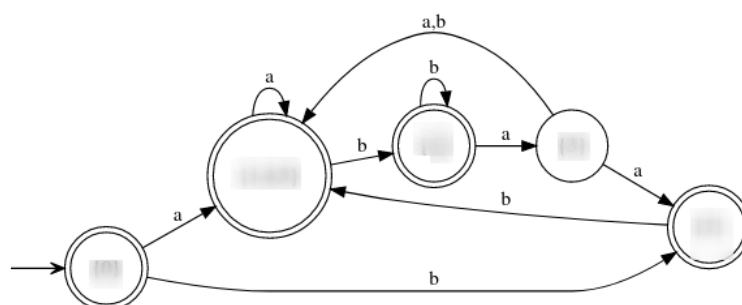
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

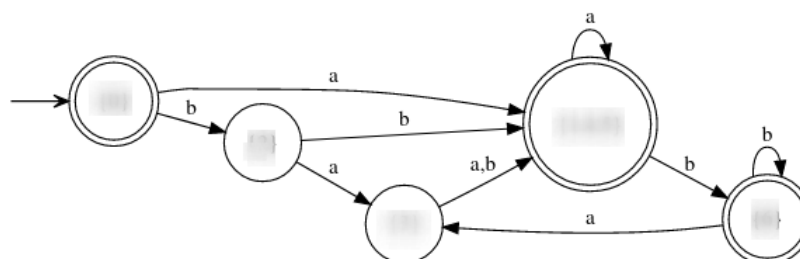
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



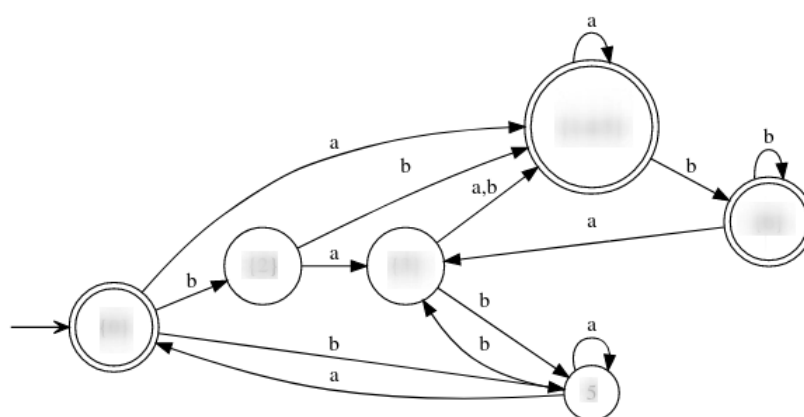
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 : a   d e f g h i

Question 5 : a b   e f   i j

Question 6 : a     f g  i    m n

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a  c d     i j k

Question 9 :  b c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a  c  e  g  i j k l m

Question 12 : a b c  e f g h

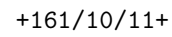
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d u est accepté par A . ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c A possède un état puits
☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ c Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ e Un mot peut être vide. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ g Un mot est une application. ☒ h Un mot est une fonction.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ j Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ k Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ est fermé par facteur.
- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

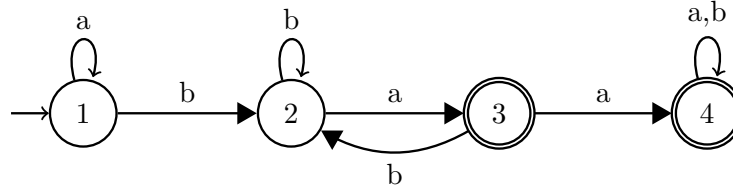
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

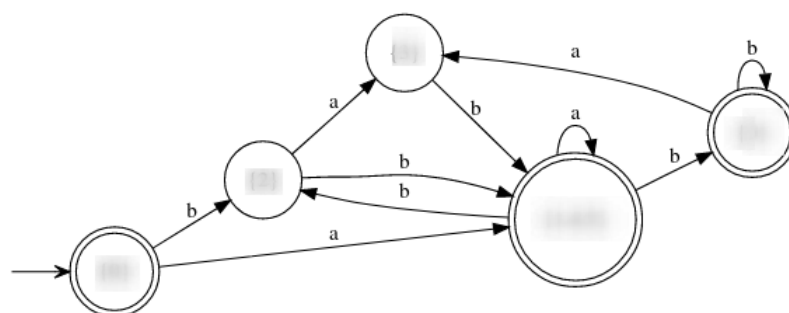
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 5 ☐ g 0

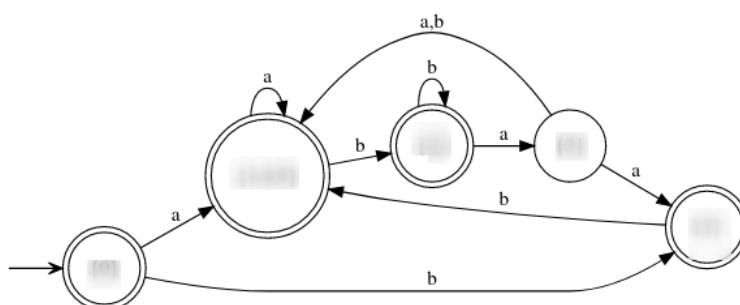
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

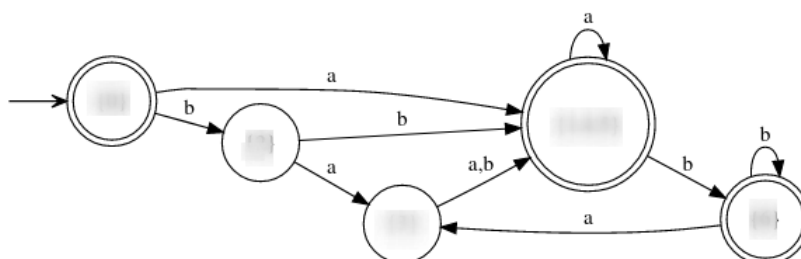
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



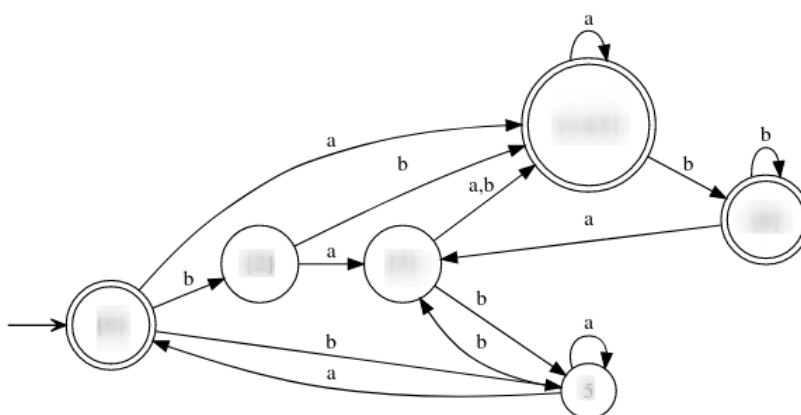
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

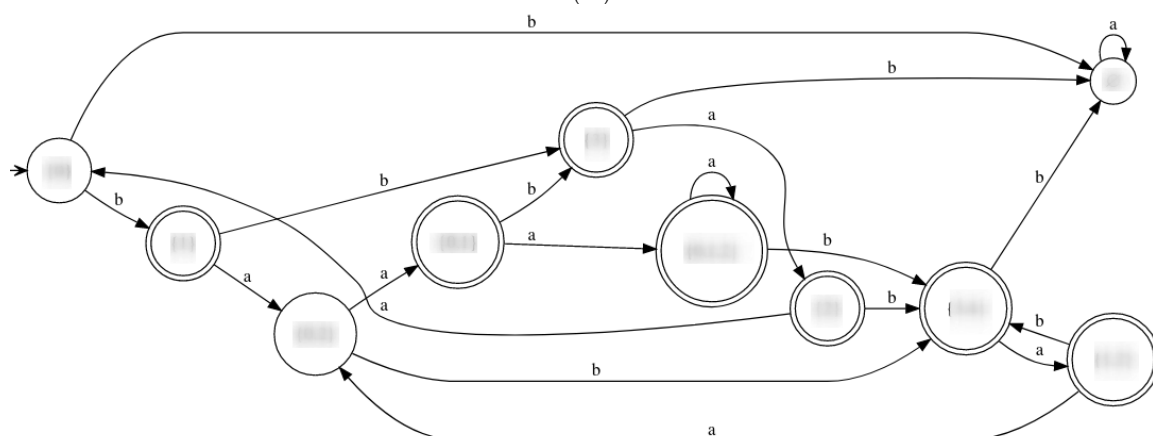


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



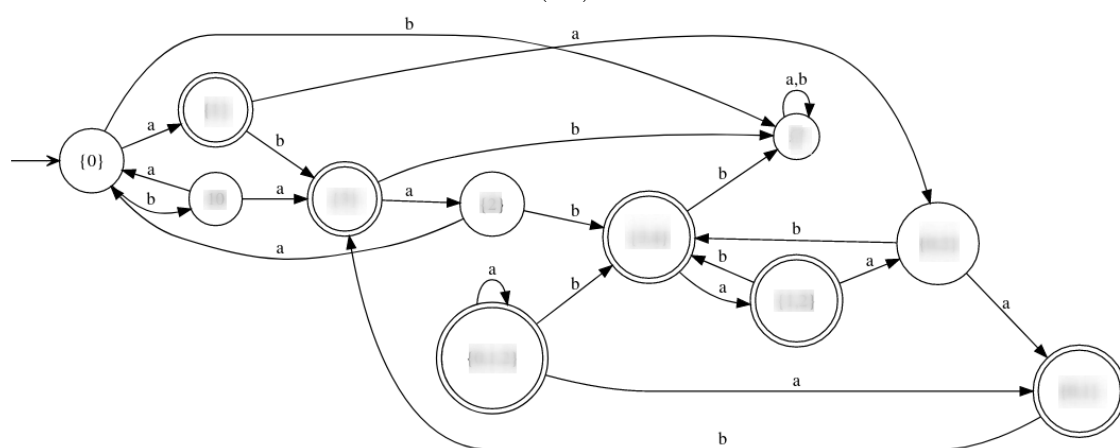
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

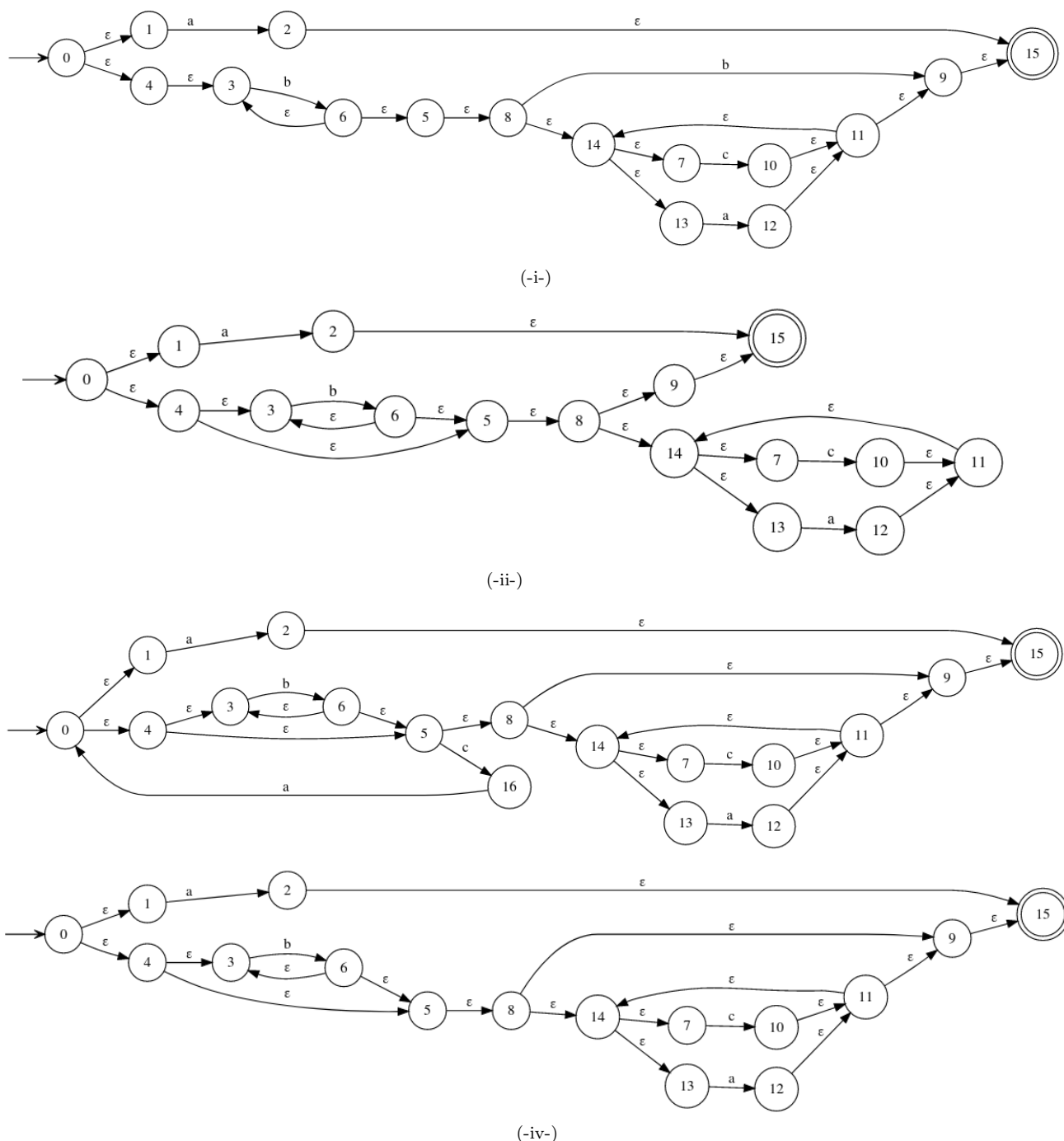


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 4 :

	b				f			i			l	m	n

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a		c		e	f			i	j

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

	b			e		g	h		j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c				g	h		j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

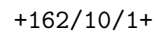
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

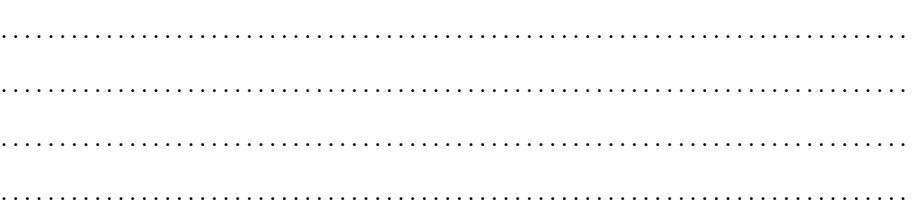
a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant



Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d A est complet. ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ e A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ e A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

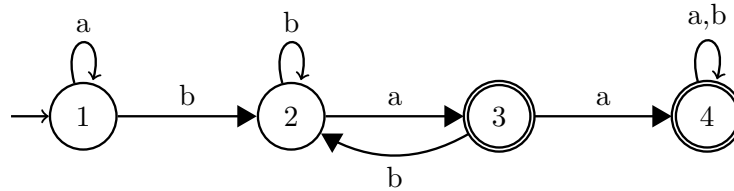
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

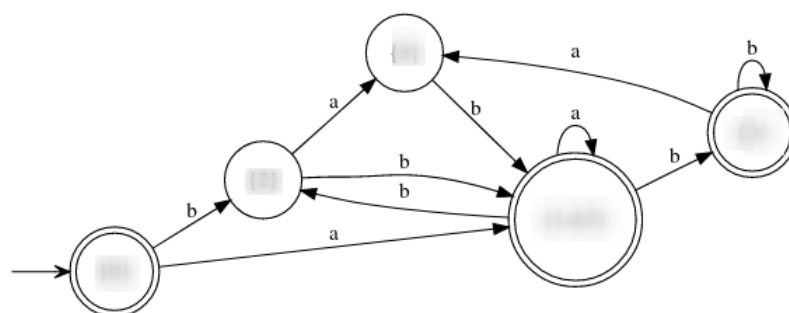
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 2

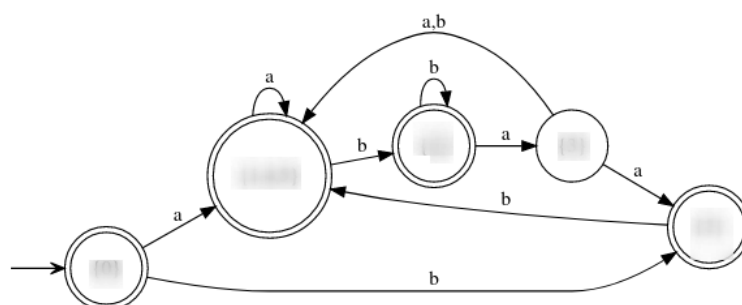
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

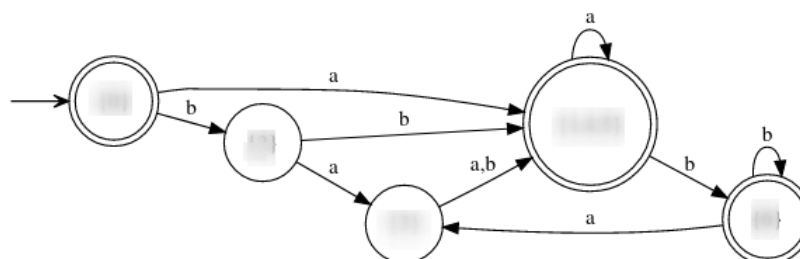
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



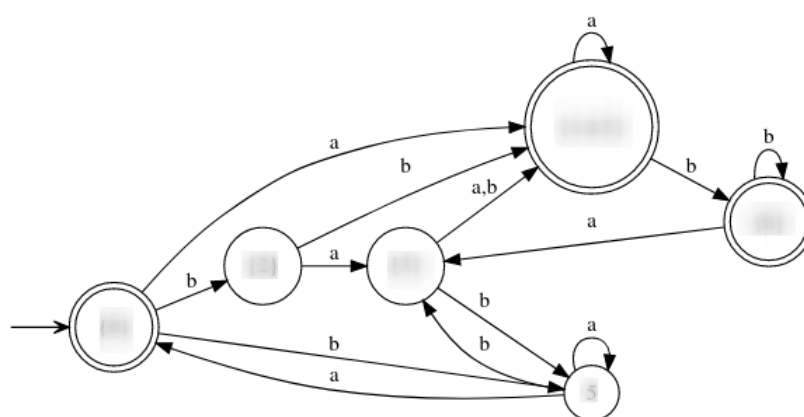
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

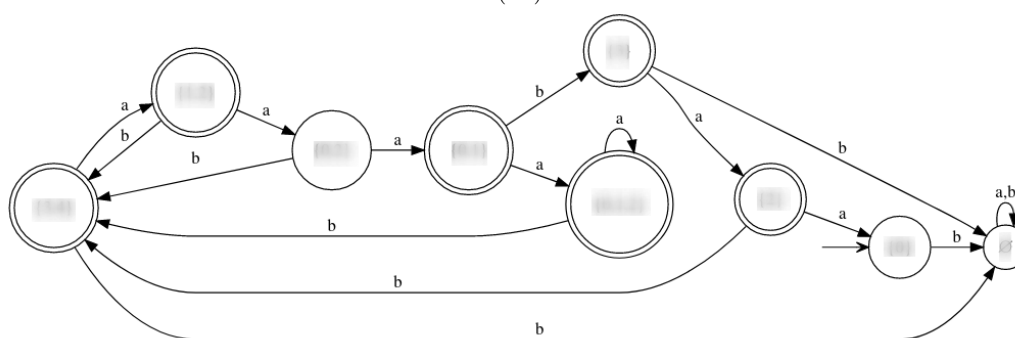
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



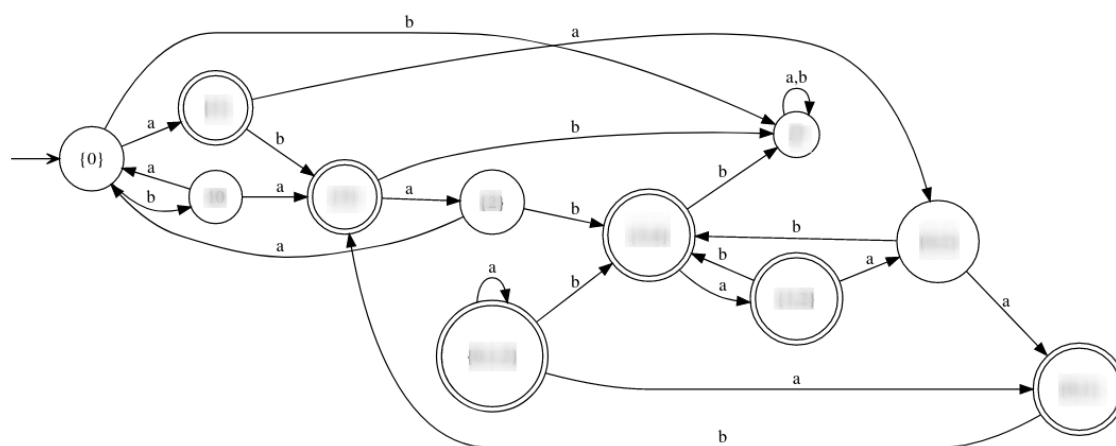
(-i-)



(-ii-)

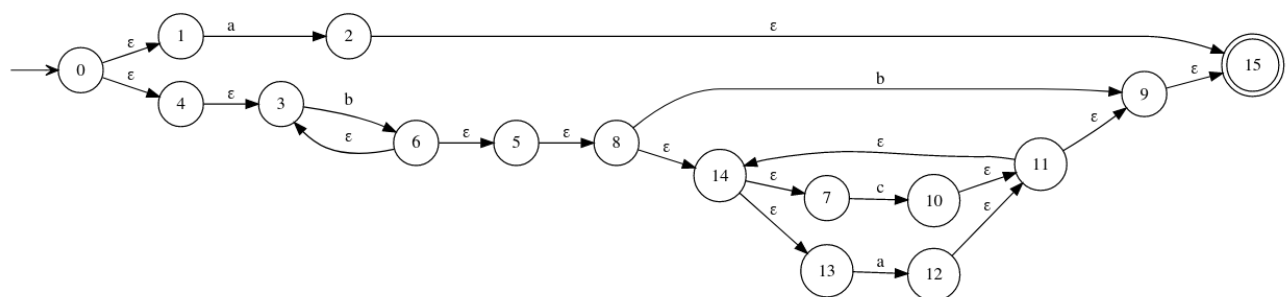


(-iii-)

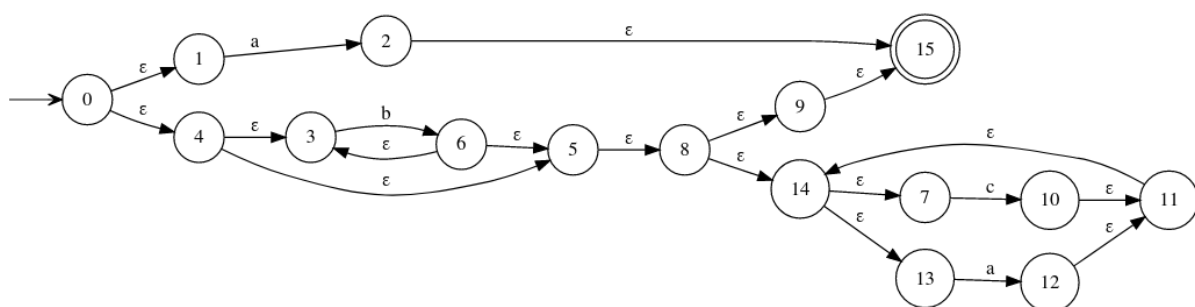


(-iv-)

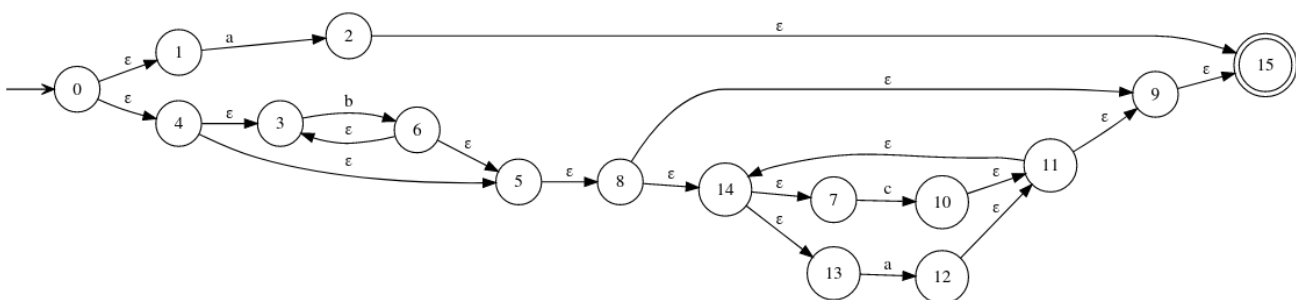
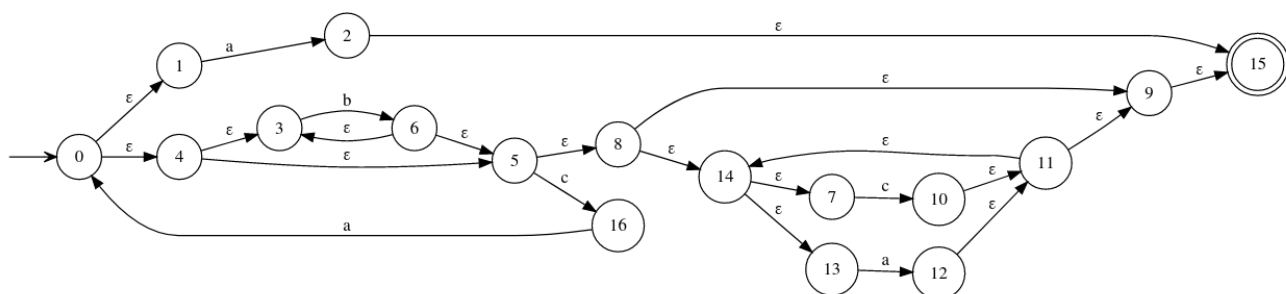
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c		e		g		i	j

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a	b	c		e					j	k

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

			d				h	i			l	m	n

Question 7 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

			d	e	f	g	h	i		k	l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

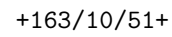
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot peut être vide.	☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot est une fonction.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ b P est forcément déterministe.
- ☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e u est accepté par A .
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ b A a au moins un état accessible. ☐ c A a au moins un état co-accessible.
☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☒ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ f u n'est pas accepté par A . ☒ g A n'est pas complet. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d A accepte le langage universel. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f A possède un état puits
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☒ e Σ^* est fermé par suffixe.
☒ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

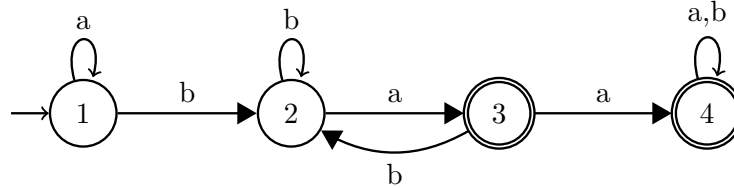
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

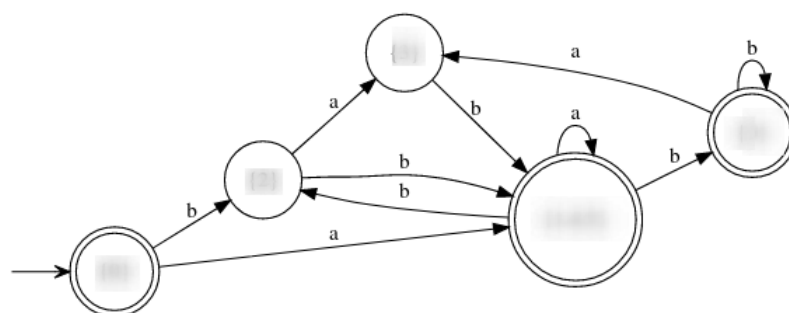
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 2 ☒ 4

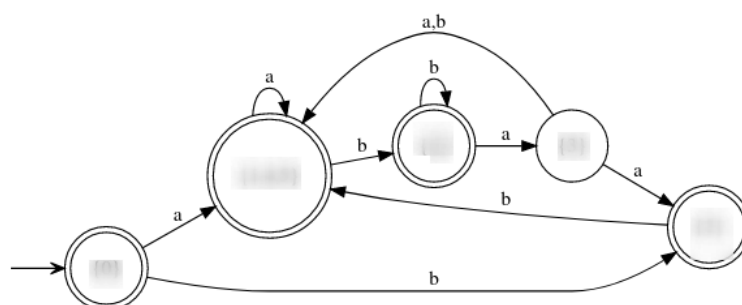
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

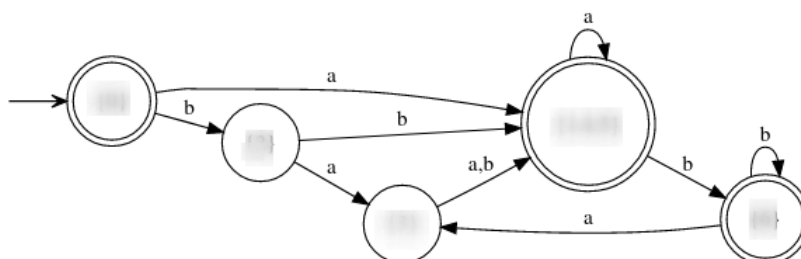
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



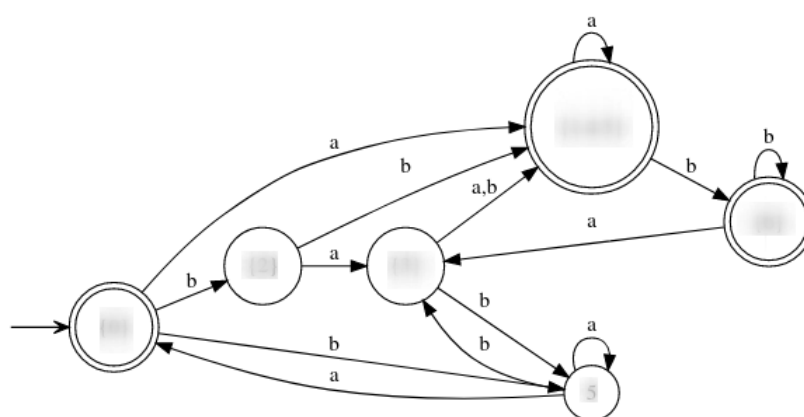
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

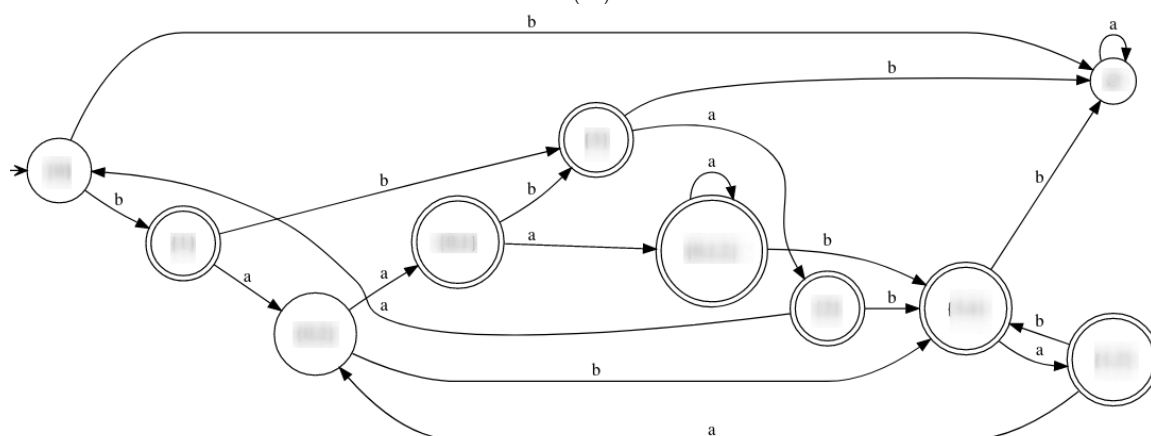


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ d ☐ ☐ g ☐ ☐ j ☐ l m n

Question 3 : a ☐ ☐ d e

Question 4 : a b c d ☐

Question 5 : a b c d e f g ☐

Question 6 : ☐ ☐ c d ☐ ☐ ☐ h i j k

Question 7 : ☐ b ☐ d e f g h i

Question 8 : ☐ b ☐ d ☐ ☐ g h i j

Question 9 : ☐ b c d e

Question 10 : a b ☐ d

Question 11 : a b c ☐ ☐ ☐ g ☐ i j k l m

Question 12 : a b ☐ d e f g h

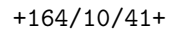
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : a ☐ c d e f

Question 15 : ☐ b c d e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : a b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ g A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d A possède un état puits ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f A accepte le langage universel.
- ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c u est accepté par A . ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e A est complet.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-.
- ☐ b la Figure 3-i-.
- ☐ c la Figure 3-iii-.
- ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-.
- ☐ b la Figure 4-iv-.
- ☒ la Figure 4-i-.
- ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^* a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

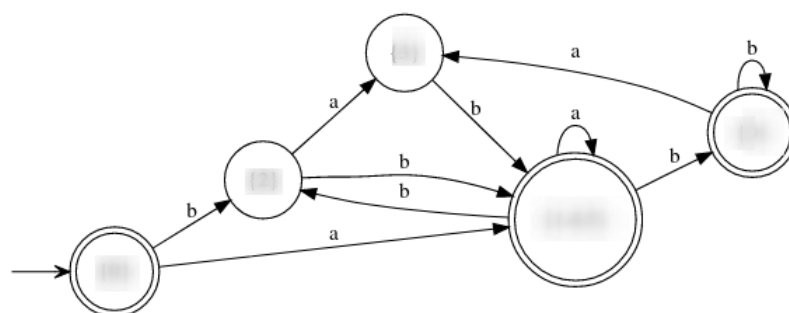
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 6 ☐ c 2 ☐ d 0 ☐ e 3 ☐ f 1 ☐ g 5

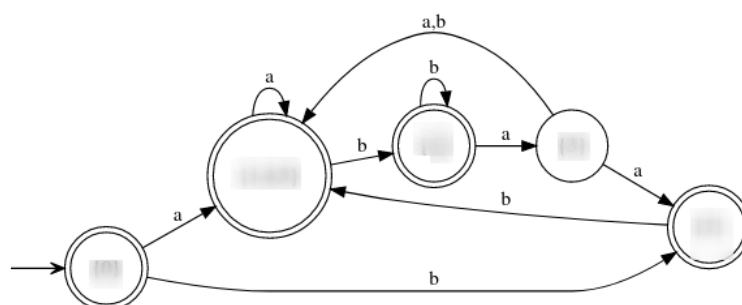
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

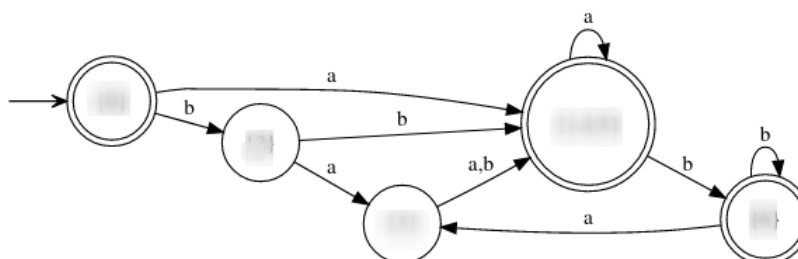
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



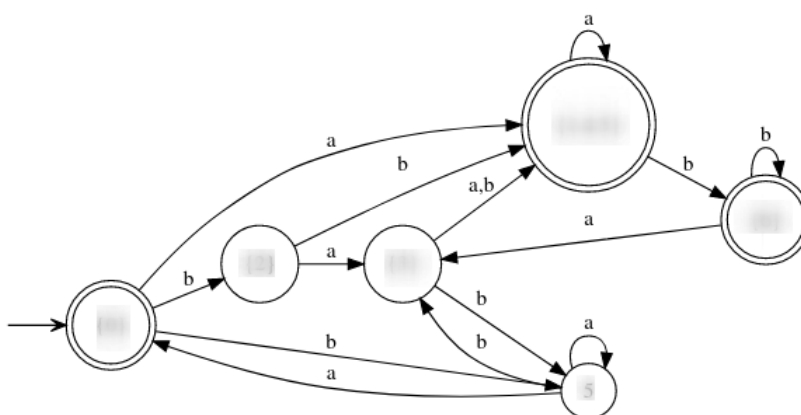
(-i-)



(-ii-)

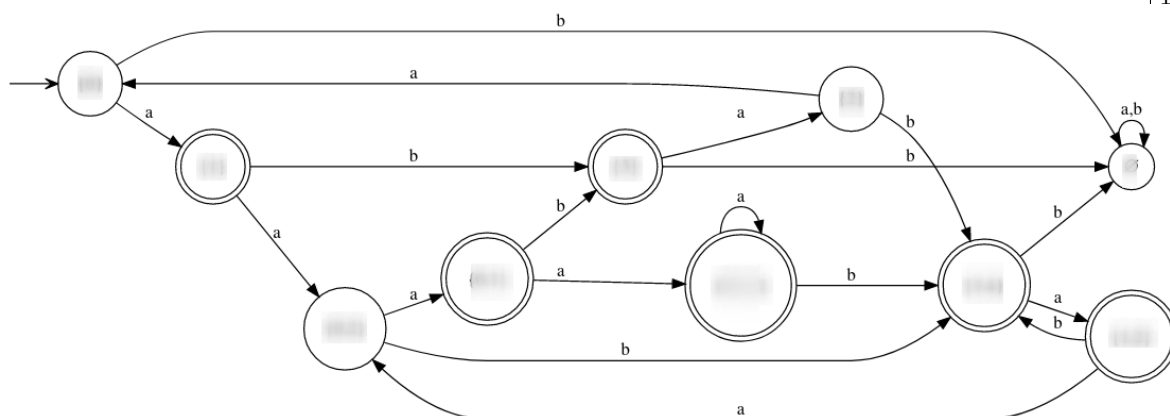


(-iii-)

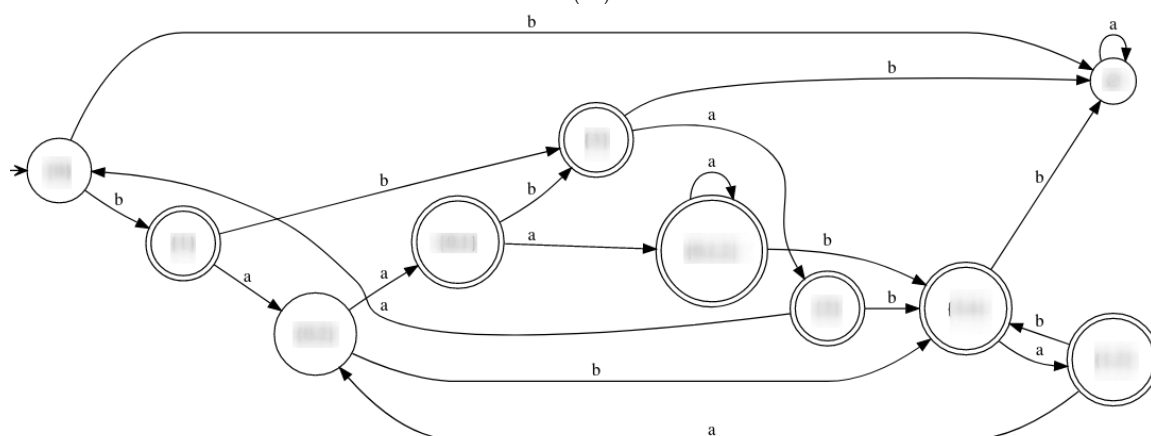


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a	b		d								l	m	n

Question 4 :

a		c		e		g			j	k

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 7 :

			d	e		g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c	d		f	g	h		j		l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

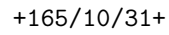
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, with a solid line at the very top. The paper is otherwise blank, with no text or markings.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ u est accepté par A .

☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.

- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ c A accepte le langage universel. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ g A a au moins un état co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

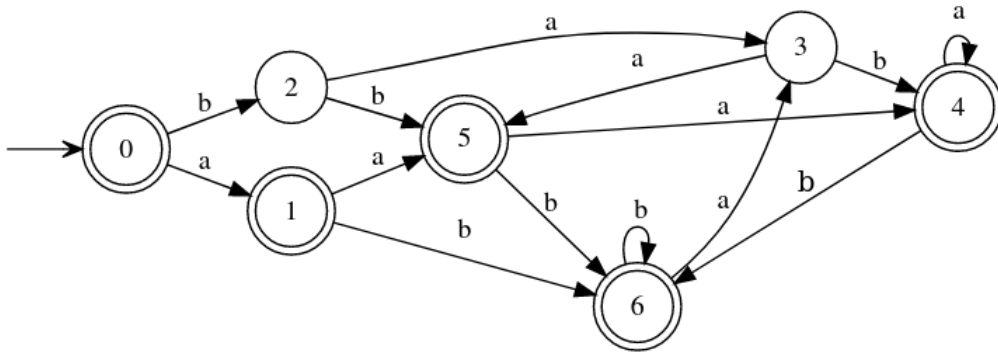
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

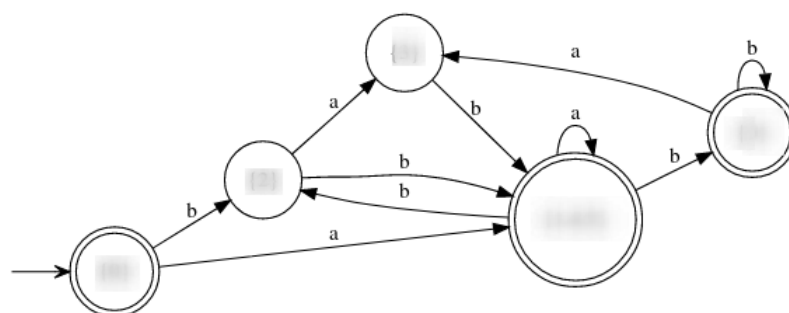
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 3 ☐ f 1 ☐ g 5

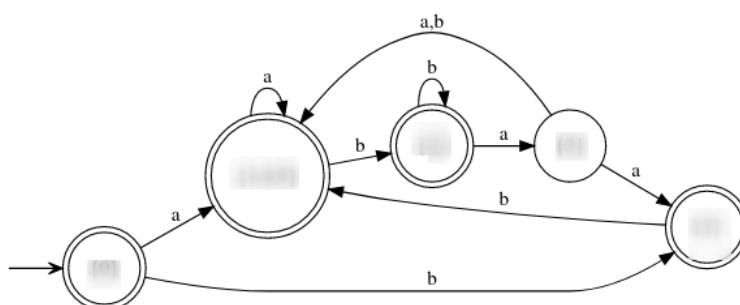
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

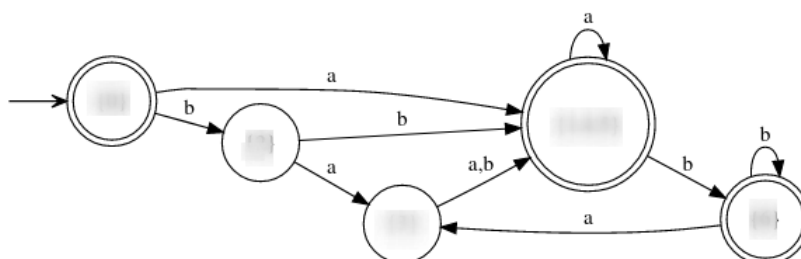
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



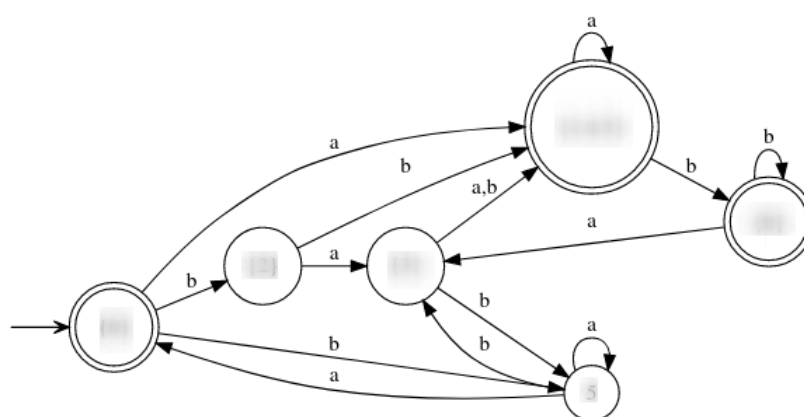
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

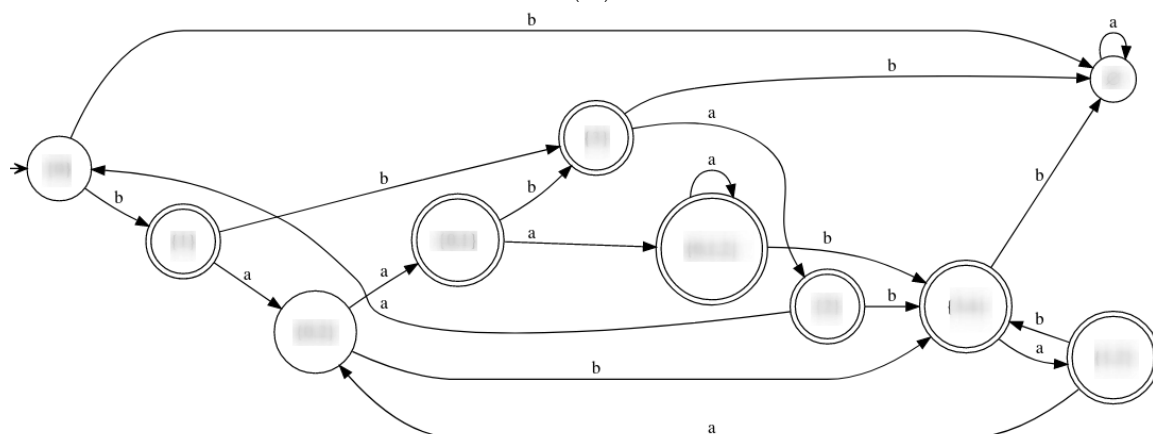


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



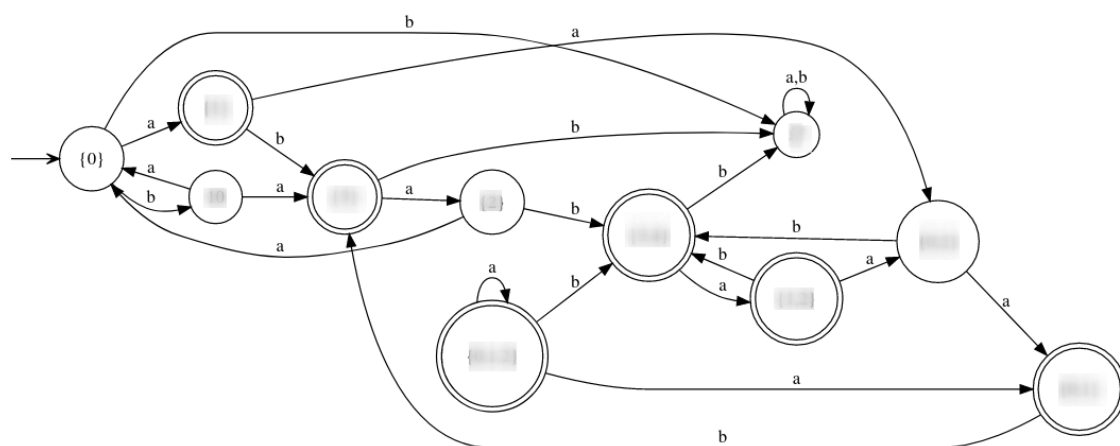
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g 

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d 

Question 5 :  ☐ b  ☐ d  ☐ f  ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 :  ☐ b     ☐ g ☐ h ☐ i    ☐ m ☐ n

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f  ☐ h ☐ i

Question 8 :    ☐ d  ☐ f ☐ g  ☐ i ☐ j ☐ k

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c  ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c 

Question 11 :  ☐ b  ☐ d ☐ e  ☐ g ☐ h  ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

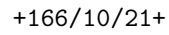
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f

Question 14 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c  ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a 

Question 17 : ☐ a  ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

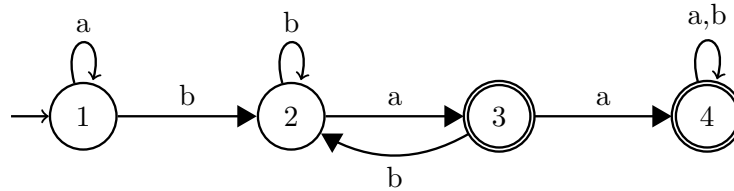
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

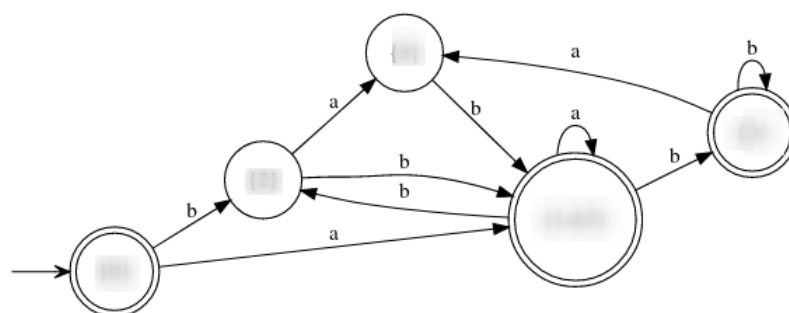
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 2 ☐ c 3 ☐ d 0 ☐ e 6 ☐ f 5 ☒ 4

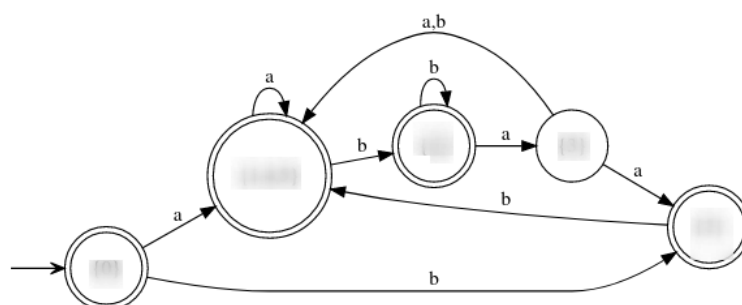
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

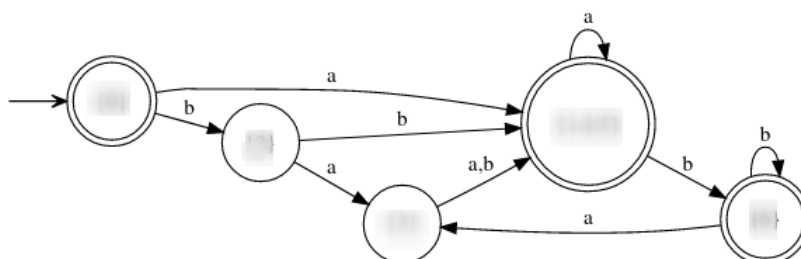
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



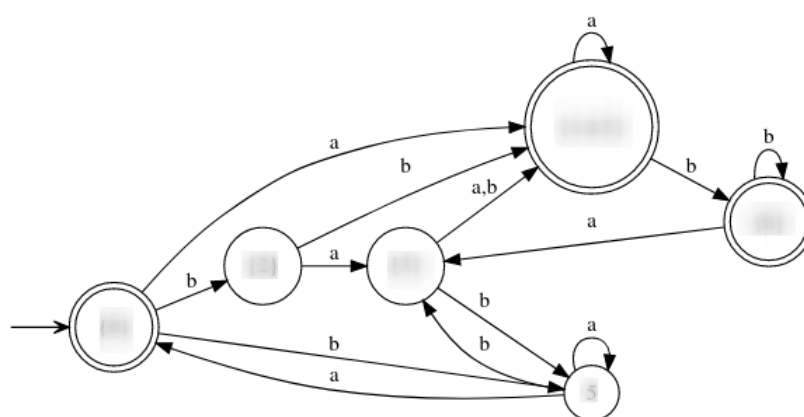
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 3 :

a	b		d				h	i	j

Question 4 :

a		c			f			i	j	k

Question 5 :

a	b				f	g						m	n

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b		d	e	f	g		i		k		m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

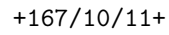
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d A possède un état puits ☐ e A accepte le langage universel.
- ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état accessible. ☐ c u n'est pas accepté par A .
- ☐ d A n'est pas complet. ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☐ f A a au moins un état co-accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
☐ c u est accepté par A . ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ b Un mot est une application.
☒ c Un mot est une fonction. ☐ d Un mot peut être infini. ☒ e Un mot peut être vide.
☒ f Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ g Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ h Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ i Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ j Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ l Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☐ d $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ e $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ f $X_1 = aX_1 + b$
☐ g $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ h $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☐ i $X_4 = a + b$ ☐ j $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ k $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ l $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ m $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = a + b$ ☐ b $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ c $X_4 = a^* + b^*$ ☐ d $X_4 = (a+b)X_4$
☐ e $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ f $X_4 = (a+b)^*$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b$ ☐ c $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = b^*aX_3$ ☐ c $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_3 = (a(a+b)^*)^*$ ☐ b $X_3 = a(a+b)^*$ ☐ c $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☐ b celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

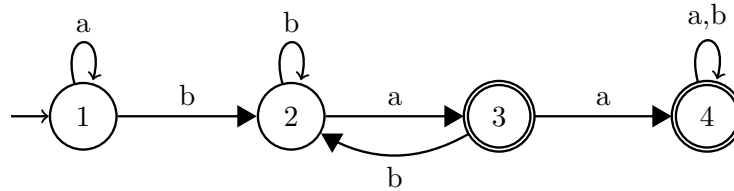
- ☐ a $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$ ☐ b $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ c $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

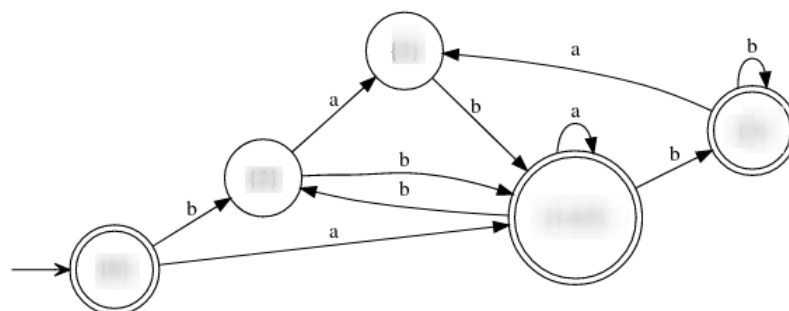
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 3 ☐ c 1 ☐ d 2 ☐ e 0 ☐ f 5 ☐ g 6

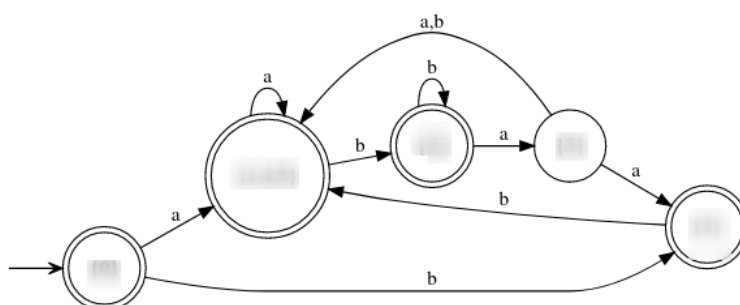
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

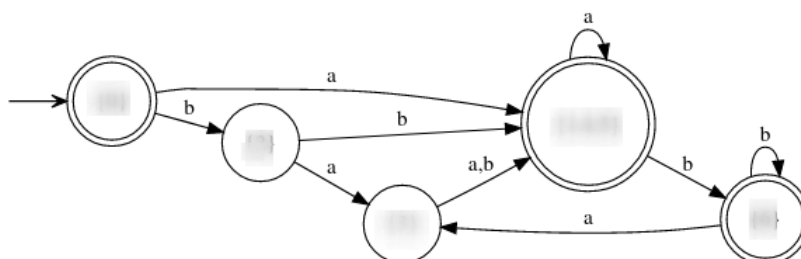
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



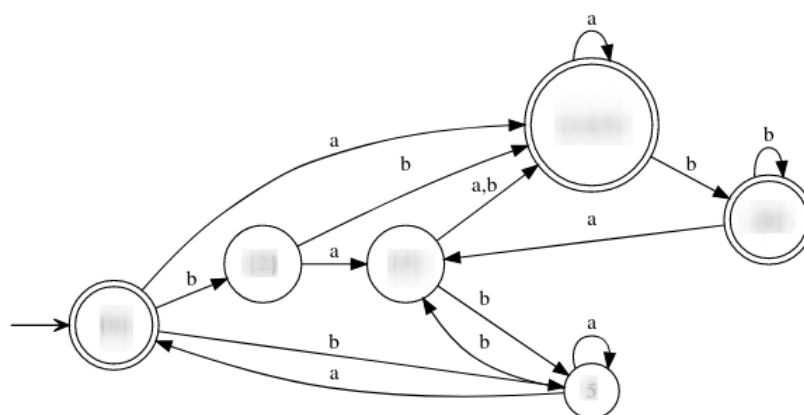
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 3 :

				e	f	g		i	j	k

Question 4 :

	b	c		e	f			i	j

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

			d			g			j	k		m	n

Question 8 :

	b		d	e

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b		d	e	f		h	i		k		m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

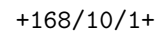
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☐ f A a au moins un état co-accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ h A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

- ☐e Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐g Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot est une fonction.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐l Un mot possède une infinité de suffixe.
☐m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐a u est accepté par A . ☐b A a des états accepteurs.
☐c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐d Les états de A sont tous accessibles.
☐e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐f A est complet.
☐g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐c A accepte le langage universel.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐e Tous les états de A sont accepteurs. ☐f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐g A possède un état puits
☐h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐b la Figure 3-iv-. ☐e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐c la Figure 3-i-. ☐d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐a la Figure 4-iii-. ☐b la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_4 = (a+b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐	$X_4 = (a+b)^*$
☐ e	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a+b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

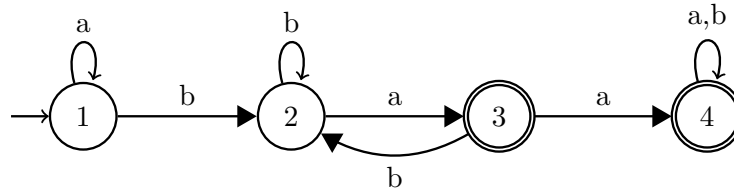
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

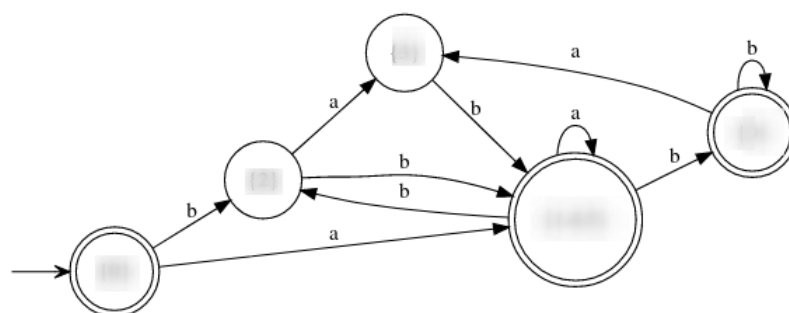
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 2

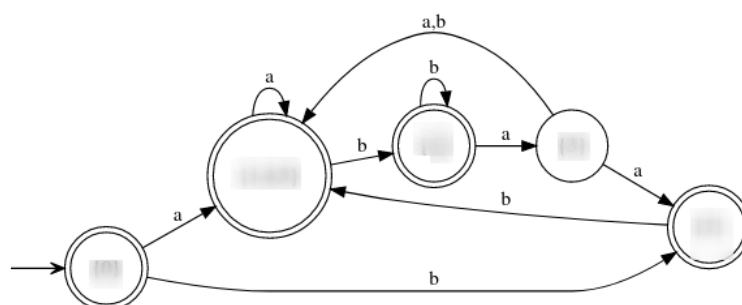
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

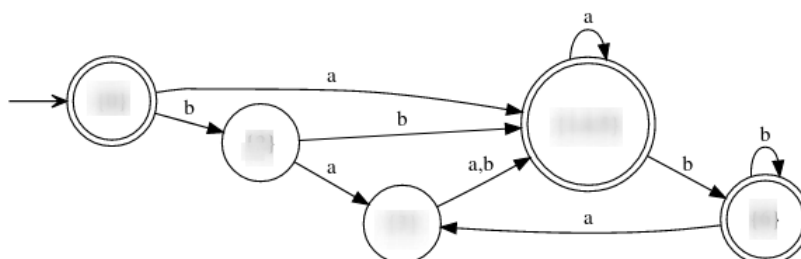
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



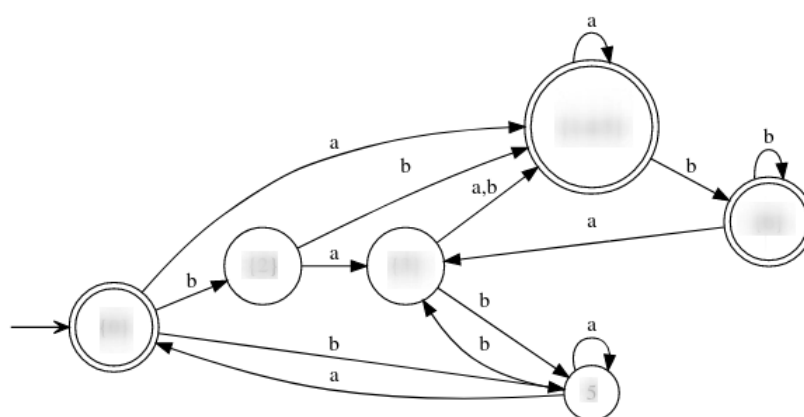
(-i-)



(-ii-)

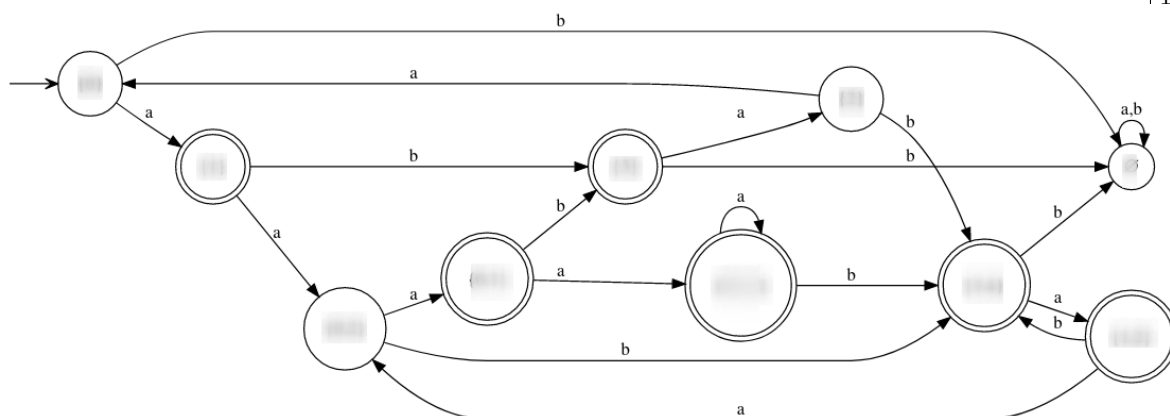


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a				e	f		h		j	k

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

				e	f	g	h	i	j

Question 5 :

			d	e		g					l	m	n

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a		c		e	f	g	h	i

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b		d	e			h	i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

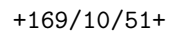
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d u est accepté par A . ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a u n'est pas accepté par A . ☒ b $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
☒ d A a au moins un état accessible. ☒ e A n'est pas complet.
☒ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ g A a au moins un état co-accessible. ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☒ b Σ^* est fermé par suffixe. ☒ c Σ^* est fermé par facteur.
☒ d Σ^* est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une application.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot est une fonction. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ k Un mot peut être infini. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A possède un état puits
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f A accepte le langage universel.
☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ P est forcément déterministe.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

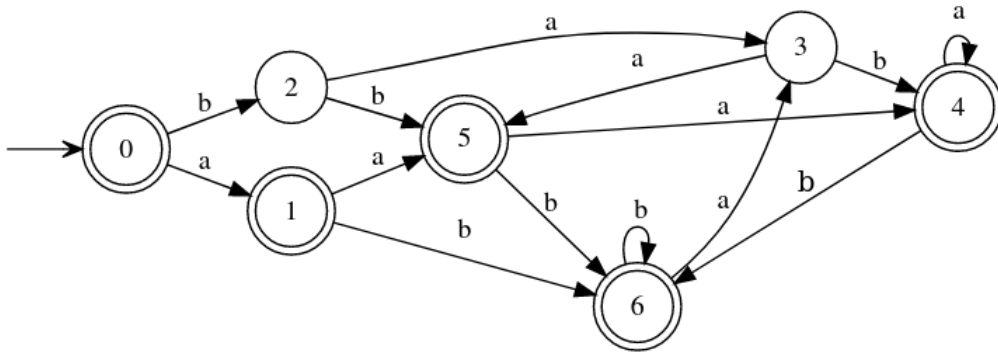
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

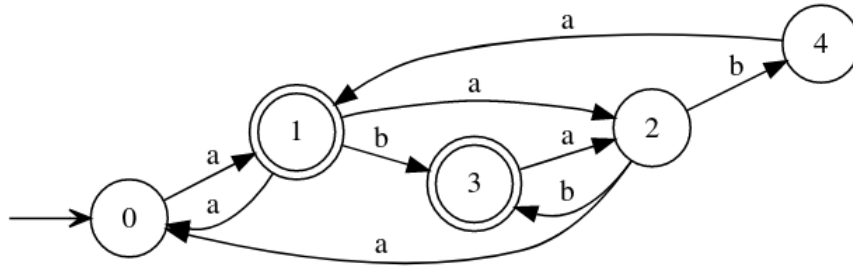
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

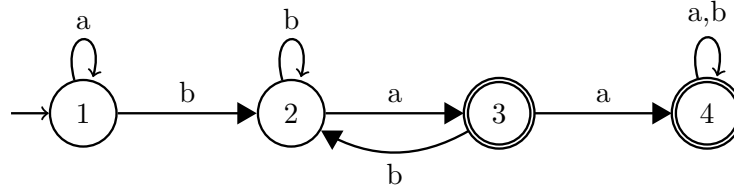
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

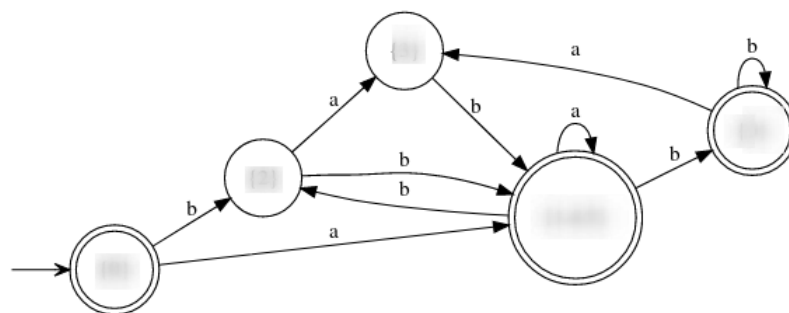
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 5 ☒ c 4 ☐ d 0 ☐ e 2 ☐ f 1 ☐ g 6

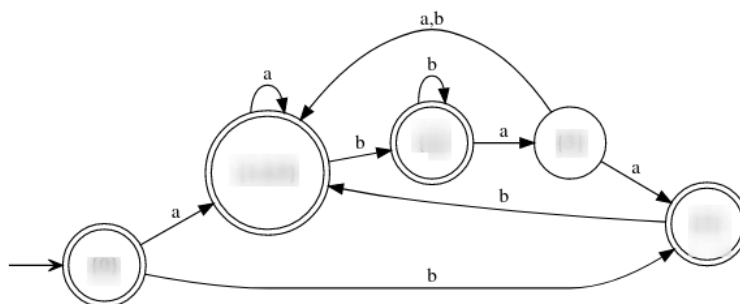
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

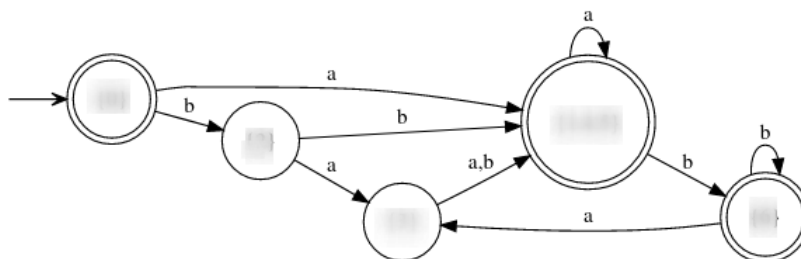
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



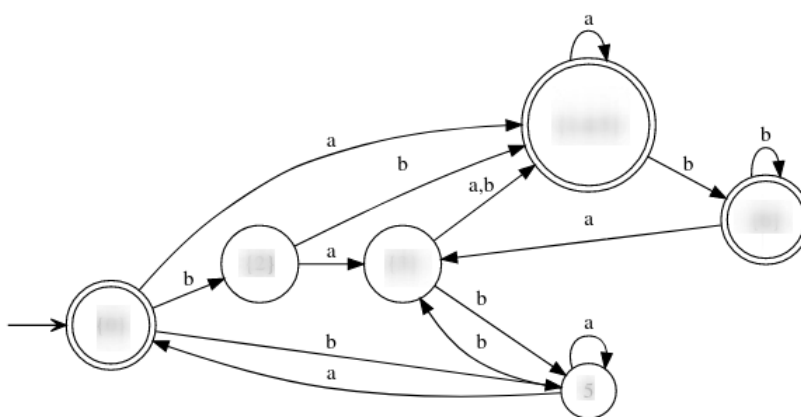
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

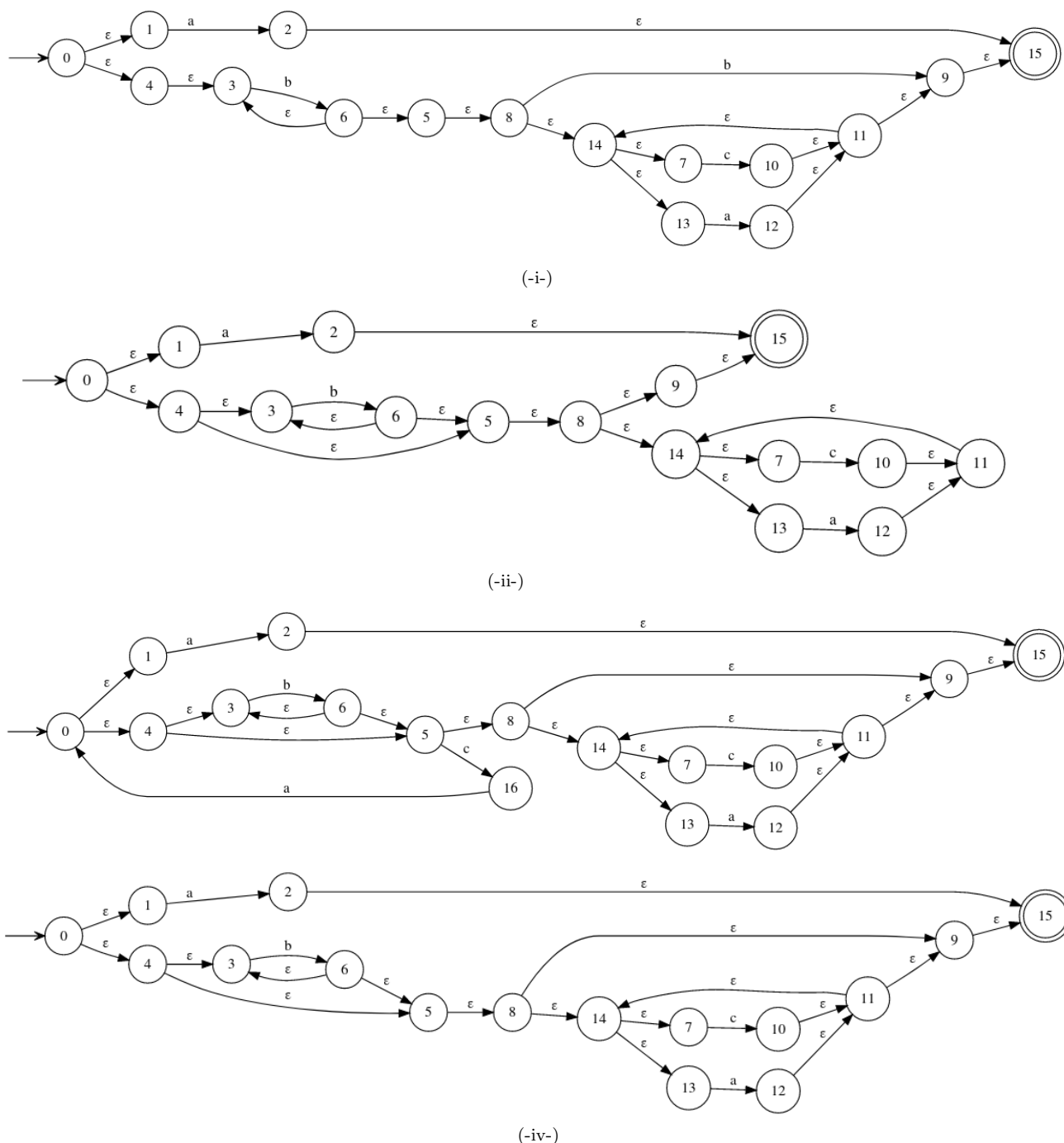


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c				g	h	i	j	k

Question 4 :

a				e	f		h	i	j

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

						g	h		j	k		m	n

Question 7 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 8 :

a			d	e

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b				f	g		i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

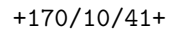
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c u est accepté par A .

☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.

☐ f A a des états accepteurs.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.

☐ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ^* est fermé par préfixe.

☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ g Σ est fermé par préfixe.

☐ h Σ^* est fermé par facteur.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être vide.

☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ d Un mot est une application.

☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ g Un mot est une fonction. ☐ h Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ A possède un état puits
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

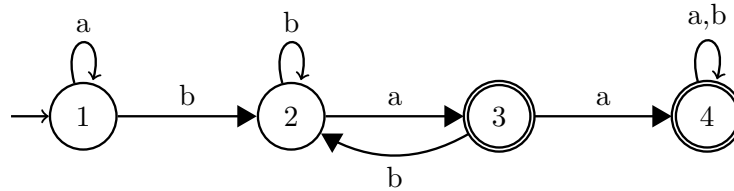
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

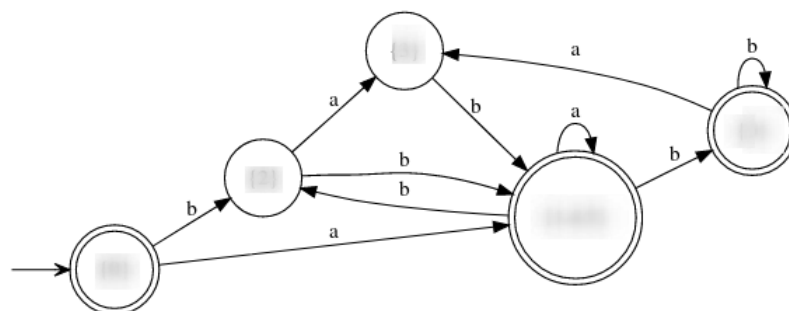
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ 4 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 2 ☐ f 5 ☐ g 6

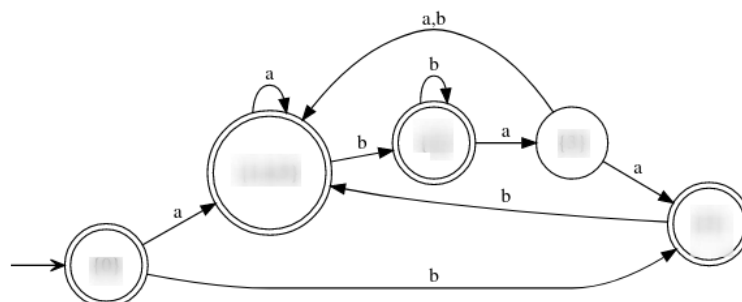
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

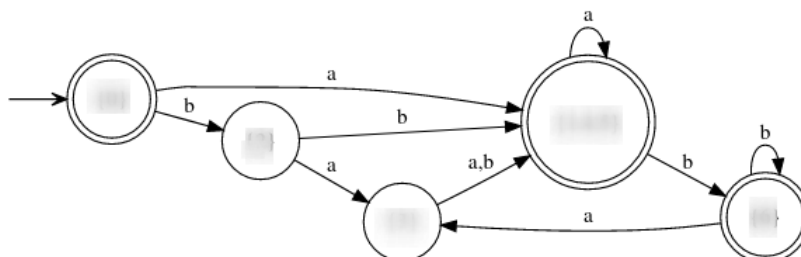
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



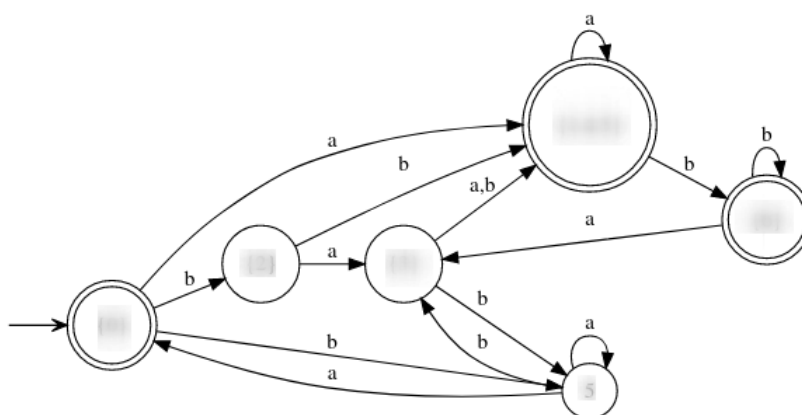
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

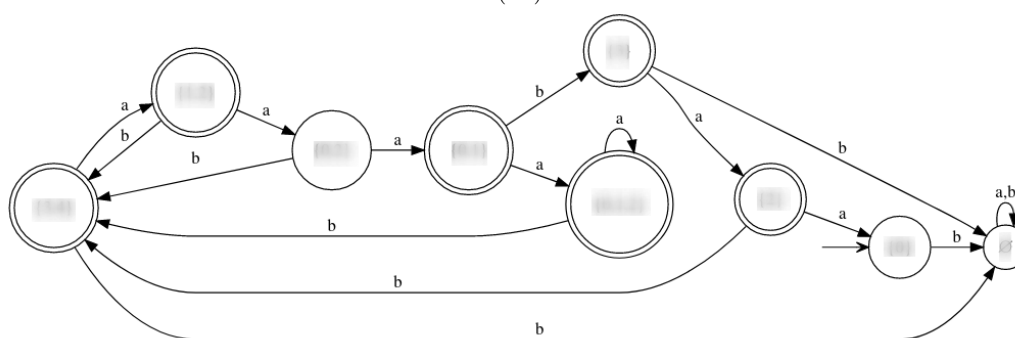
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



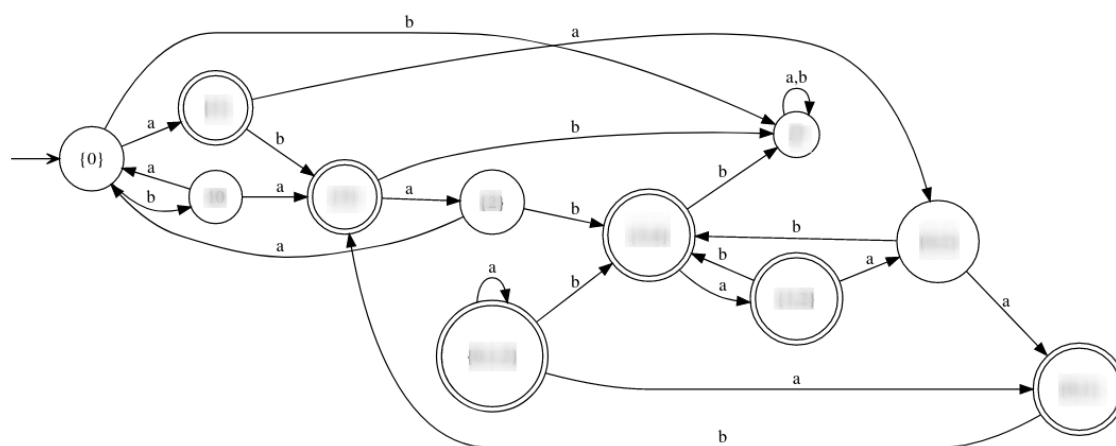
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 :  b c   f g  i j

Question 5 :   c  e f   j   m n

Question 6 : a b c   f g h i

Question 7 : a b c d 

Question 8 :   c    g h i j k

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b    f g h i  k l m

Question 12 : a  c d e f g h

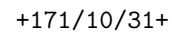
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten evenly spaced horizontal dotted lines across its width. The entire sheet is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot peut être vide.	☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Un mot possède une infinité d'extensions.
☐	Un mot peut être infini.	☐	Un mot possède une infinité de préfixe.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- a A n'a pas d'état accepteur. b A a au moins un état co-accessible.
c A a au moins un état non co-accessible. ■ A a au moins un état accessible.
■ A n'est pas complet. ■ u n'est pas accepté par A .
■ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
■ $u \notin \mathcal{L}(A)$. i A a au moins un état non accessible.
j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
 - $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 - A accepte le langage universel.
 - A possède un état puits
 - nécessairement $|Q| \geq 2$.
 - Tous les états de A sont accepteurs.
 - L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
 - Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
 - Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par suffixe. ☐ f Σ est fermé par préfixe.
- ☐ g Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

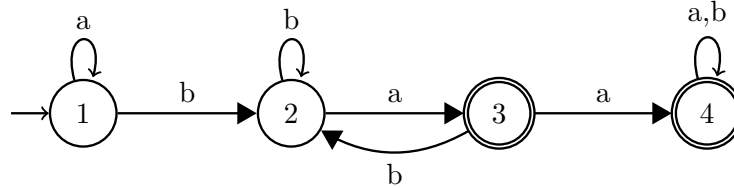
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

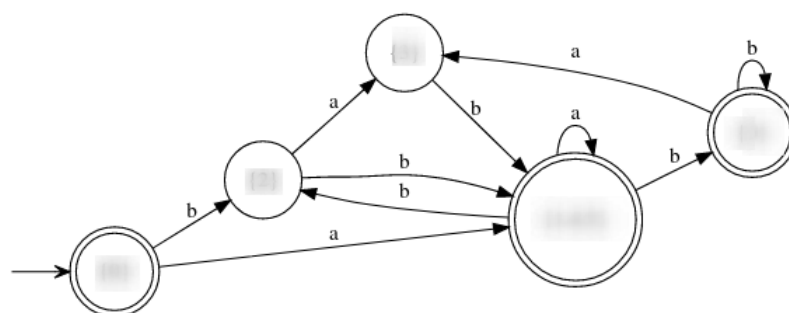
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 0 ☐ f 1 ☒ 4

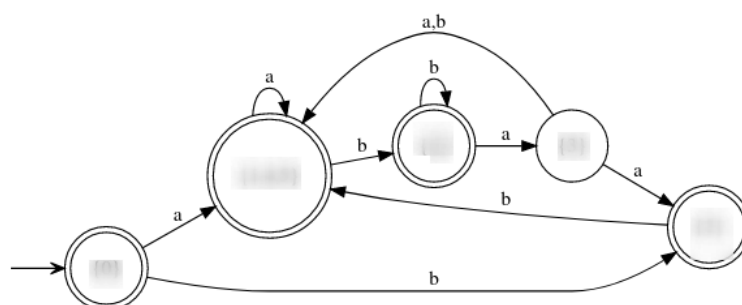
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

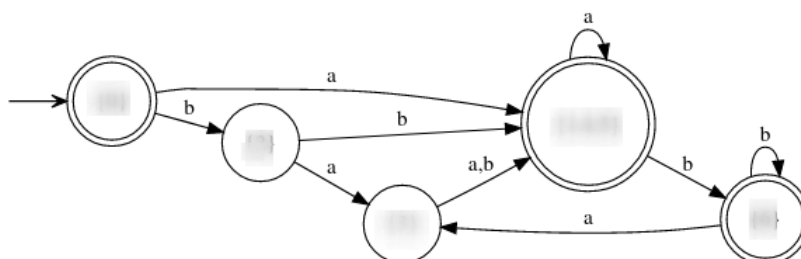
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



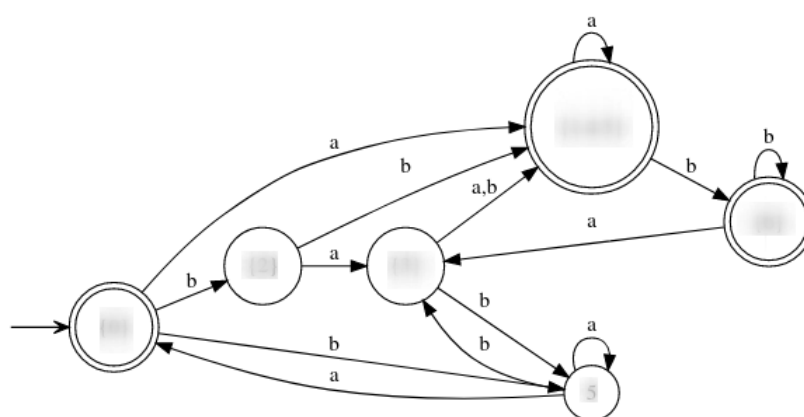
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

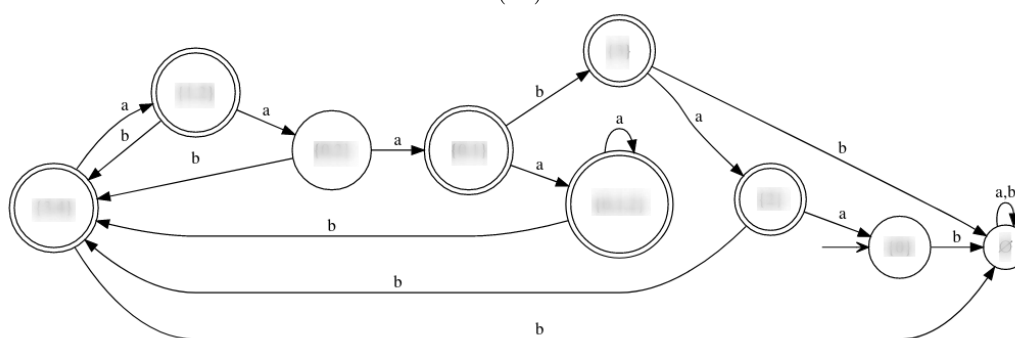
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



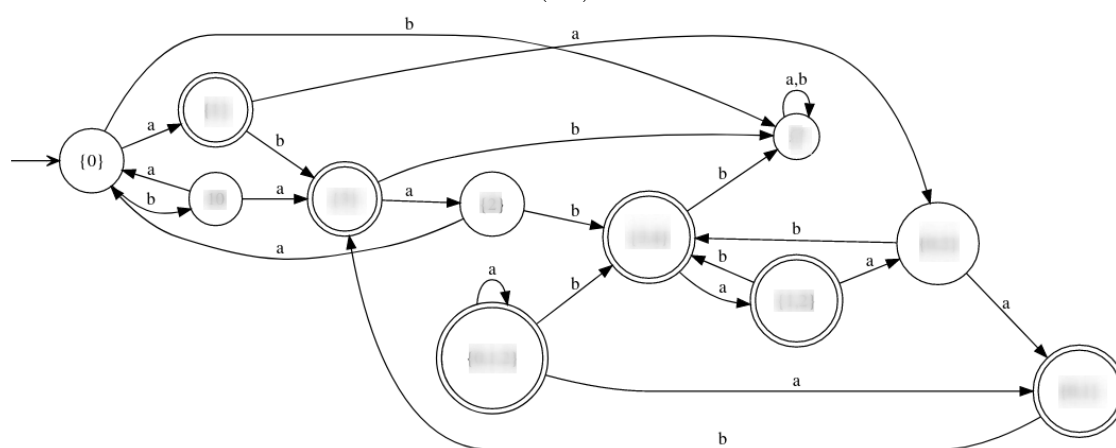
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

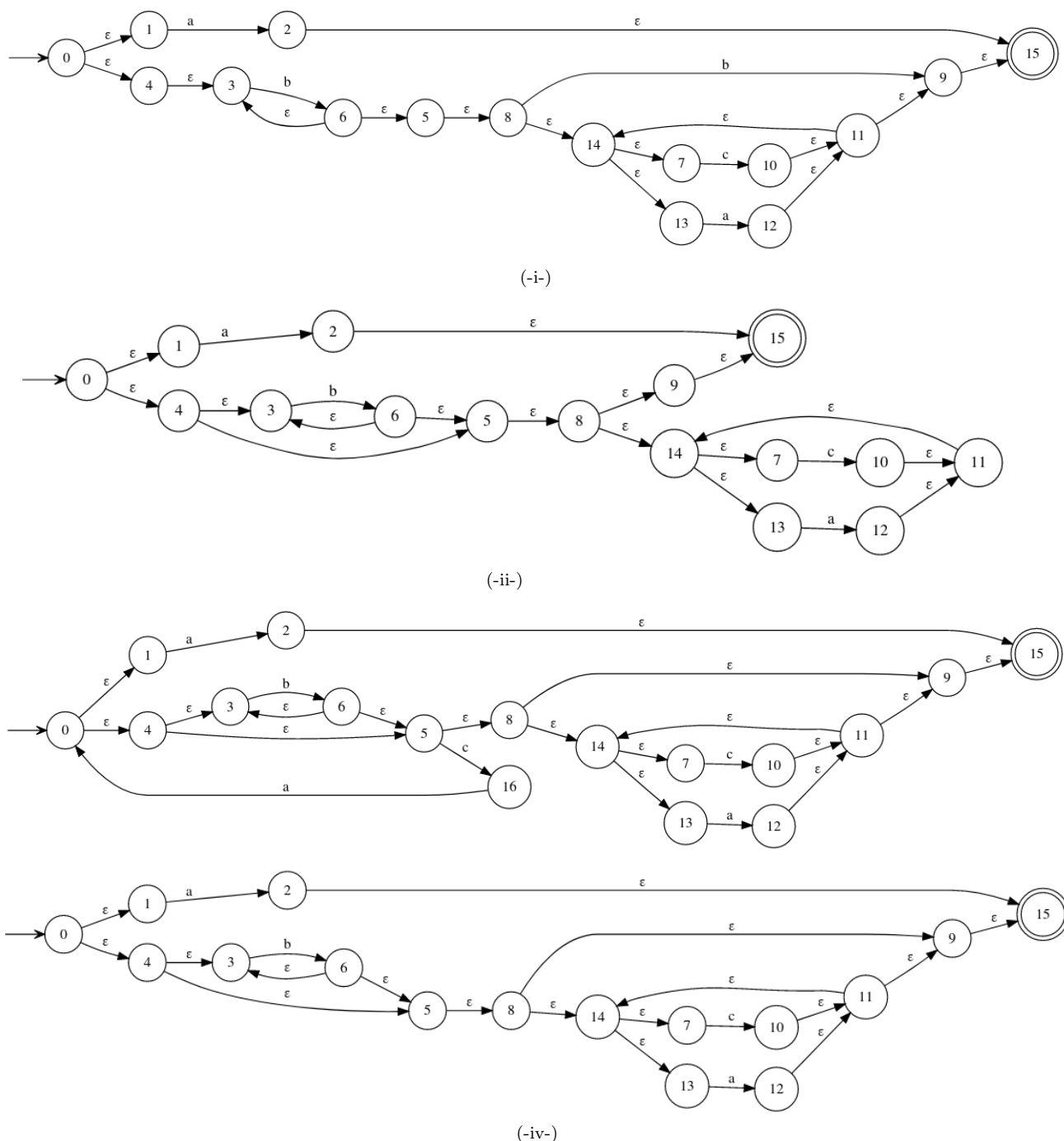


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d     i  k l m n

Question 3 : a b c     i j k

Question 4 :  b c d e f  h i

Question 5 : a b c d 

Question 6 :  b   e f g  i j

Question 7 :   c d e

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a  c d

Question 11 :  b  d e f g h   k l m

Question 12 : a  c d e f g h

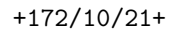
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ est fermé par facteur.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ^* est fermé par facteur.
☐ f Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ h Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ c Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot peut être vide.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ h Un mot est une application.

- ☐ i Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une fonction.
☐ k Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ b A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ g A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A est complet.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_1 = aX_1 + b$
☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a + b$
☒ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$
☐ $X_1 = a^*b$
☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☒ $X_2 = b^*aX_3$
☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒ $X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

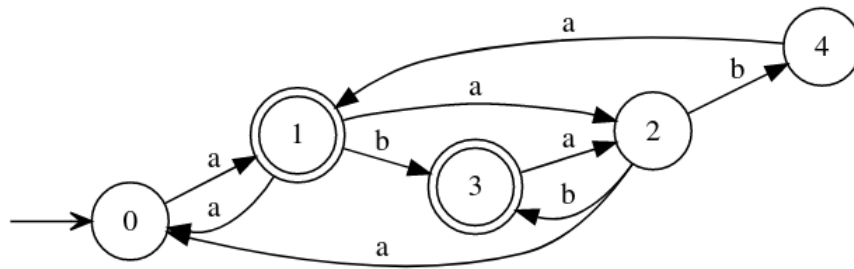
☒ celle trouvée pour X_1
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

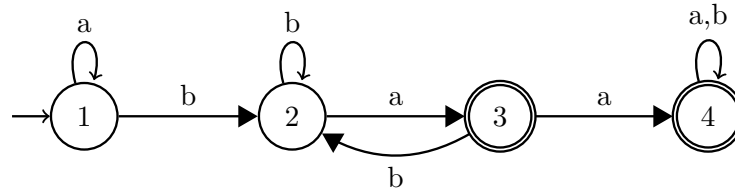
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

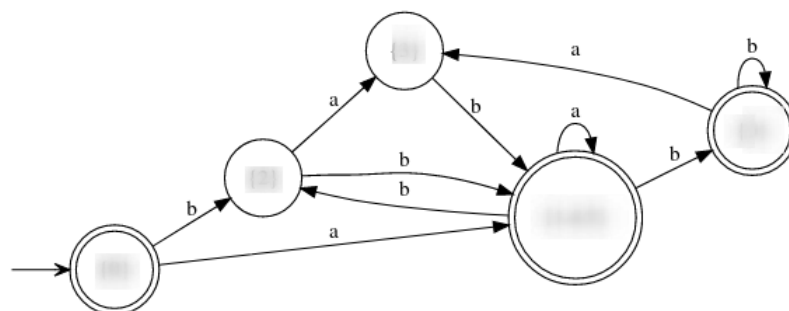
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 0

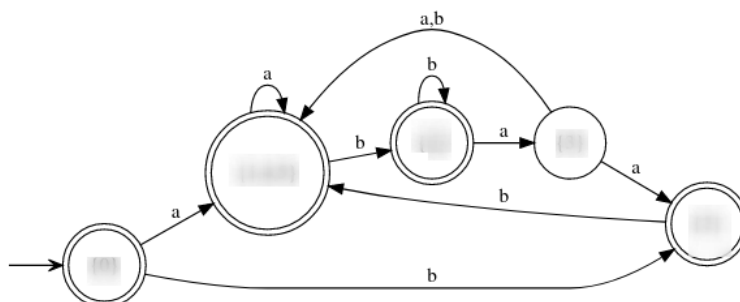
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

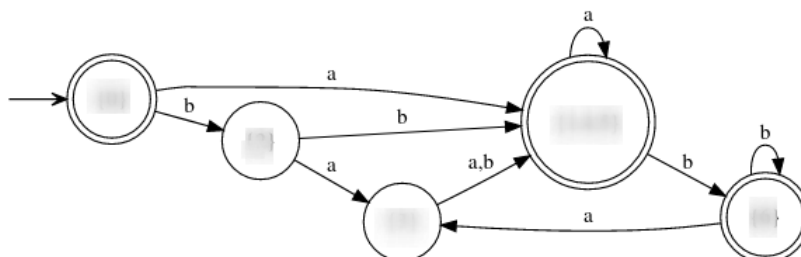
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



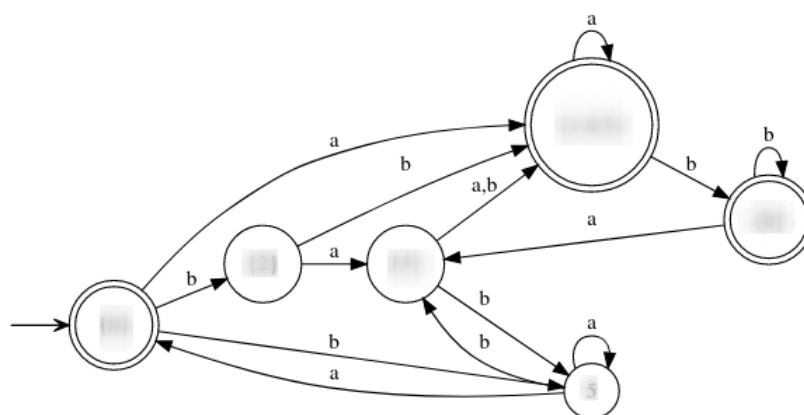
(-i-)



(-ii-)

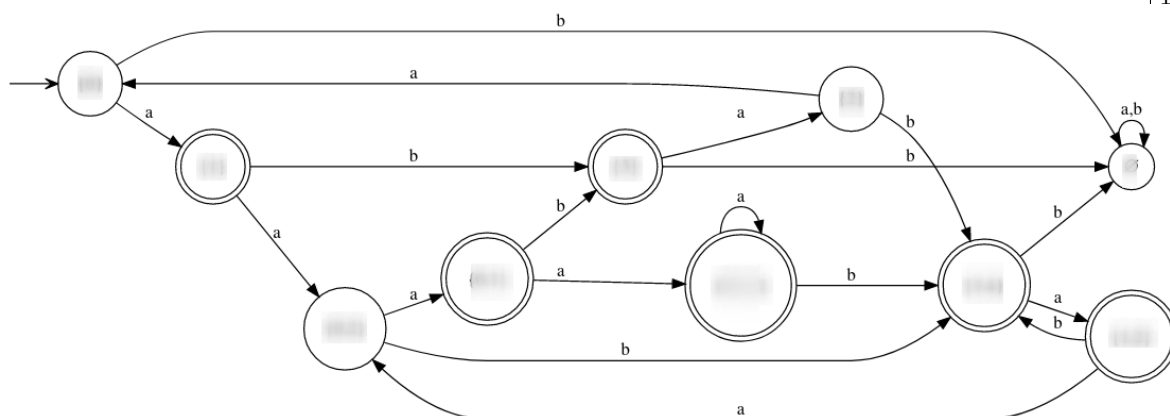


(-iii-)



(-iv-)

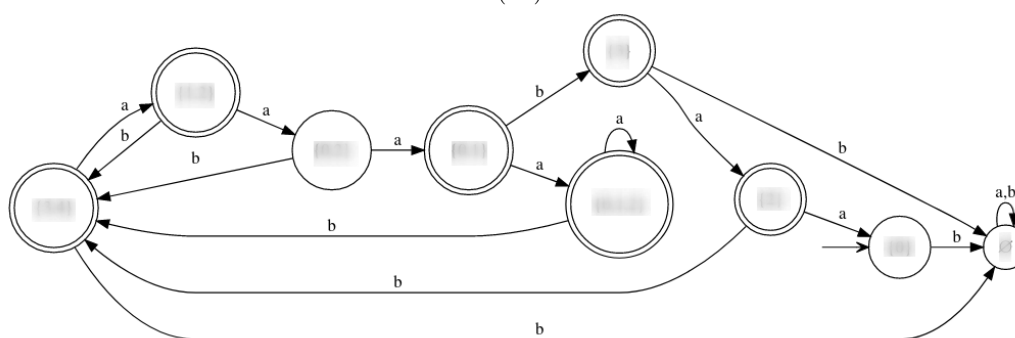
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

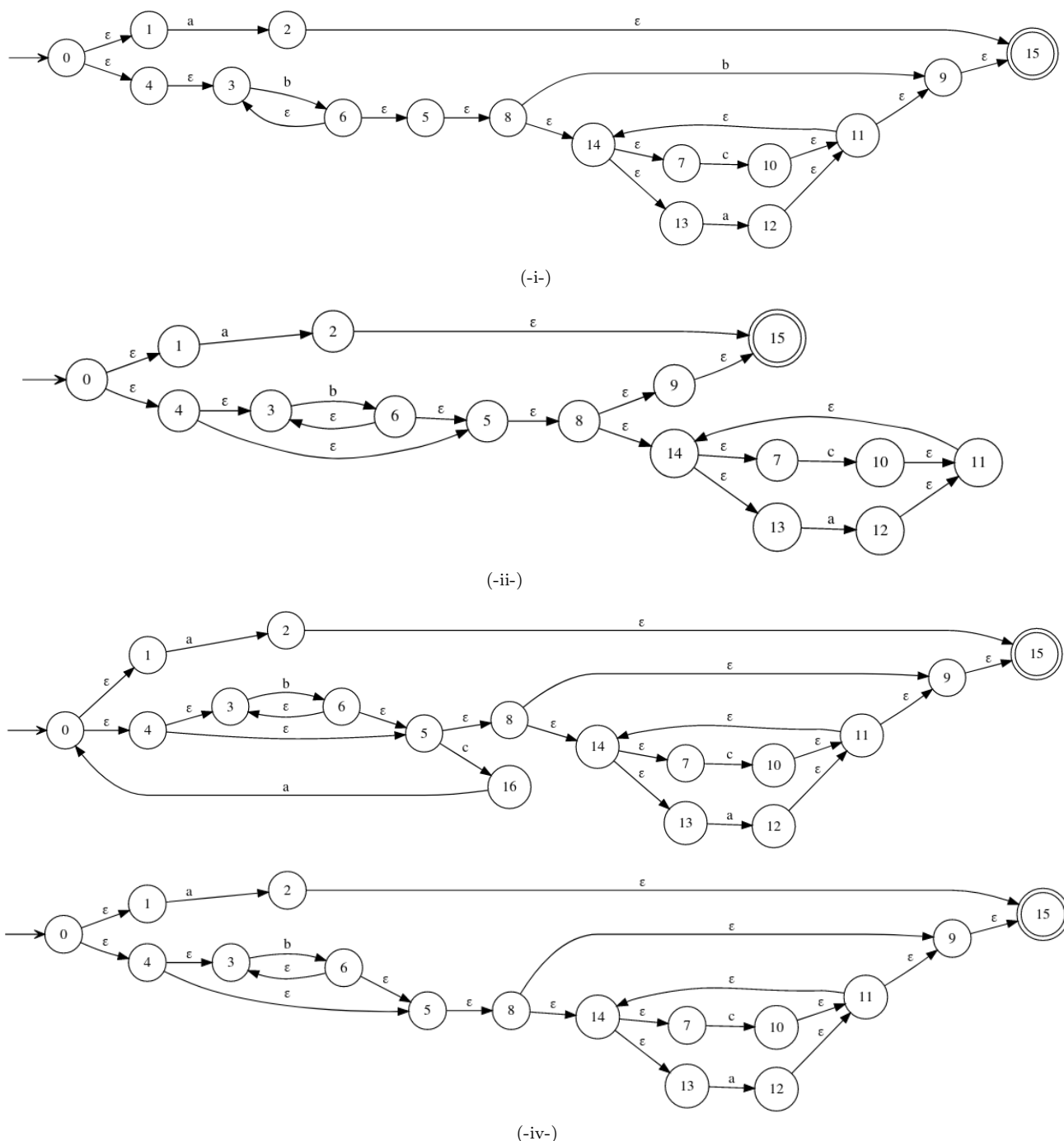


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 3 :

	b	c	d			g		i	j

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

				e		g		i		k		m	n

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

	b		d		f	g			j	k

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d	e		g	h	i	j			m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

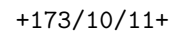
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ d A possède un état puits ☐ e A accepte le langage universel.

☐ f Tous les états de A sont accepteurs.

☐ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ b P est forcément déterministe.

☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ b Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ c A n'a pas d'état accepteur.

☐ d u n'est pas accepté par A .

☐ e A a au moins un état accessible.

☐ f A n'est pas complet.

☐ g A a au moins un état non co-accessible.

☐ h A a au moins un état non accessible.

☐ i A a au moins un état co-accessible.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ A est complet.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ u est accepté par A . ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

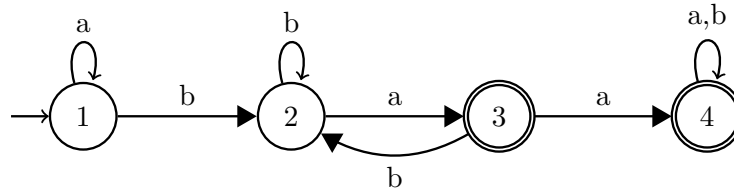
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

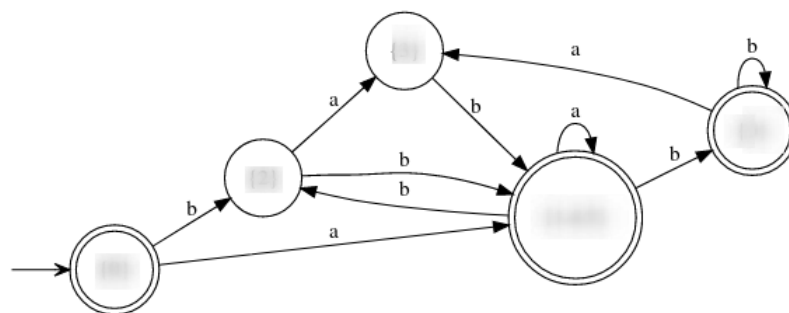
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 5 ☐ c 2 ☐ d 0 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 3

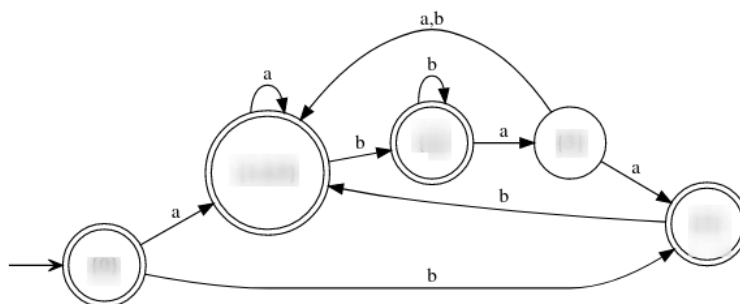
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

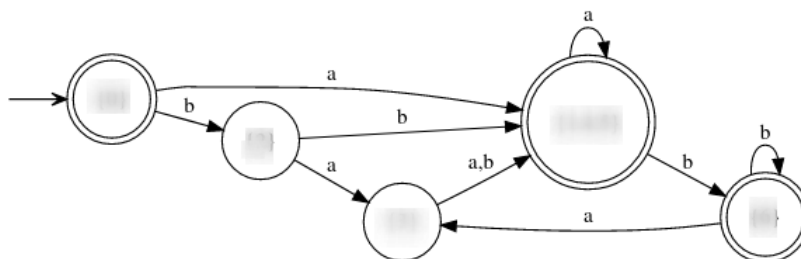
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



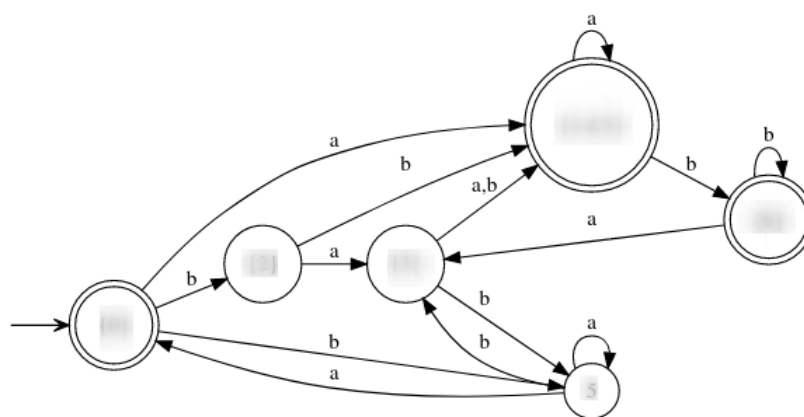
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

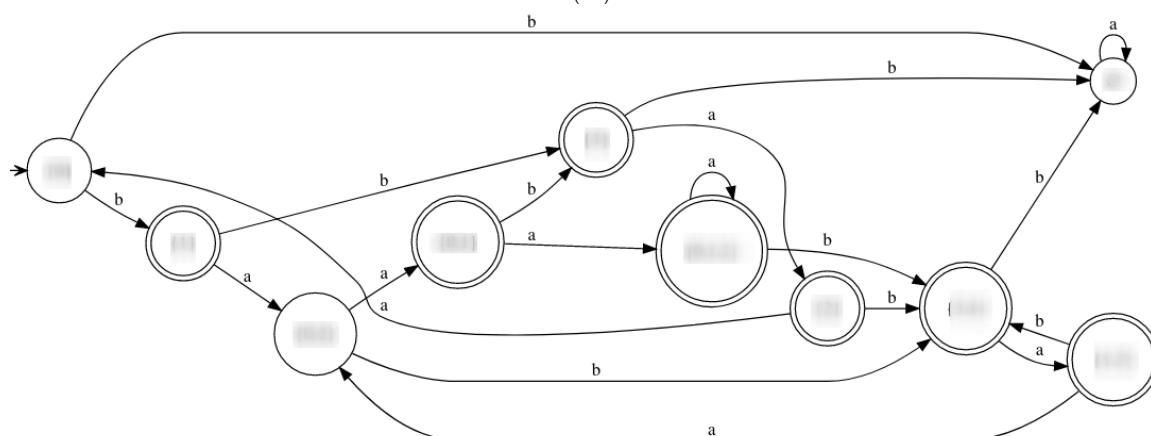


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

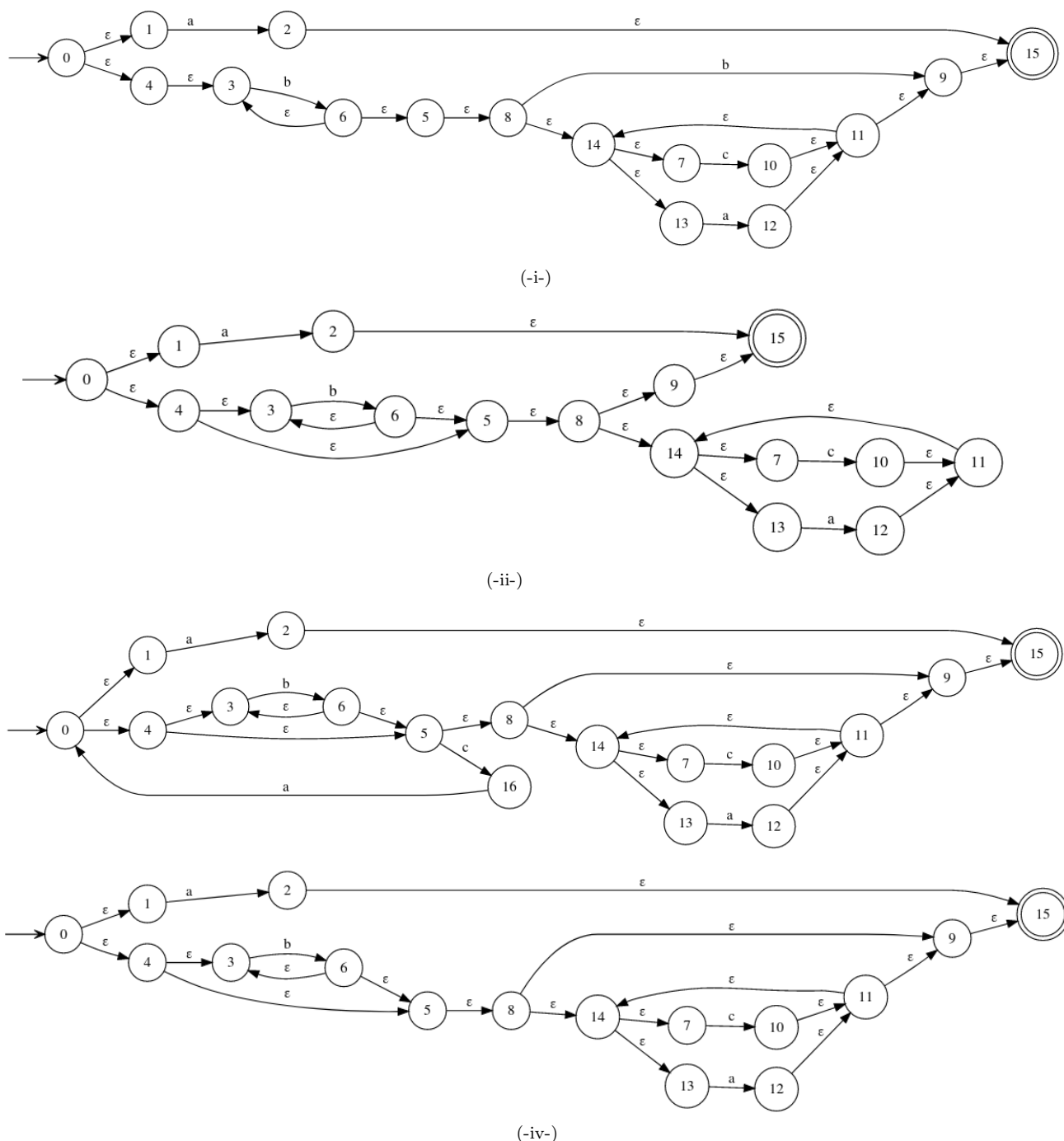


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

		c				g	h	i	j	k

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

a			d			g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

		c	d	e							l	m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a		c			f		h	i	j	k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

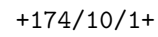
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe.
- ☐ b Σ est fermé par suffixe.
- ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ d A n'a pas d'état accepteur.

- ☐ e ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A.
☐ g ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ i ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c A possède un état puits ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ e A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A est complet.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une fonction.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

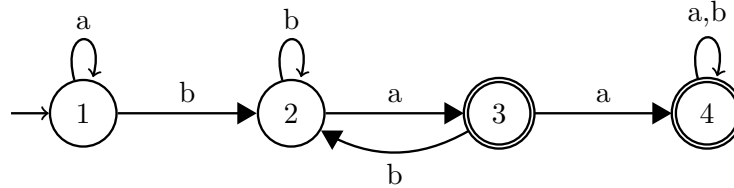
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

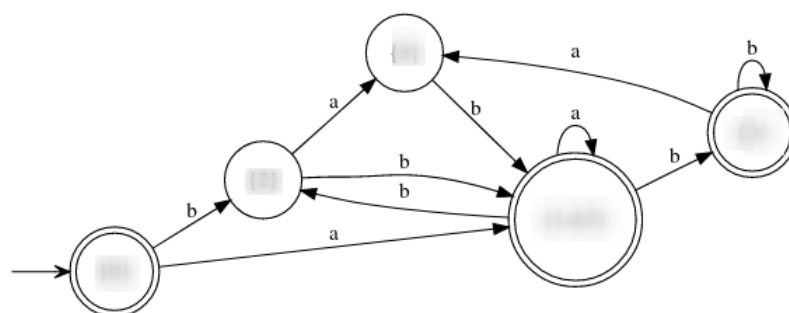
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ 4 ☐ c 1 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 0 ☐ g 6

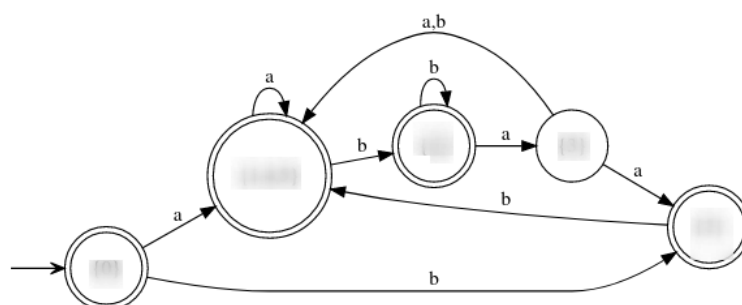
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

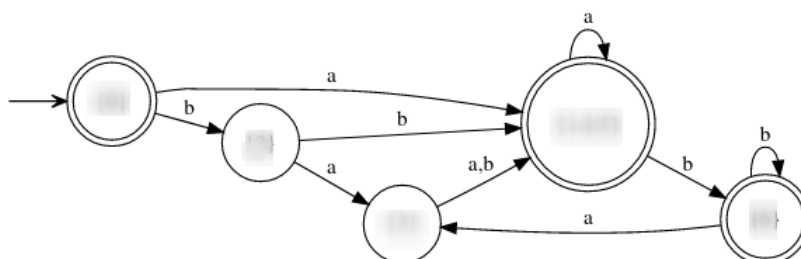
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



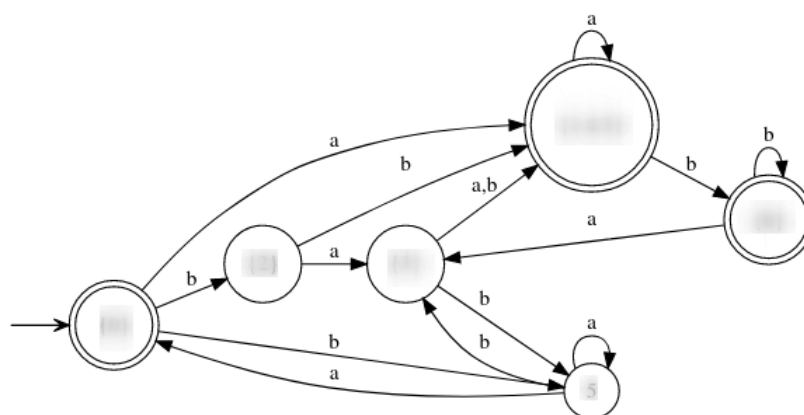
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

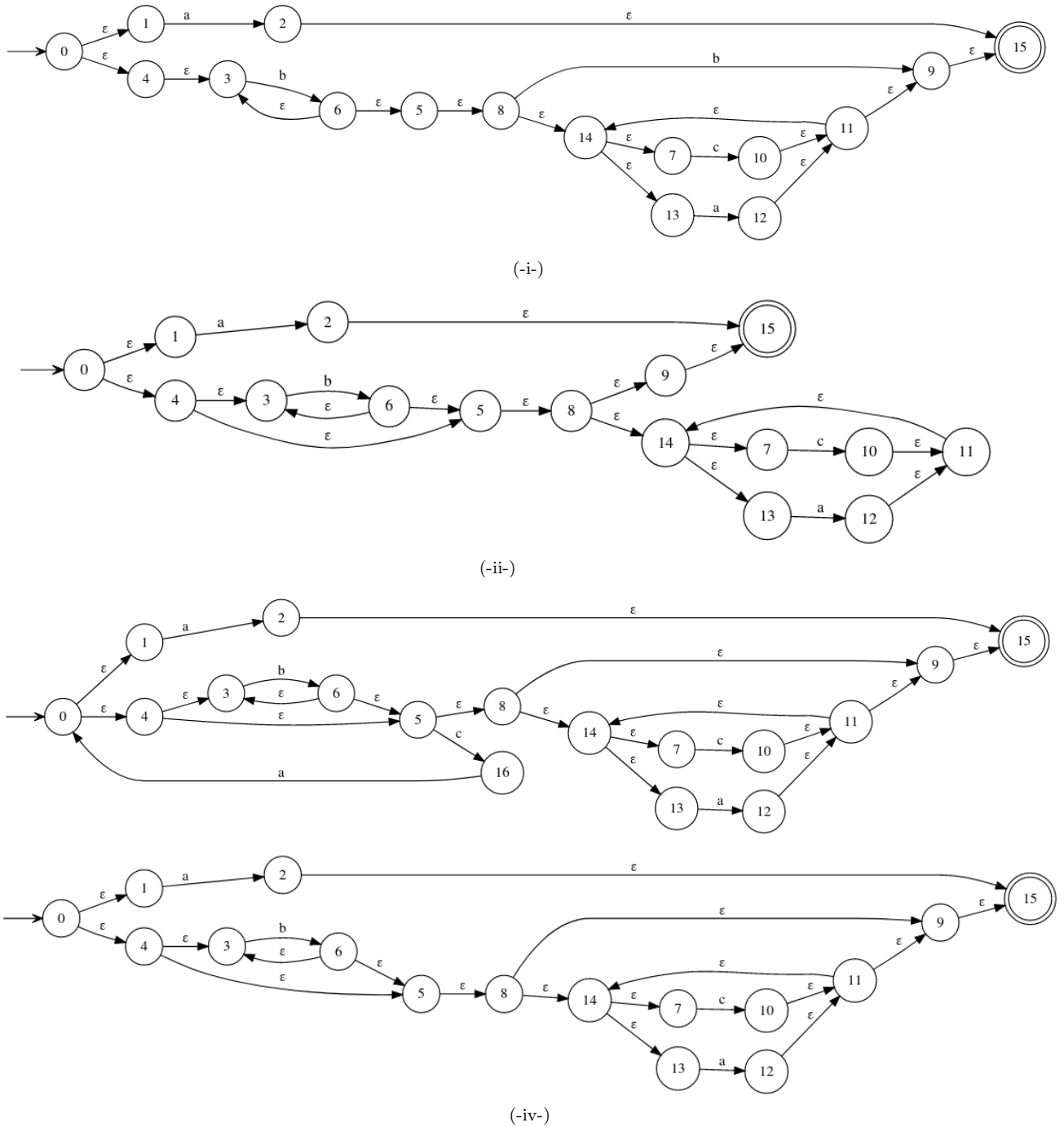


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c					h	i	j

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

			d	e		g		i	j	k

Question 6 :

	b	c	d	e		g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

	b	c						i	j			m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c		e	f	g	h				l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

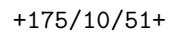
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A possède un état puits
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ b Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.
☐ e A est complet. ☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☒ c u n'est pas accepté par A .
☒ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ e A a au moins un état accessible. ☒ f $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ g A n'est pas complet.
☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

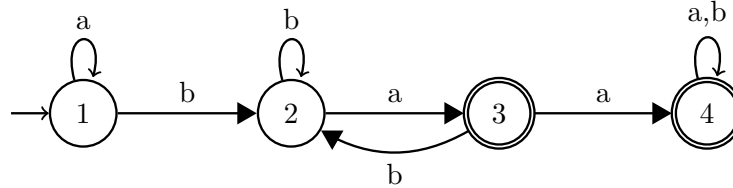
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

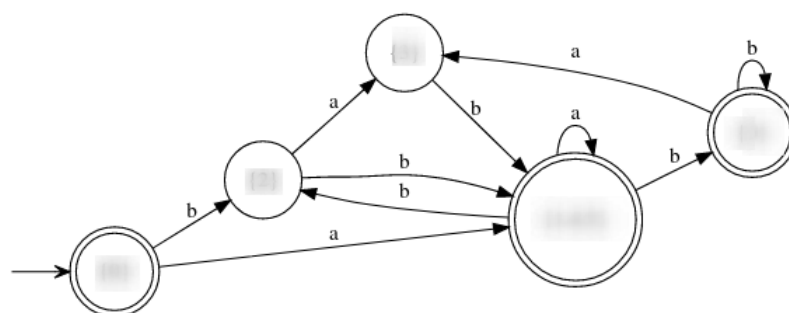
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 0 ☐ d 2 ☐ e 6 ☐ f 3 ☐ g 5

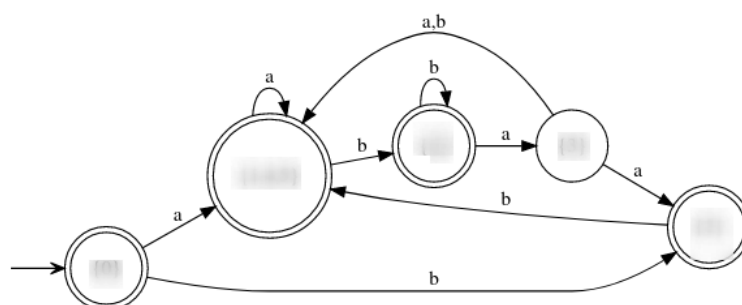
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

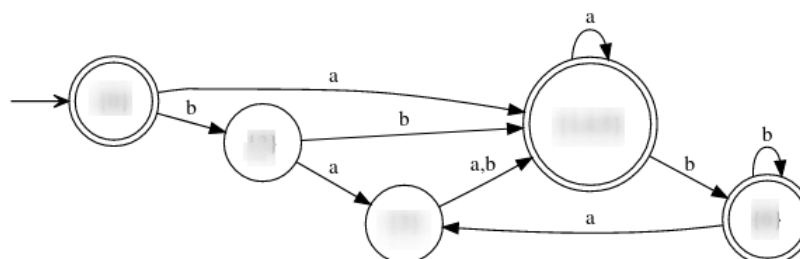
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



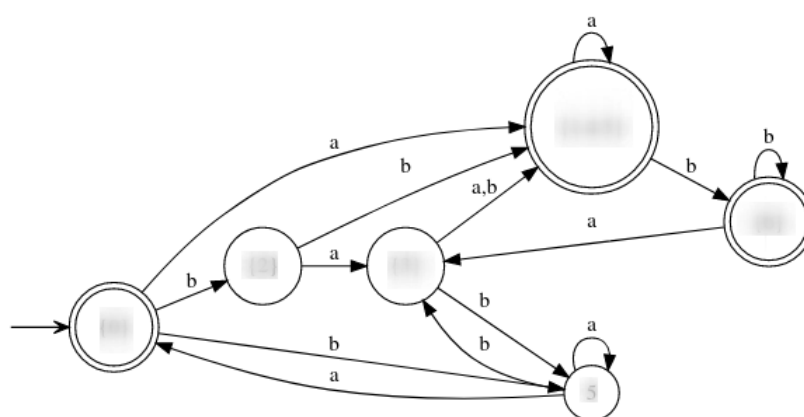
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



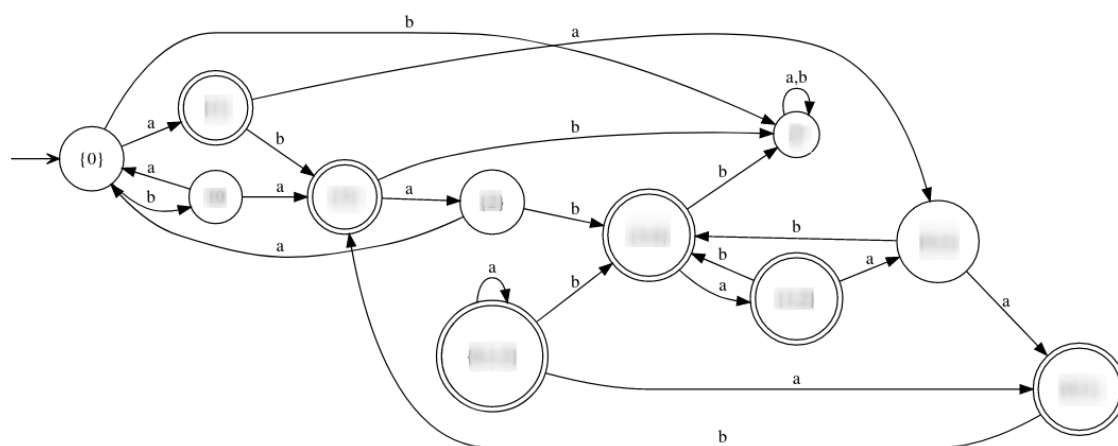
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

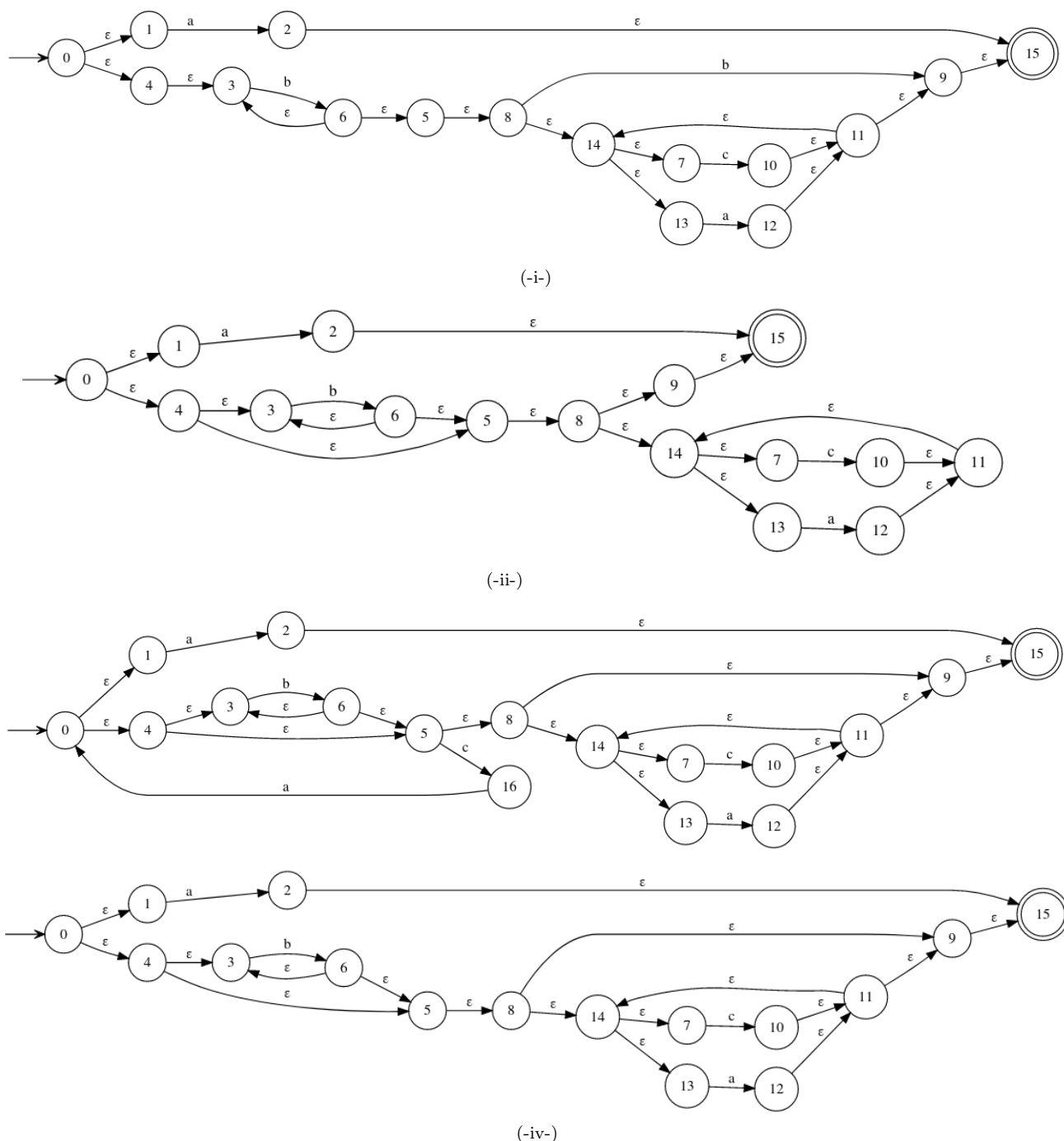


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d  f g h i

Question 3 :    d e  g h i j

Question 4 : a b   e f      m n

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a b     h i j k

Question 7 : a b c d 

Question 8 :  b  d e

Question 9 : a b  d e

Question 10 :  b c d

Question 11 :  b  d e f g h i j k  

Question 12 : a  c d e f g h

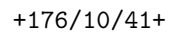
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ f A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

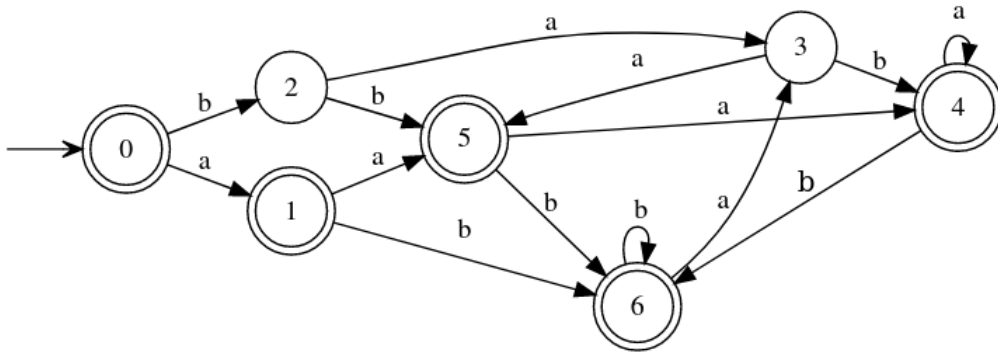
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

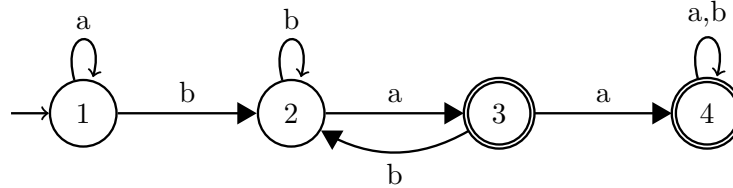
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

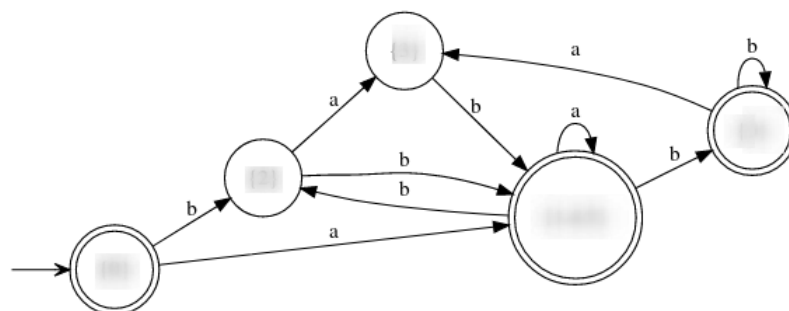
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☐ c 2 ☐ d 3 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 0

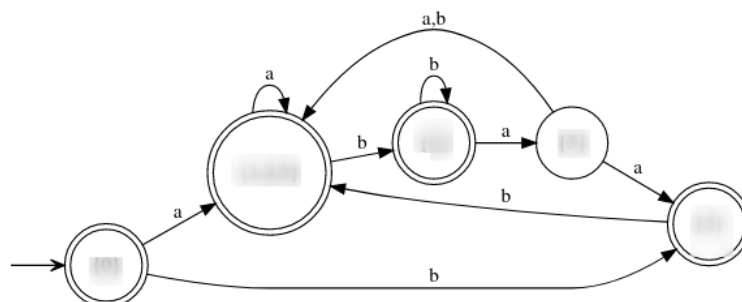
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

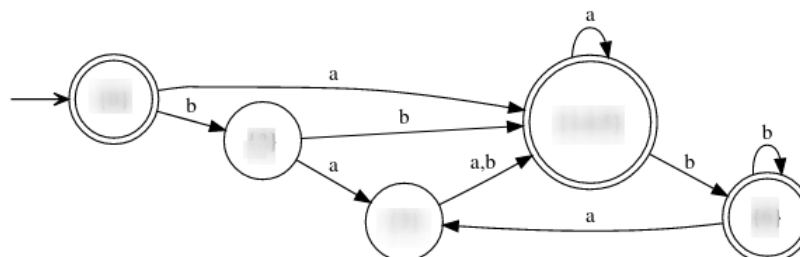
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



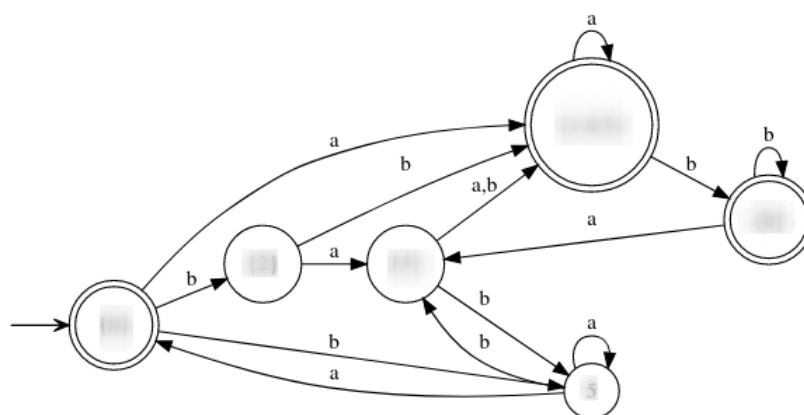
(-i-)



(-ii-)

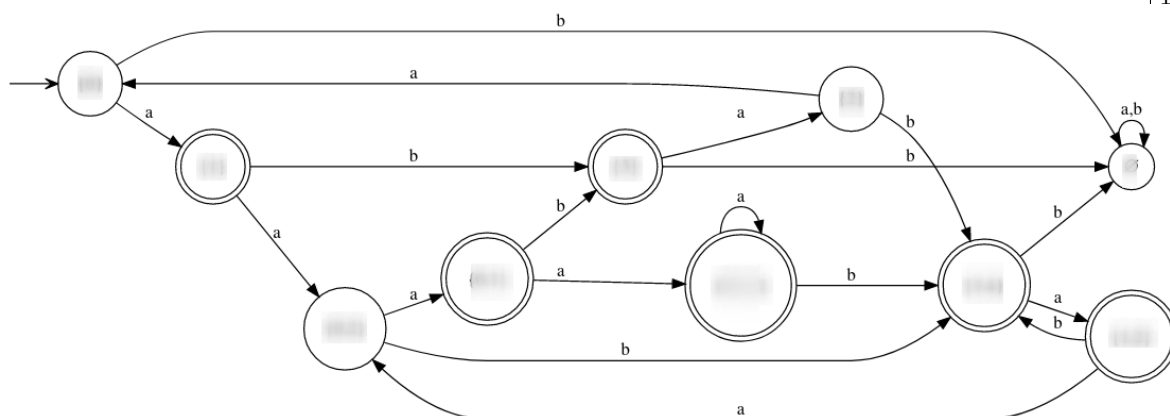


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e f g h i

Question 3 :  b c    g  i   m n

Question 4 :  b c d   h i j

Question 5 :  b  d e

Question 6 : a   d e f   j k

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a b   e f g  i j k  m

Question 12 : a b c d  f g h

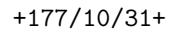
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
- ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d A est complet.
- ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ b A n'est pas complet.
- ☒ c $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ e A a au moins un état accessible.
- ☐ f A a au moins un état non accessible.
- ☒ g u n'est pas accepté par A .
- ☐ h A a au moins un état co-accessible.
- ☒ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ c A accepte le langage universel. ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
☐ e A possède un état puits ☐ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ b P est forcément déterministe.
☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Σ^* est fermé par facteur.
☐ f Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être vide. ☐ b Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ c Un mot est une application. ☐ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot est une fonction. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot peut être infini.
☐ i Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ j Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iii- ☐ b la Figure 3-iv- ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii- ☐ b la Figure 4-i- ☐ c la Figure 4-ii- ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

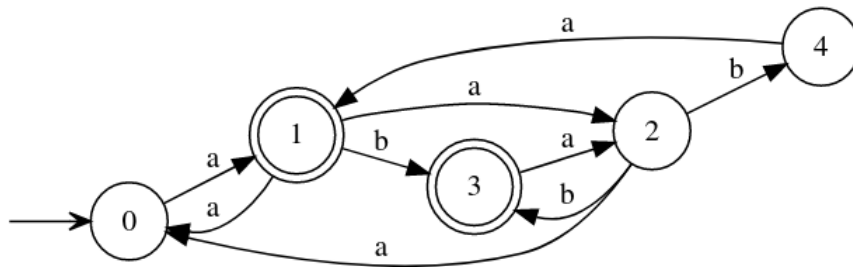
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

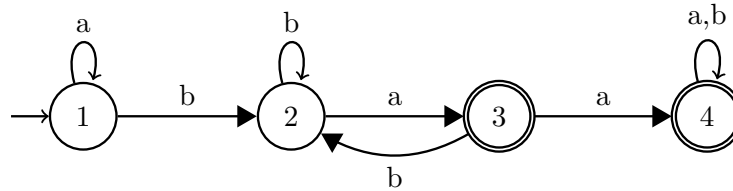
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

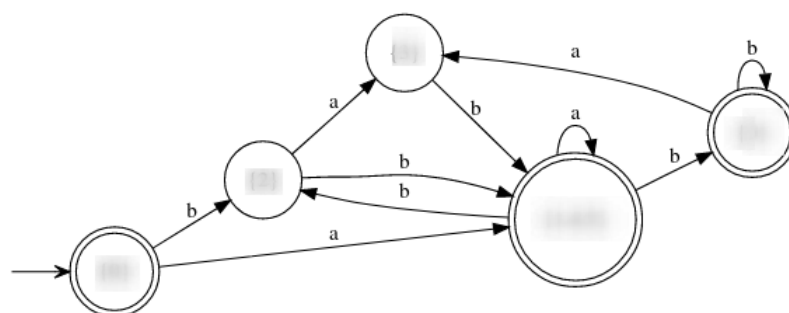
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 2 ☐ c 0 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 3

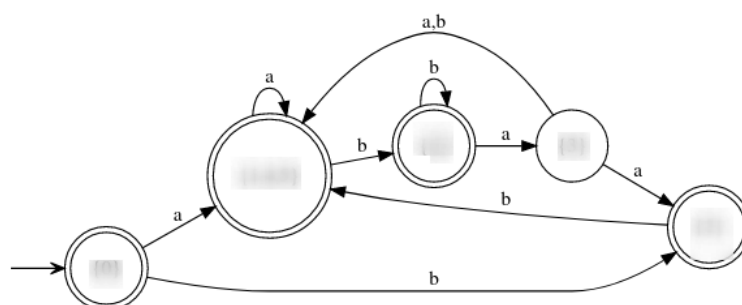
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

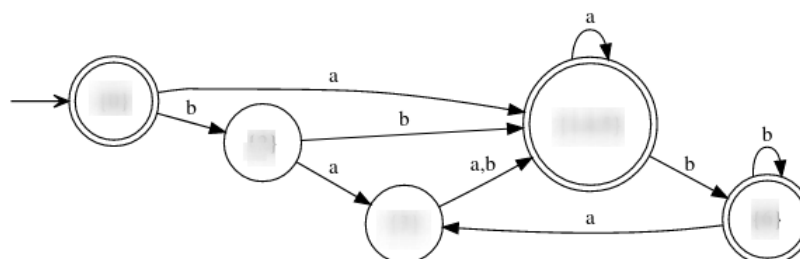
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



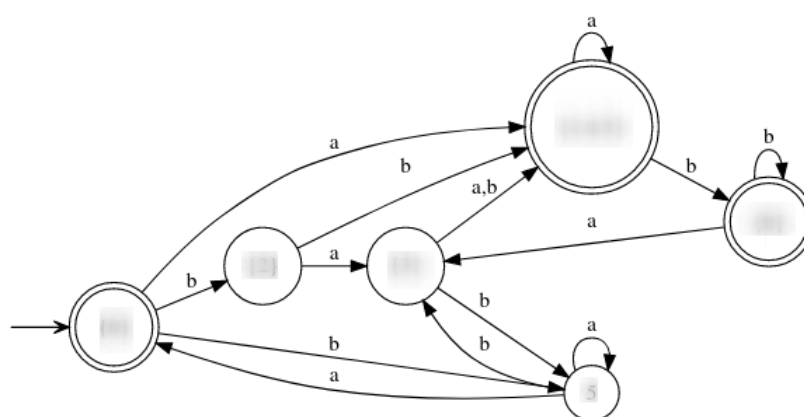
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

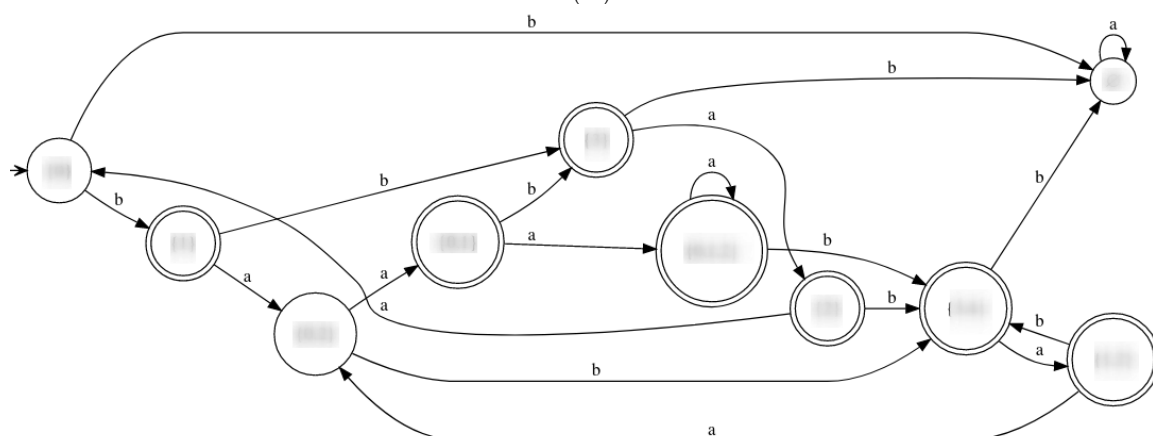


(-iv-)

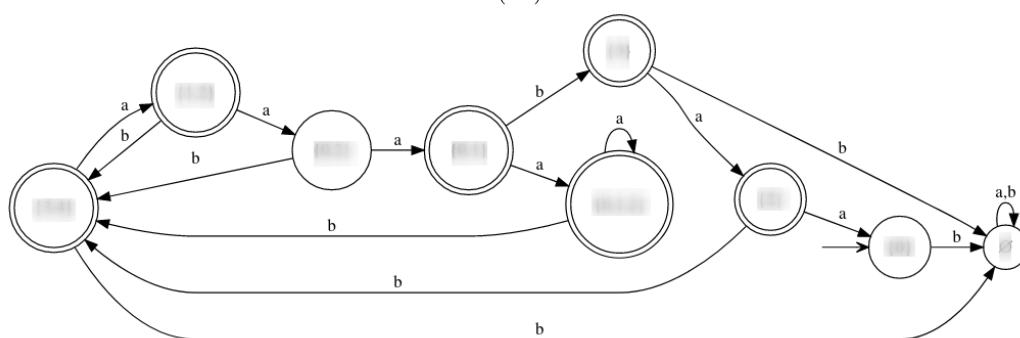
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



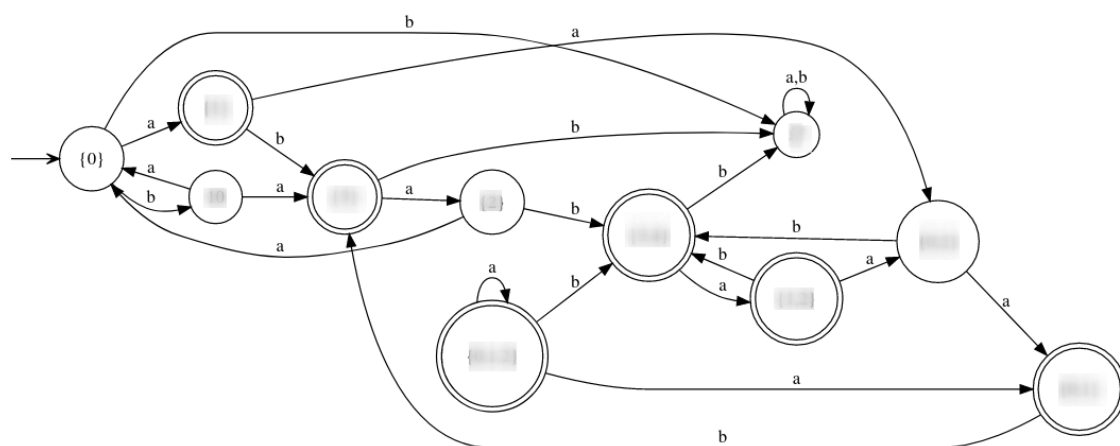
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

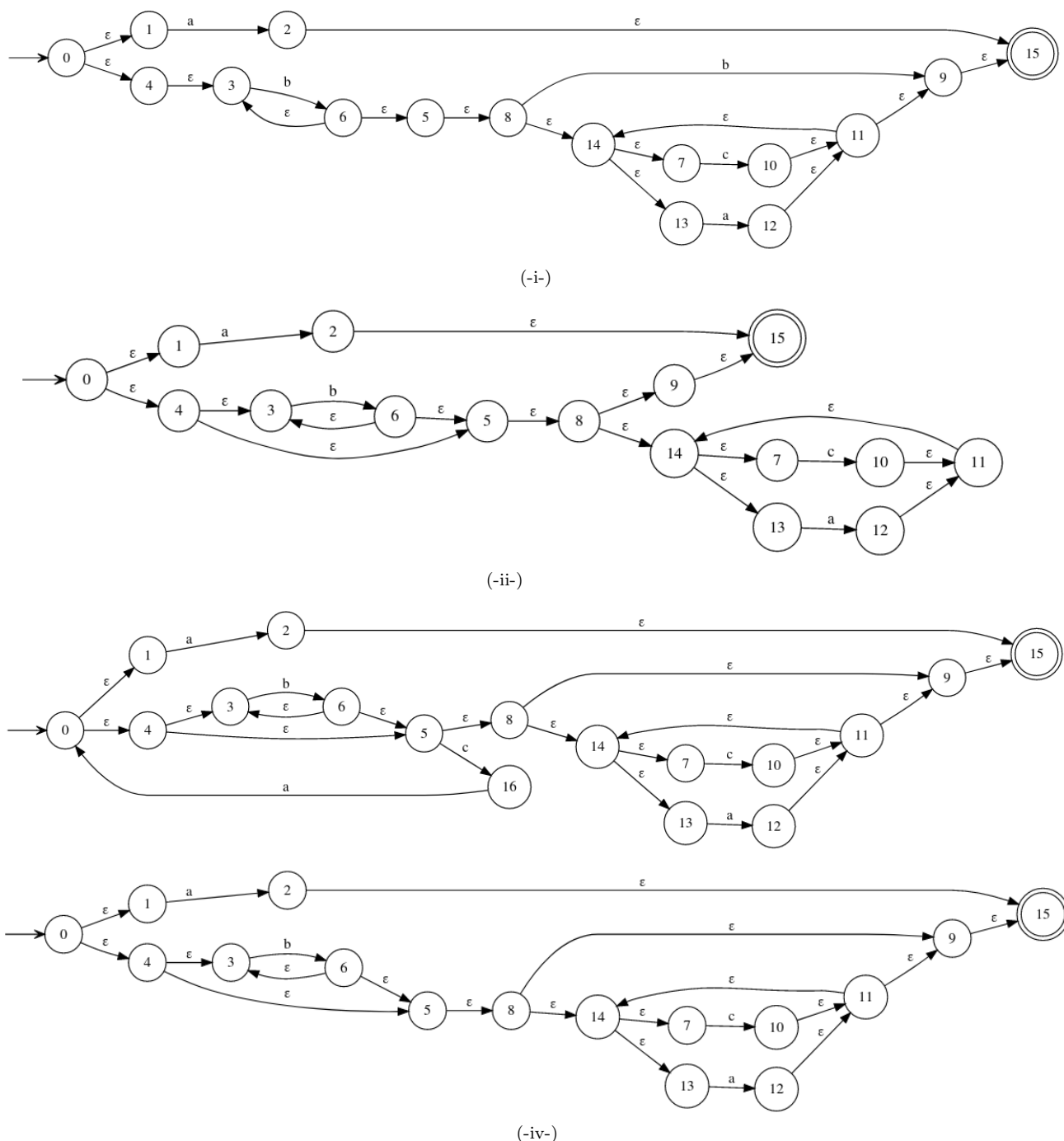


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a			d		f		h		j	k

Question 5 :

a		c	d	e		g	h	i

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

a	b	c	d					i	j

Question 8 :

					f	g	h			k		m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c		e	f	g	h				l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

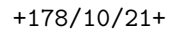
	b	c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of primary-ruled paper. It features ten horizontal rows, each designed for handwriting practice. Each row is defined by three lines: a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line. The entire page is enclosed within a double-line border.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles.
 ☐ b A a des états accepteurs.
 ☐ c u est accepté par A .
 ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
 ☐ f A est complet.
 ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
 ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
 ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
 ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
 ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
 ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
 ☒ b P est forcément déterministe.
 ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
 ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
 ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
 ☐ c A possède un état puits
 ☒ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
 ☐ e A accepte le langage universel.
 ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.

$$|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|.$$

- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ d Un mot peut être infini.
☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une application.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot est une fonction. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ g Σ est fermé par suffixe.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état accessible. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

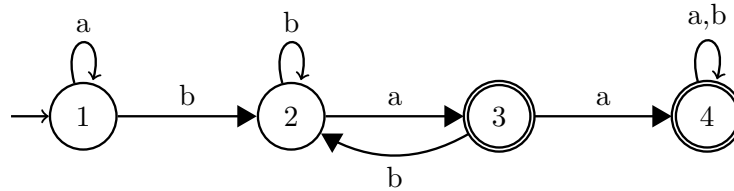
☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

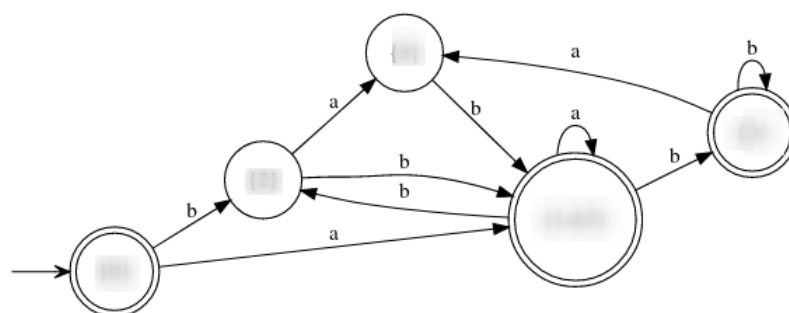
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 3

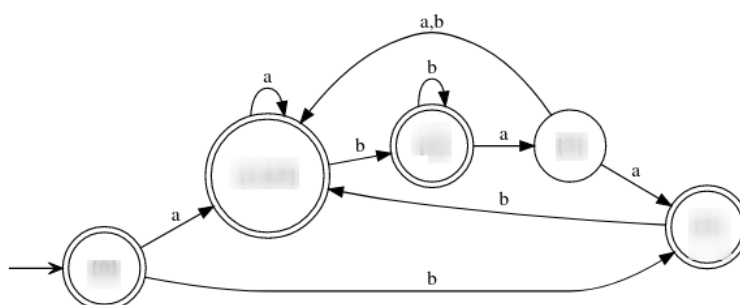
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

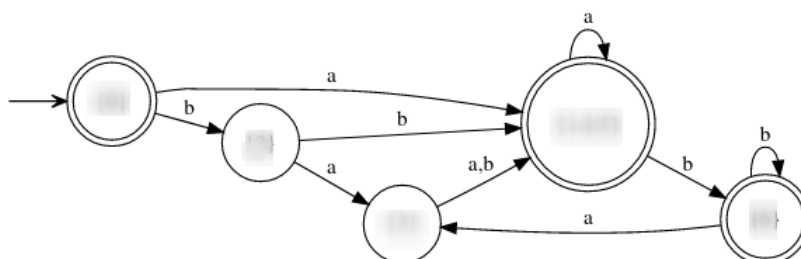
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



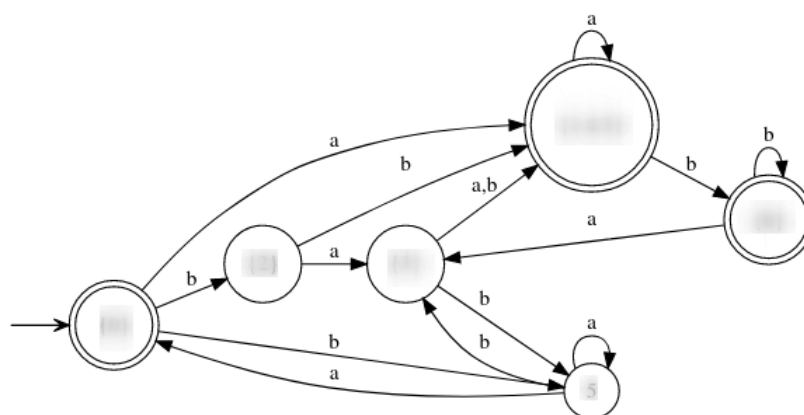
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 6 :

	b		d	e							l	m	n

Question 7 :

a		c				g	h	i	j

Question 8 :

	b	c					h	i	j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d		f	g	h	i	j		l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

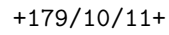
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot peut être vide.	☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une fonction.	☐ Un mot est une application.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.	☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.	
☐ nécessairement $ Q \geq 2$.	☐ $ \delta = Q \times \Sigma $.
☐ A accepte le langage universel.	☐ A possède un état puits
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.	

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- | |
|---|
| ☐ $ Q_P \leq Q_A \times Q_B $. |
| ☐ P est forcément déterministe. |
| ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible. |
| ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes. |
| ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte. |

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b A a des états accepteurs.
☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ A a au moins un état accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état non accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☒ A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_1 = aX_1 + b$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☒ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$ ☐ d $X_4 = a + b$
☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ f $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ g $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ h $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ j $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ k $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ l $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ m $X_2 = bX_3 + aX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ b $X_4 = a^* + b^*$ ☒ $X_4 = (a+b)^*$ ☐ d $X_4 = a + b$
☐ e $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ f $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ b $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ b $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ c $X_3 = a(a+b)^*$
☐ d $X_3 = (a(a+b)^*)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☒ celle trouvée pour X_1 ☐ b celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

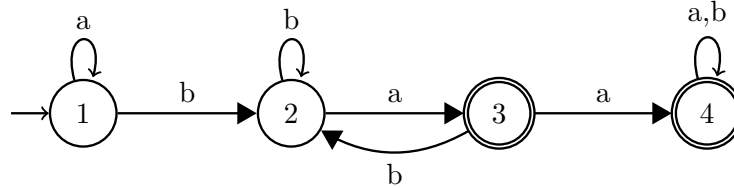
- ☐ a $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$ ☐ b $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

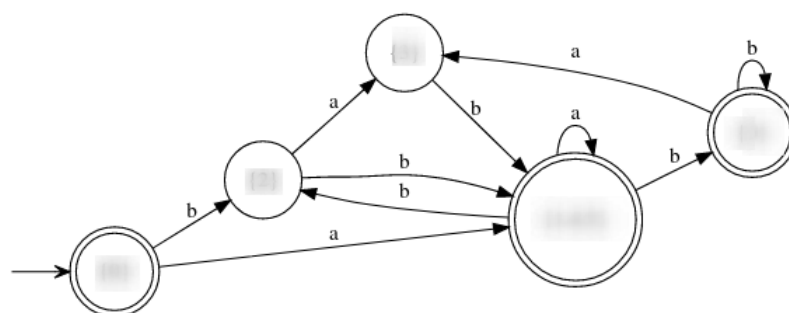
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 5 ☒ 4

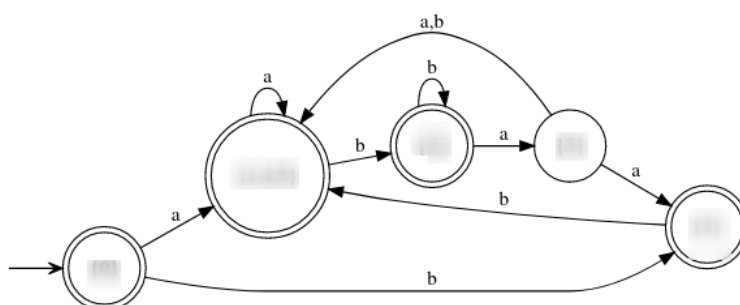
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

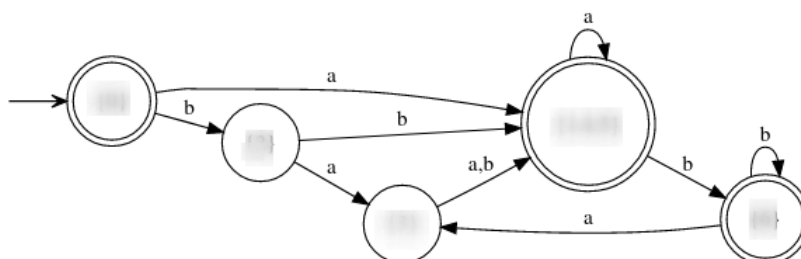
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



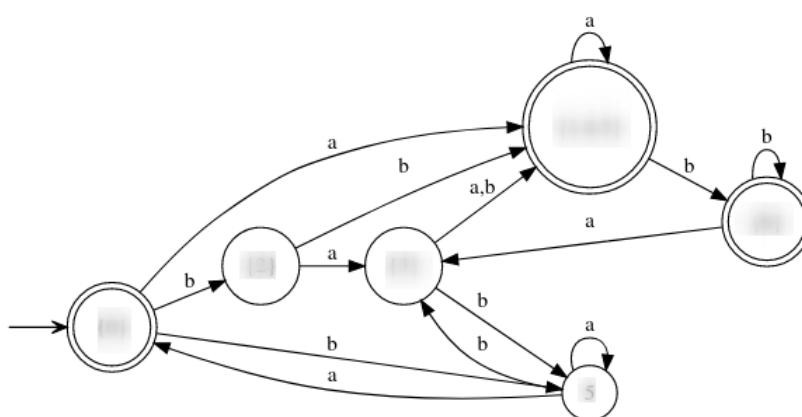
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

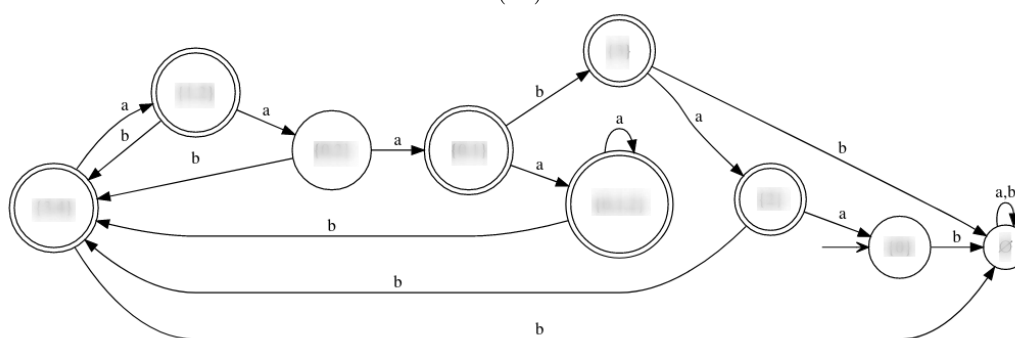
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



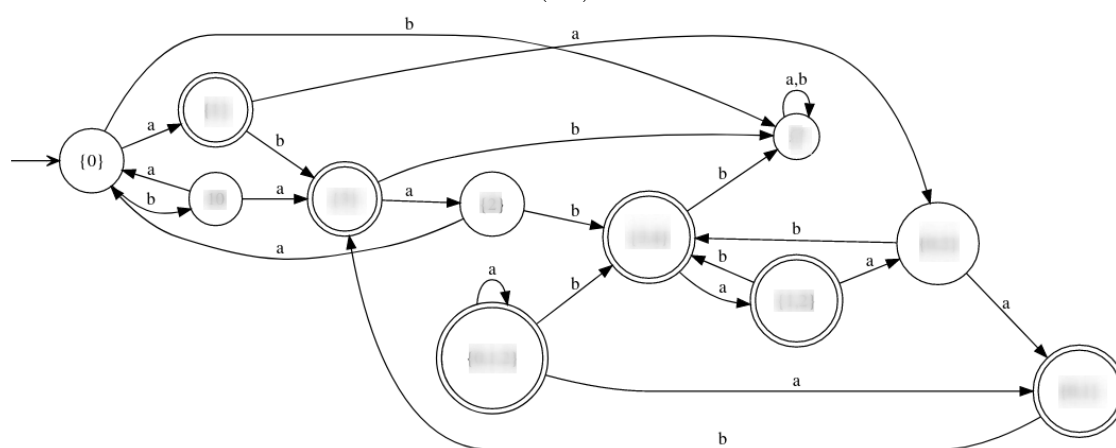
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

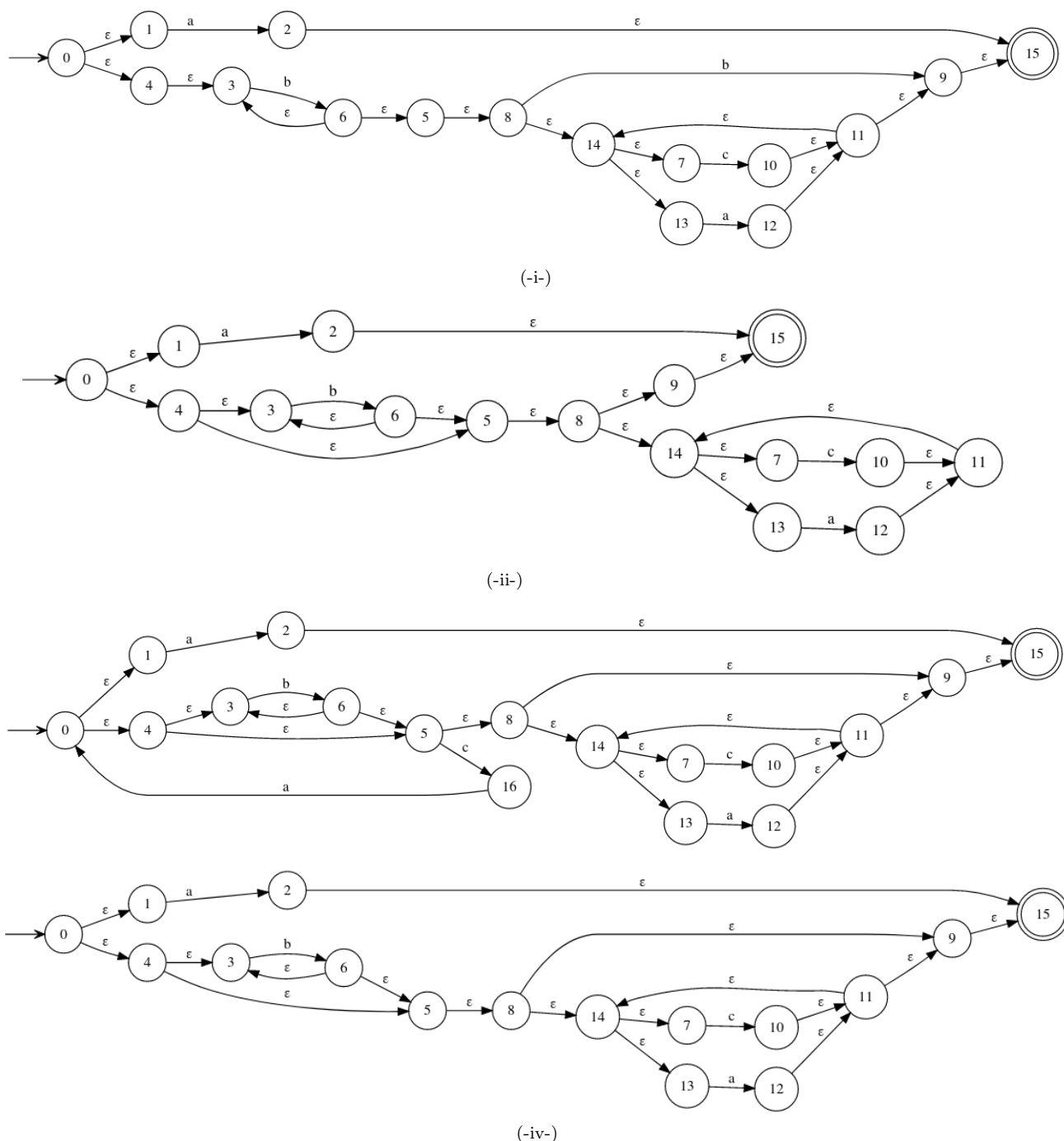


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐

Question 7 : ☐ b ☐ ☐ d ☐ ☐ f ☐ ☐ h ☐ ☐ j ☐ k

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐

Question 9 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ ☐ ☐ d ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

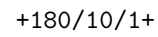
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ ☐ b

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☒ c Σ^* est fermé par suffixe.
☒ d Σ^* est fermé par préfixe. ☒ e Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☒ b u n'est pas accepté par A .
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☒ d A n'est pas complet.
☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☒ f A a au moins un état accessible.
☒ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ h $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ b Un mot est une application.
☒ c Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ d Un mot est une fonction.
☒ e Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

- ☐ g Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut être vide.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ P est forcément déterministe.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b A possède un état puits ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

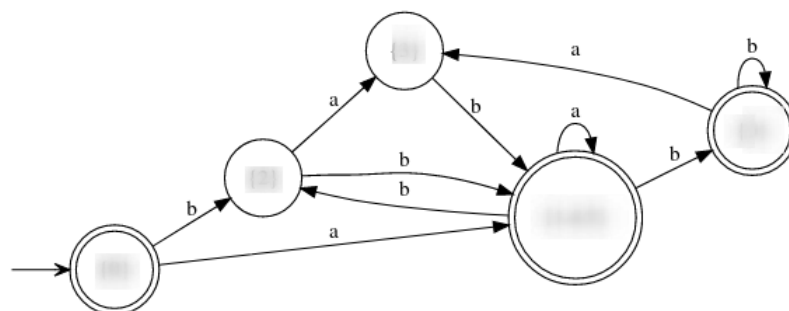
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☐ c 2 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 3 ☐ g 5

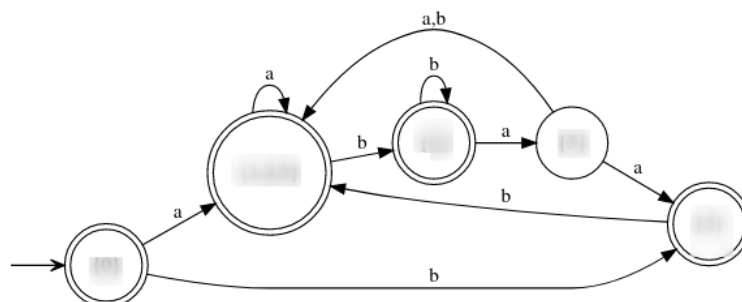
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

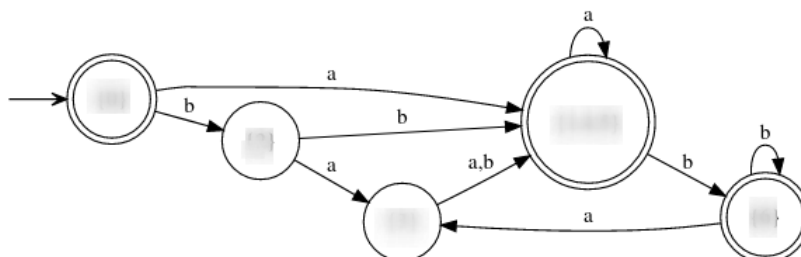
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



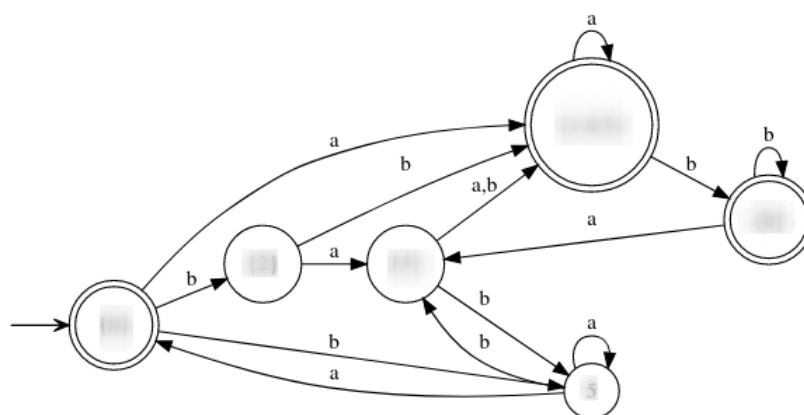
(-i-)



(-ii-)

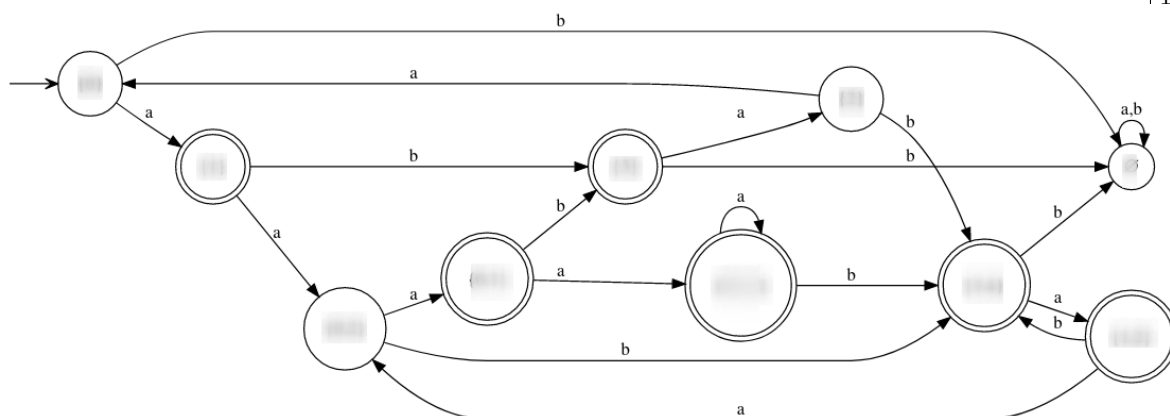


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b				f	g	h	i	j

Question 4 :

a		c		e				i	j	k

Question 5 :

a						g		i	j			m	n

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

		c		e	f	g	h	i	j	k		m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

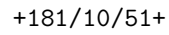
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot est une application. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A possède un état puits ☐ A accepte le langage universel.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ A a des états accepteurs.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ A est complet.

☐ u est accepté par A .

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ A a au moins un état accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A n'est pas complet.

☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ u n'est pas accepté par A .

☐ A a au moins un état non accessible.

☐ A a au moins un état non co-accessible.

☐ A a au moins un état co-accessible.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iv-.

☐ la Figure 3-ii-.

☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-i-.

☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-iv-.

☐ la Figure 4-ii-.

☐ la Figure 4-iii-.

☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

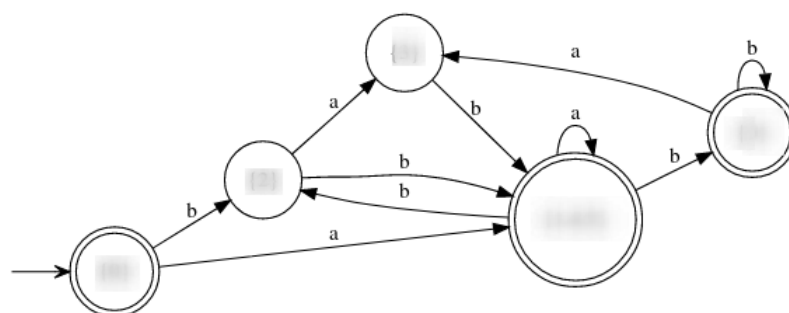
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 2

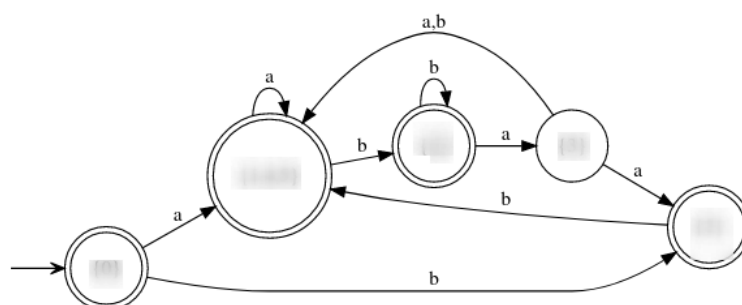
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

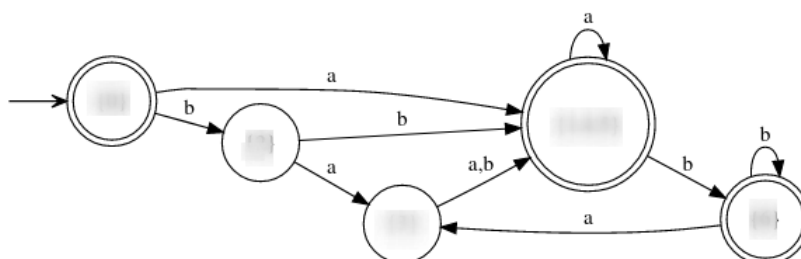
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



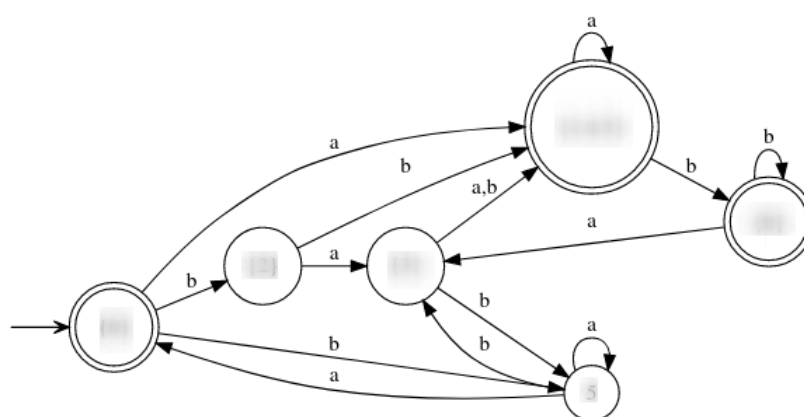
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

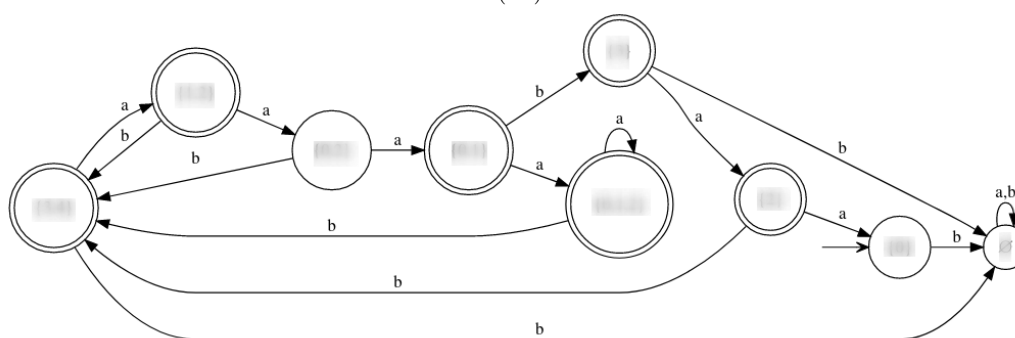
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



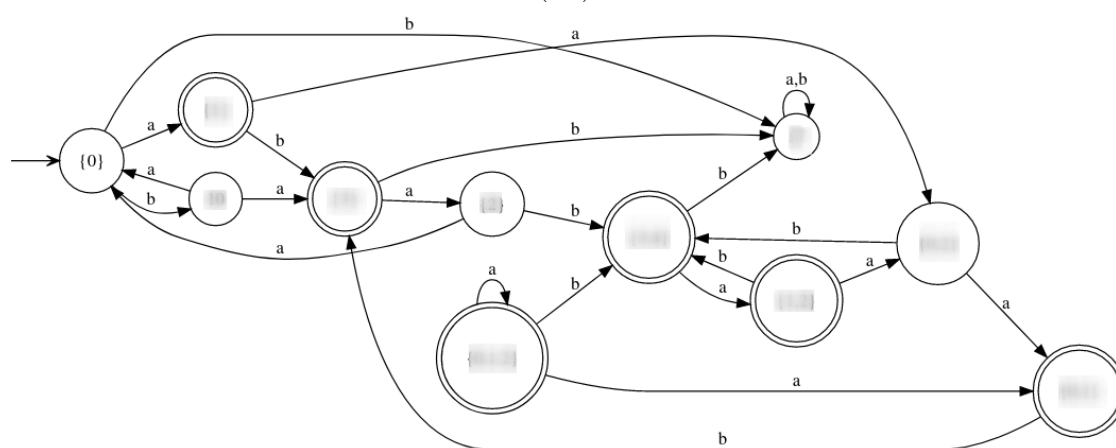
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

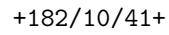
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐ b

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ e Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ i Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g A possède un état puits
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
- ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ h A a au moins un état non co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

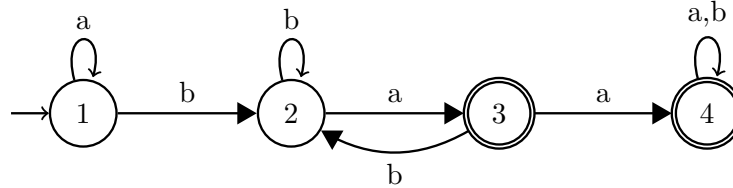
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

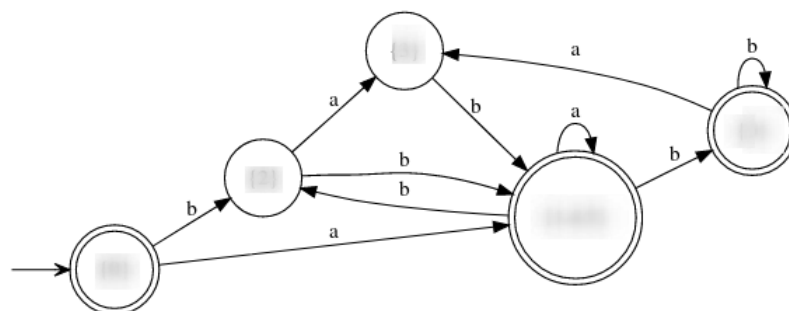
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 0

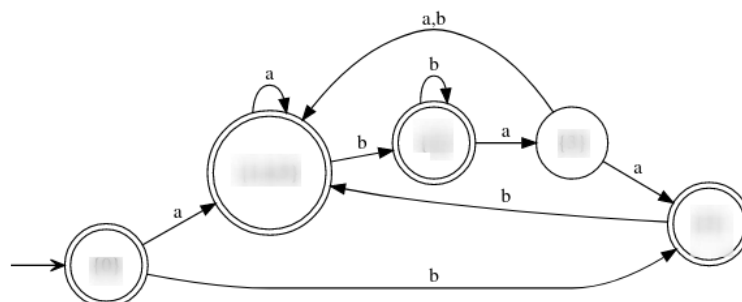
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

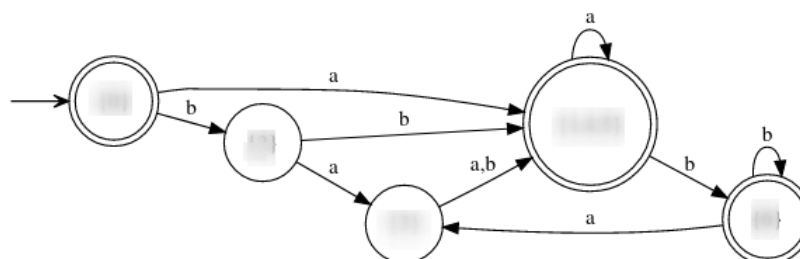
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



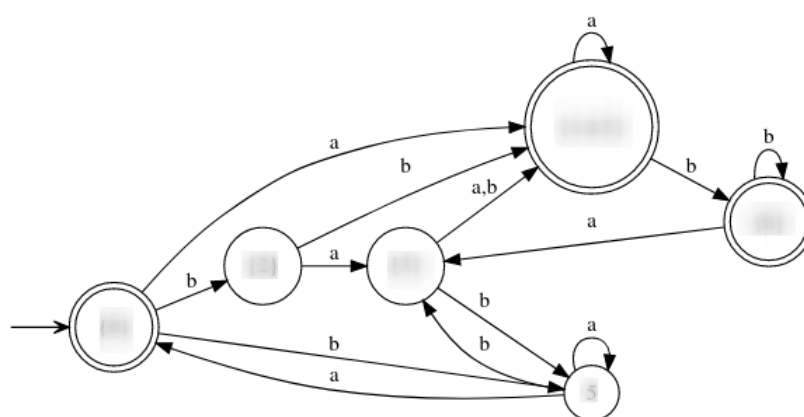
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a				e			h	i				m	n

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a	b		d		f			i	j

Question 5 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 6 :

	b		d	e

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

			d	e	f		h		j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d		f		h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

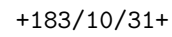
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ f A accepte le langage universel. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

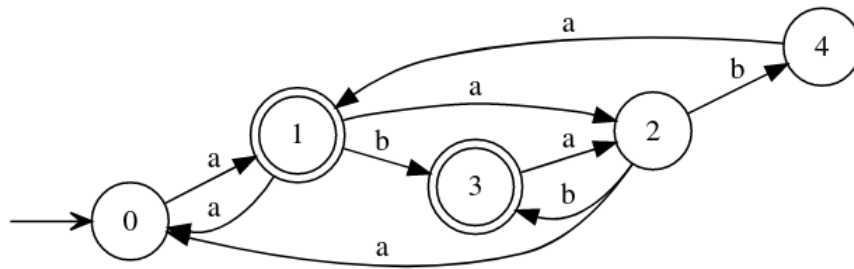
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

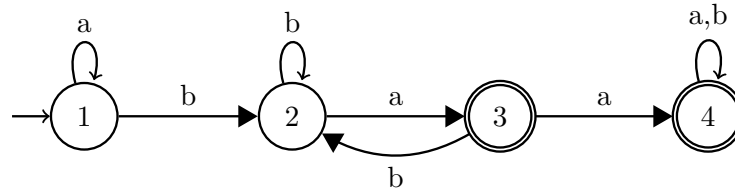
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

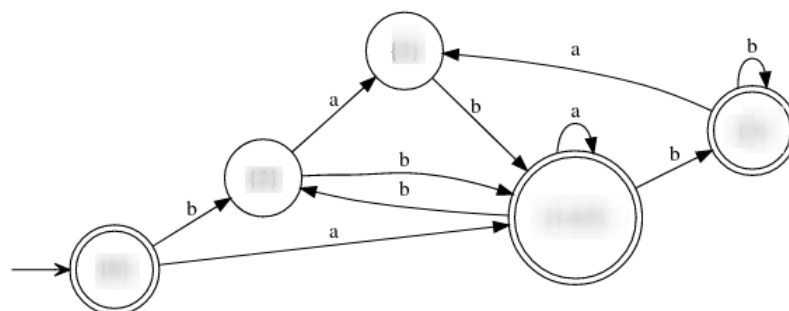
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 1 ☐ e 6 ☐ f 2 ☐ g 3

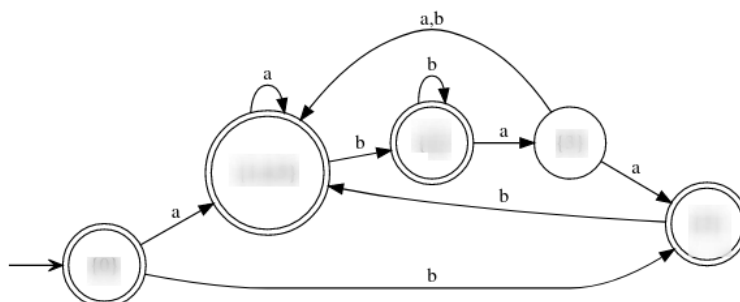
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

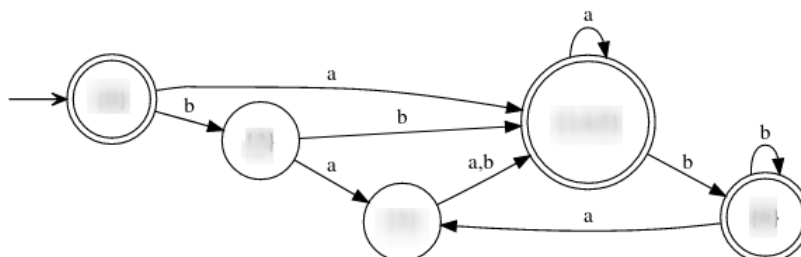
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



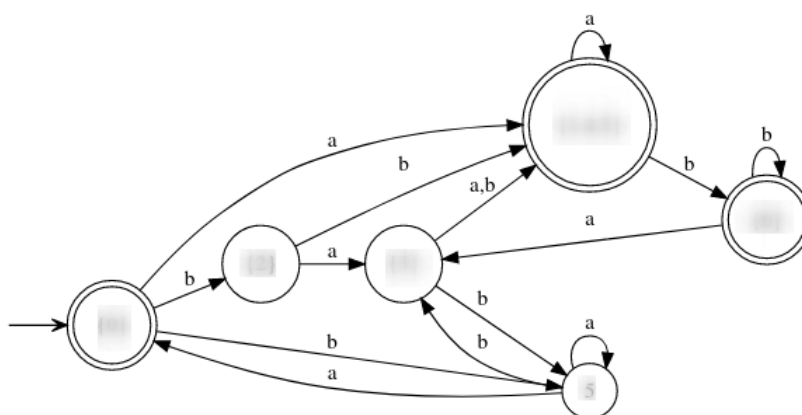
(-i-)



(-ii-)

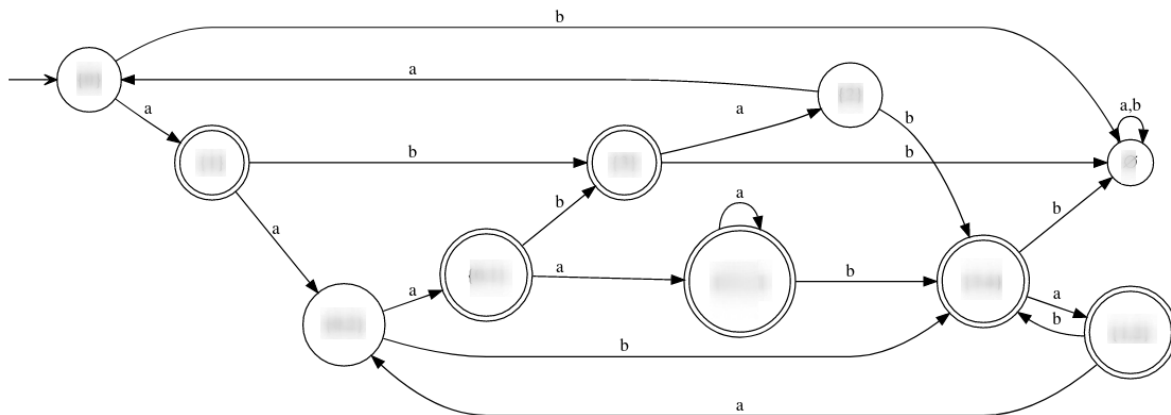


(-iii-)

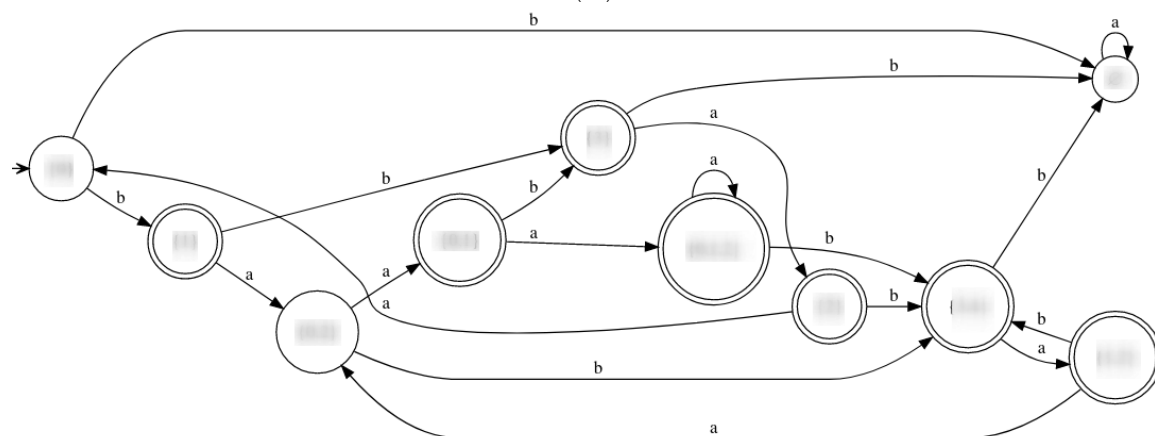


(-iv-)

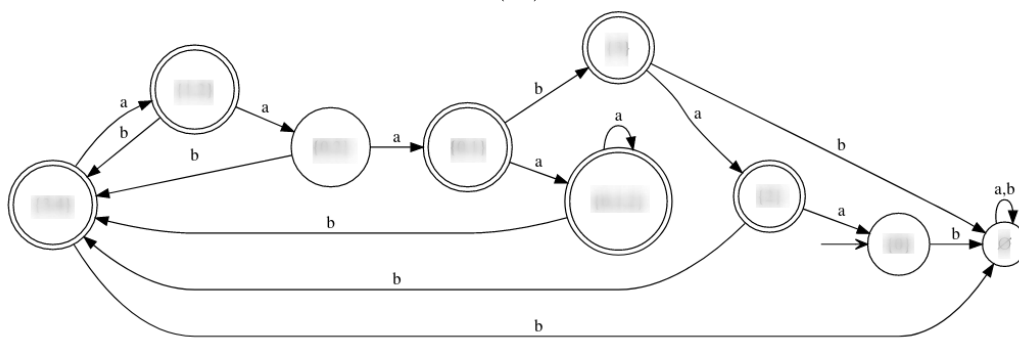
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

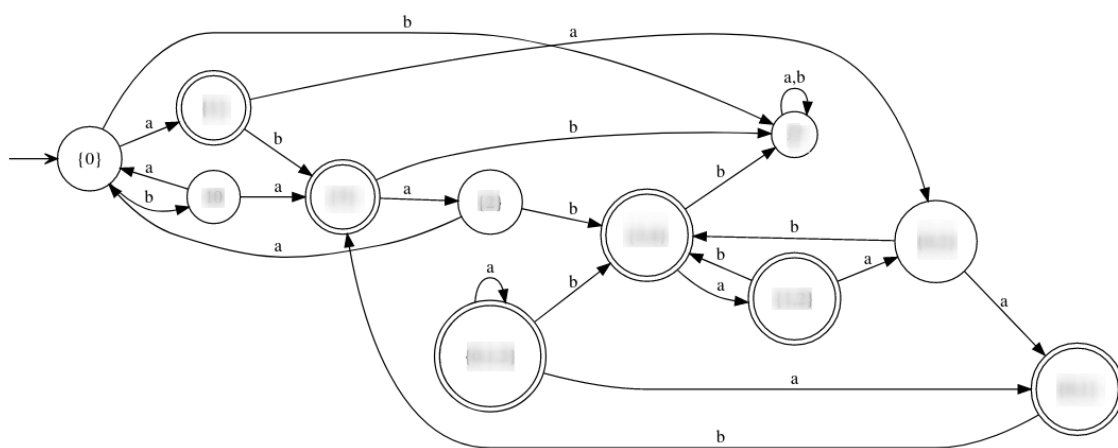

$$(-\mathbf{i}V_-)$$

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d  f   i j

Question 3 :   c d   g  i j k

Question 4 :    d   g h    l m n

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a   d e f g h i

Question 8 : a   d e

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a b c d   g h i  k  m

Question 12 : a b  d e f g h

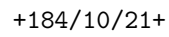
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot est une application.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot est une fonction.	☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u est accepté par A .	☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.	☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ A a des états accepteurs.	☐ A est complet.	
☐ Les états de A sont tous accessibles.		
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.		
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.		

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ nécessairement $ Q \geq 2$.	☐ A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.	
☐ A accepte le langage universel.	☐ $ \delta = Q \times \Sigma $.
☐ Tous les états de A sont accepteurs.	☐ $ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.	

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a. A a au moins un état co-accessible. ☒ A n'est pas complet. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ d. A n'a pas d'état accepteur. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ A a au moins un état accessible. ☐ h. A a au moins un état non co-accessible.
☐ i. A a au moins un état non accessible.
☐ j. Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a. Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ P est forcément déterministe.
☐ d. Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a. Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b. Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c. L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d. Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b. Σ est fermé par facteur. ☐ c. Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ e. Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ g. Σ est fermé par suffixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i. Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a. la Figure 3-ii-. ☐ b. la Figure 3-i-. ☐ e. la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c. la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a. la Figure 4-ii-. ☐ b. la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d. la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

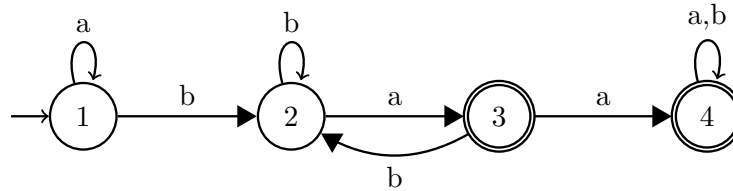
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

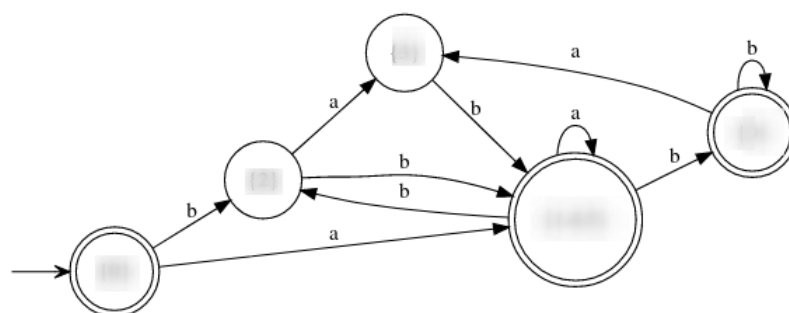
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ b 4 ☐ c 5 ☐ d 3 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 1

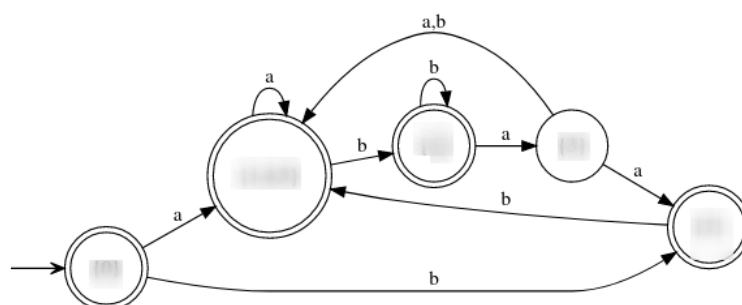
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

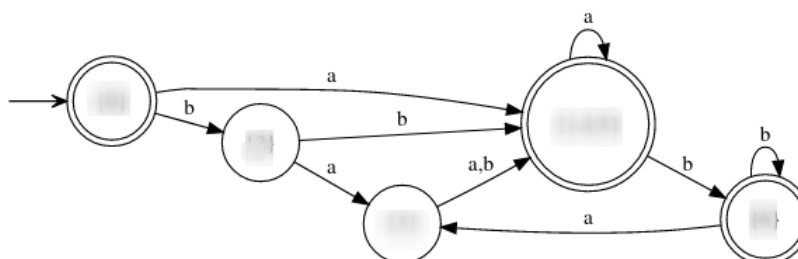
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



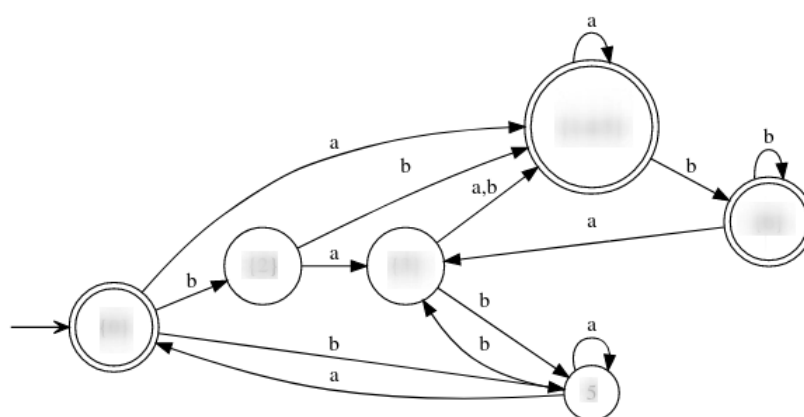
(-i-)



(-ii-)

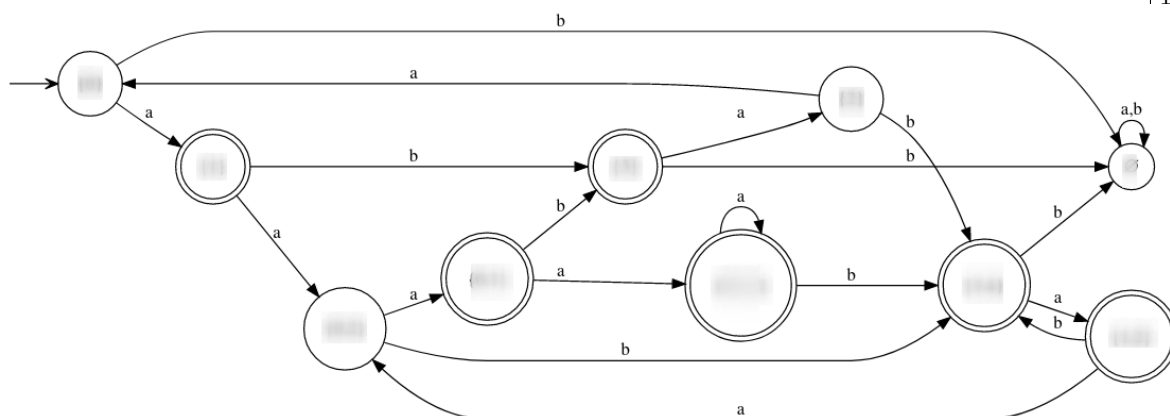


(-iii-)



(-iv-)

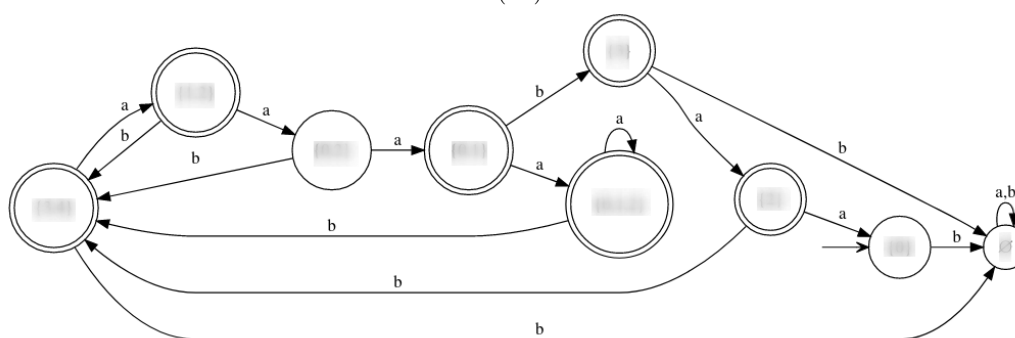
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ e ☐ ☐ h i ☐ ☐ l m n

Question 3 : a b c d e f g ☐

Question 4 : a b ☐ d e ☐ g h i

Question 5 : a ☐ ☐ d ☐ ☐ ☐ h i j k

Question 6 : a ☐ ☐ d e

Question 7 : a b c d ☐

Question 8 : ☐ b c ☐ e ☐ g ☐ i j

Question 9 : a b c ☐ e

Question 10 : a b ☐ d

Question 11 : ☐ ☐ c d e f g h i ☐ ☐ l m

Question 12 : ☐ b c d e f g h

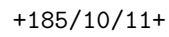
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : a ☐ c d e f

Question 15 : ☐ b c d e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : a ☐ c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

$$\blacksquare \quad |\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|.$$

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.

☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A possède un état puits

$$\input{checkbox} \quad |\delta| = |Q| \times |\Sigma|.$$

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A .

☐ A a des états accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

$$\blacksquare \quad |Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|.$$

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

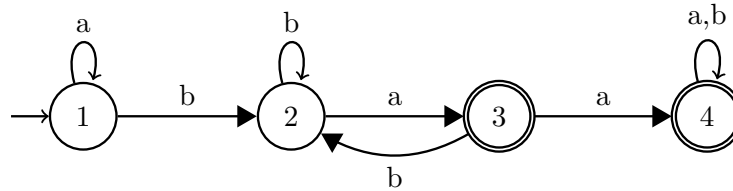
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

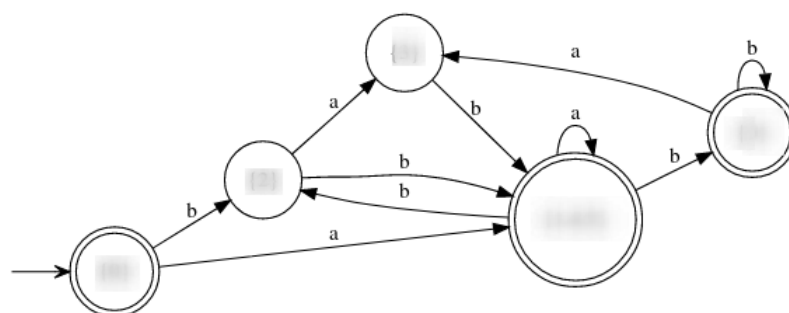
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 2 ☐ g 0

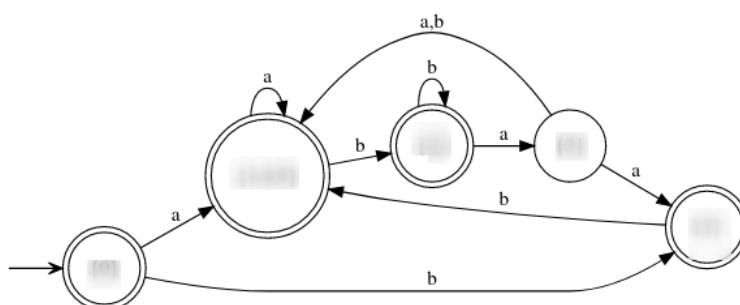
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

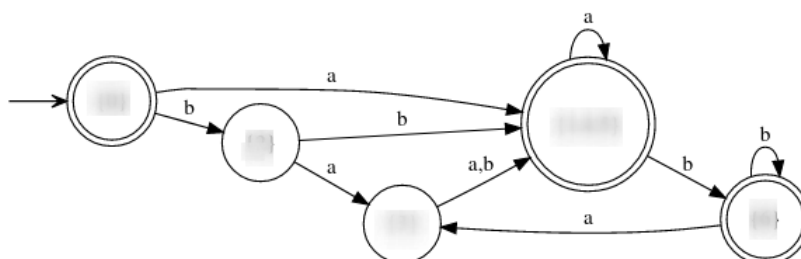
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



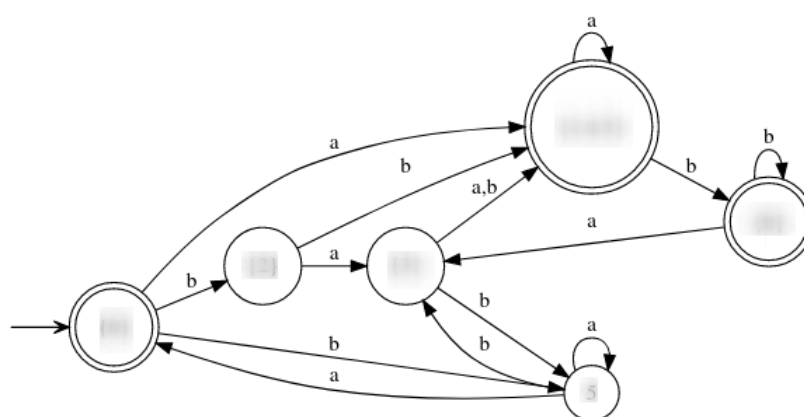
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b   e f  h i j

Question 3 :    e   h  j k  m n

Question 4 : a   e  h i j k

Question 5 :   c d e f g h i

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b c d 

Question 8 :  b  d e

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 :  b c d  f g h i j  l 

Question 12 :  b c d e f g h

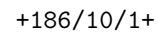
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ b Un mot peut être infini.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut être vide.
- ☐ f Un mot est une fonction.
- ☐ g Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ h Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ i Un mot est une application.
- ☐ j Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ l Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe.
- ☐ b Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ c Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par facteur.

- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ b A possède un état puits ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f A accepte le langage universel.
- ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ c u est accepté par A . ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.
- ☒ u n'est pas accepté par A . ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ h A a au moins un état co-accessible. ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-.
- ☐ b la Figure 3-ii-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-.
- ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-.
- ☐ b la Figure 4-ii-.
- ☐ c la Figure 4-iii-.
- ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = a + b$	☒ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☒ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

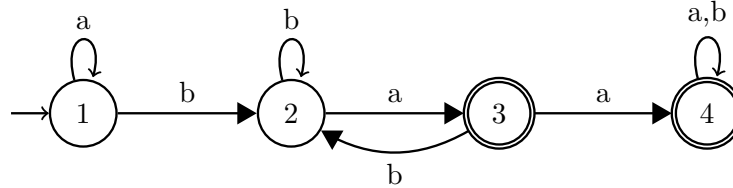
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

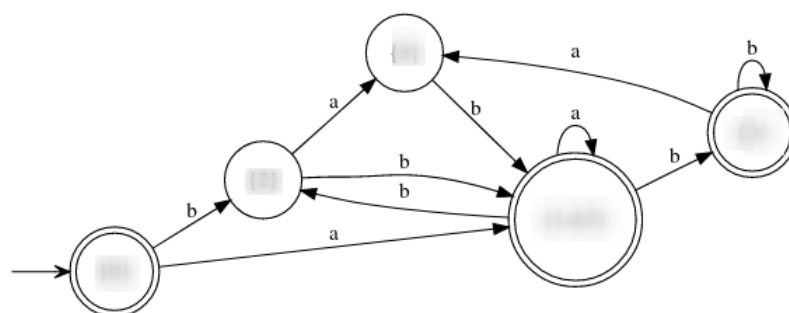
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 3 ☐ d 2 ☐ e 6 ☐ f 5 ☐ g 0

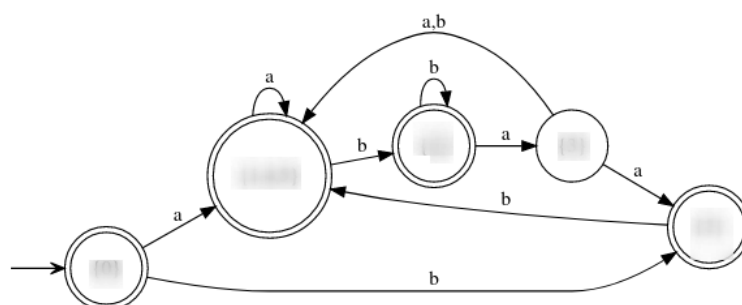
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

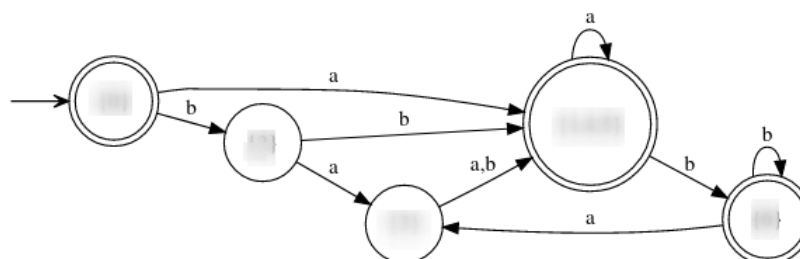
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



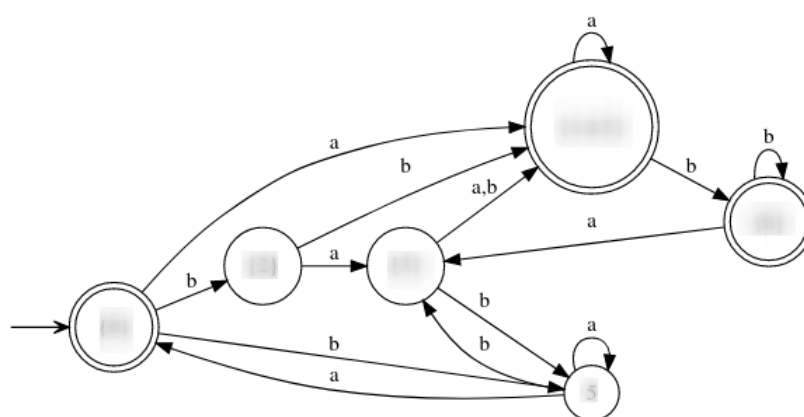
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒

Question 3 : ☒ ☒ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 4 : ☒ ☐ b ☐ c ☒ ☒ ☒ ☐ g ☒ ☒ ☒ ☐ k ☒ ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☒ ☒ ☐ d ☐ e ☐ f ☒ ☒ ☐ i ☐ j

Question 6 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d ☒ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☒

Question 8 : ☒ ☒ ☐ c ☒ ☒ ☐ f ☒ ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k

Question 9 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☒ ☐ b ☒ ☒ ☐ e ☐ f ☒ ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☒ ☐ g ☐ h

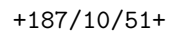
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒ ☐ f

Question 14 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☒ ☐ e ☐ f

Question 16 : ☒ ☐ b

Question 17 : ☐ a ☒ ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c A est complet.
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible.
- ☒ b u n'est pas accepté par A .
- ☒ c A a au moins un état accessible.
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a au moins un état co-accessible.
- ☒ g A n'est pas complet.
- ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ c Un mot peut être vide.
- ☒ d Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ e Un mot est une application.
- ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par facteur.
 ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A possède un état puits
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
 ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-.
 ☐ la Figure 3-ii-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iv-.
 ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-.
 ☐ la Figure 4-ii-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

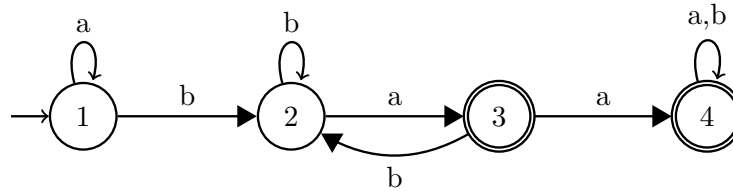
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

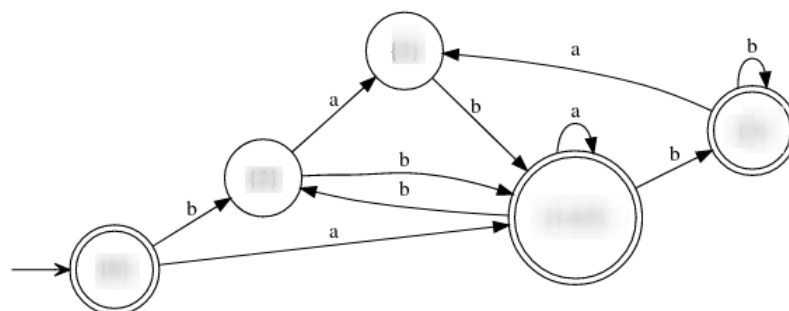
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 6 ☒ 4 ☐ f 2 ☐ g 5

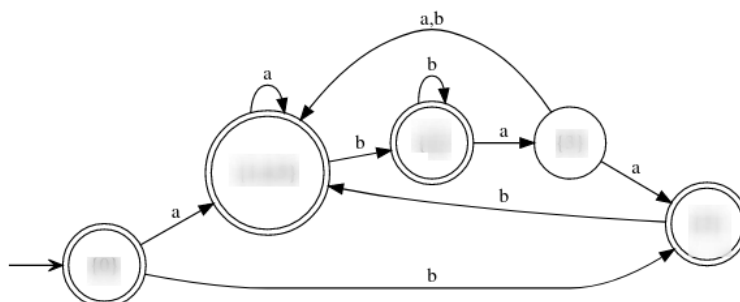
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

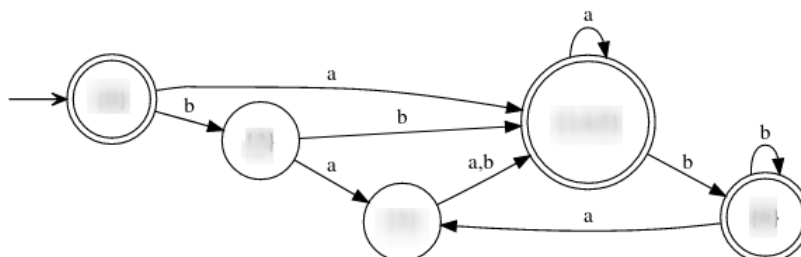
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



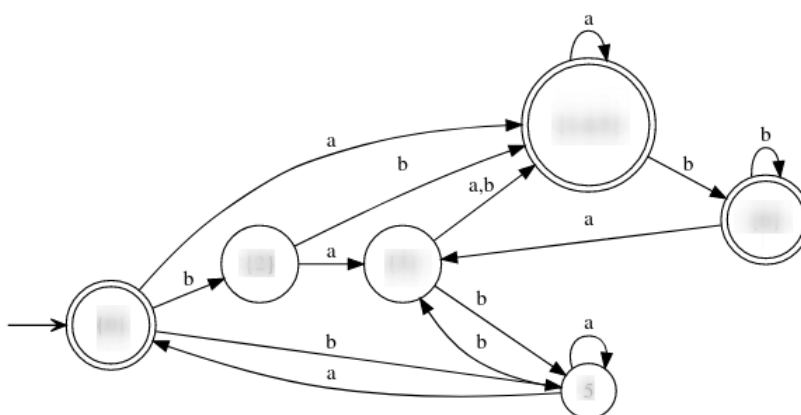
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

The diagram shows a Markov Decision Process (MDP) with 10 states. States are represented by circles, some with a gray square indicating a goal state. Transitions are labeled 'a' and 'b'. The diagram shows a complex network of transitions between states, including self-loops and cycles.

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a			d		f		h		j	k

Question 5 :

	b				f			i		k		m	n

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

a		c		e	f			i	j

Question 8 :

	b		d	e	f	g	h	i

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d		f	g	h		j	k		

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

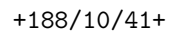
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A possède un état puits
☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
- ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e A est complet.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ b Un mot peut être infini.
- ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ e Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot est une fonction.
- ☒ Un mot est une application.
- ☒ Un mot peut être vide.
- ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-.
- ☐ b la Figure 3-iv-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-.
- ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-.
- ☐ b la Figure 4-ii-.
- ☐ c la Figure 4-iv-.
- ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

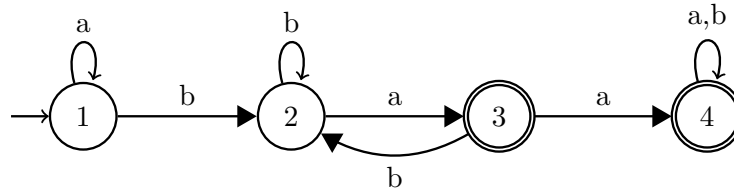
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

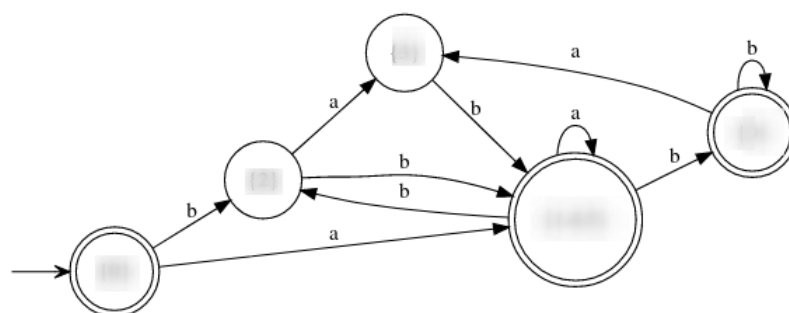
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 2 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 6

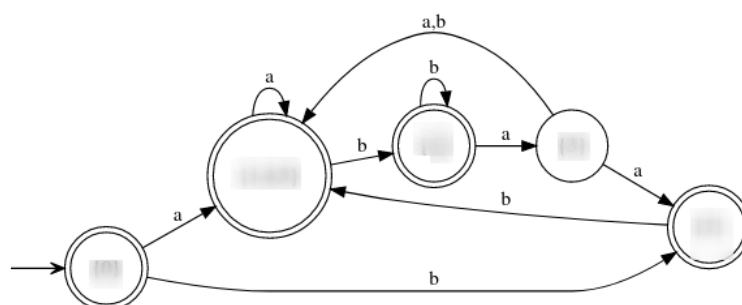
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

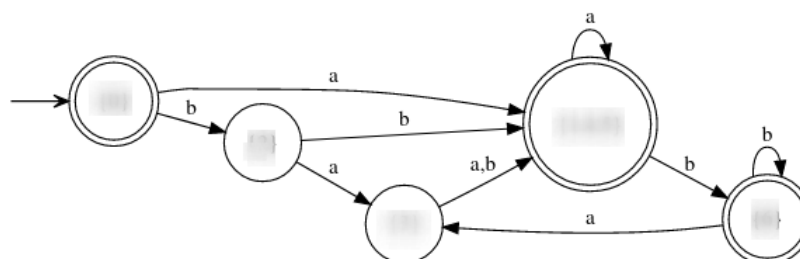
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



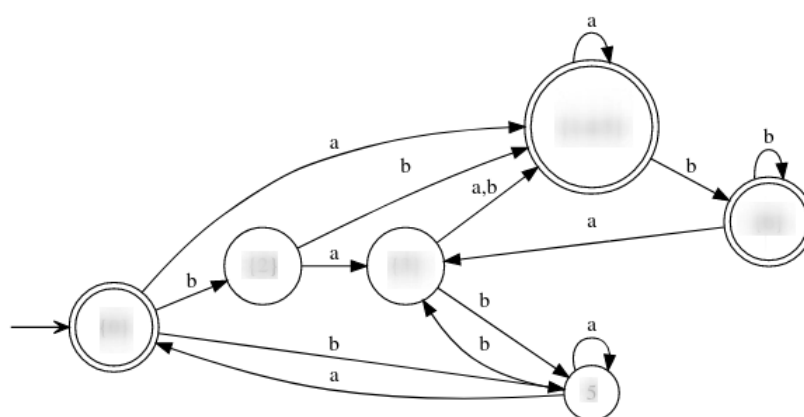
(-i-)



(-ii-)

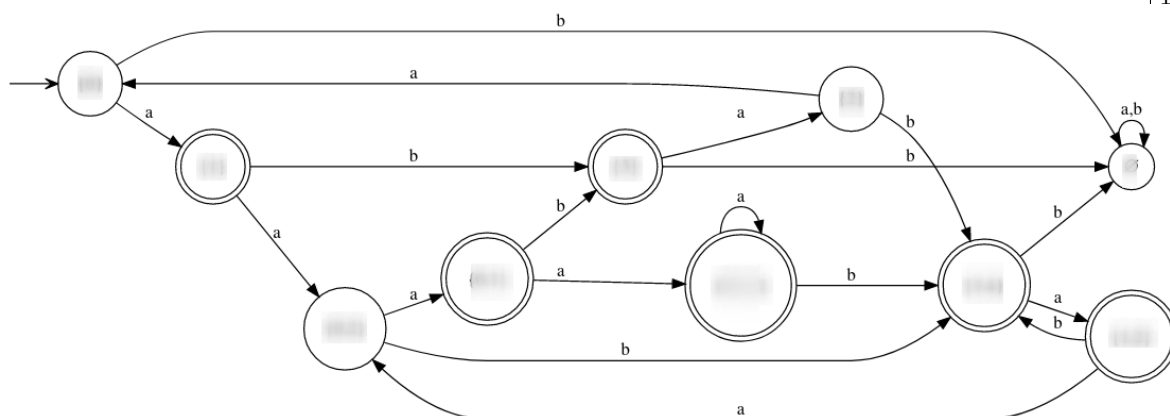


(-iii-)

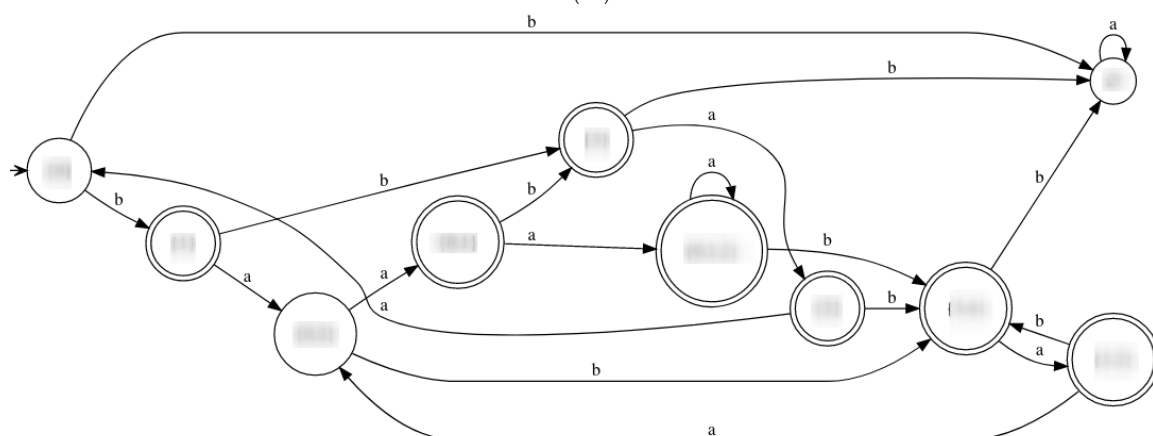


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



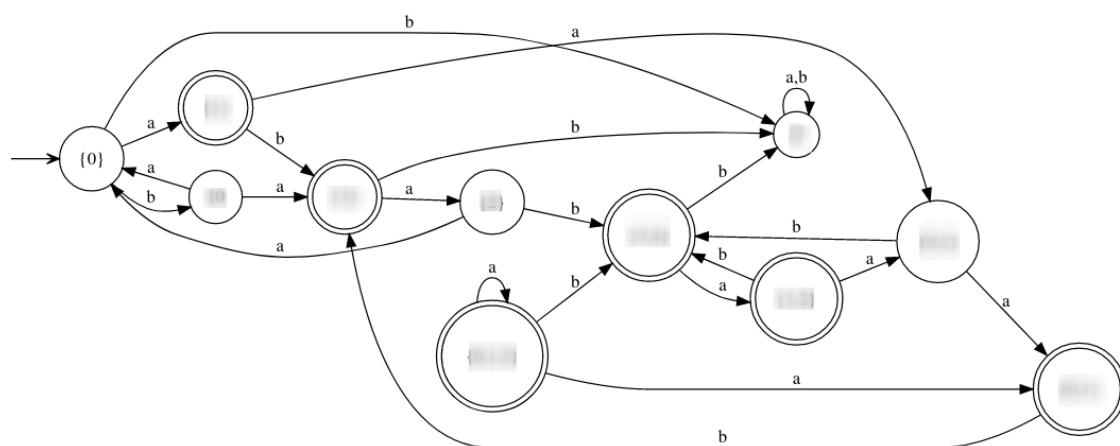
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

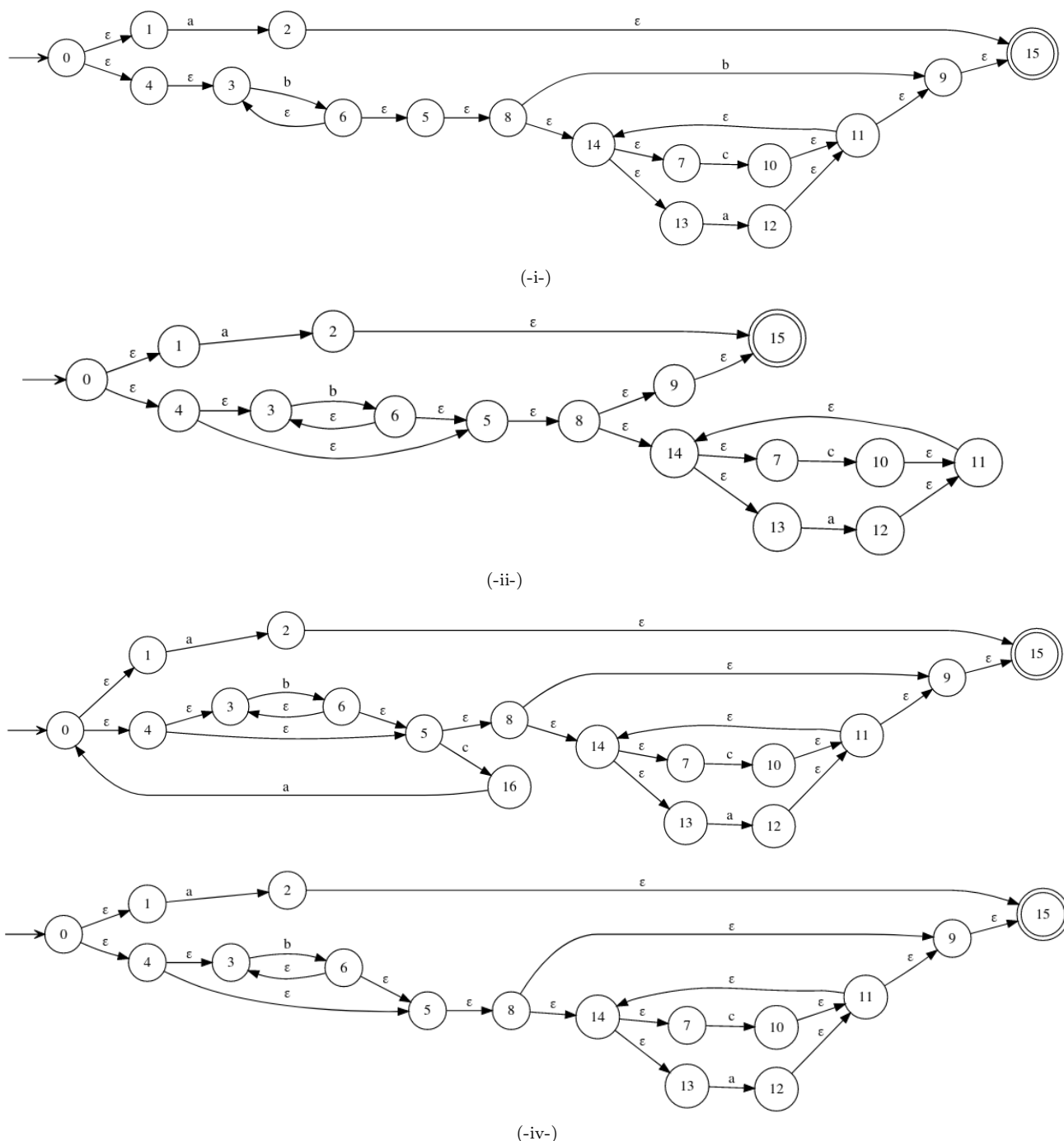


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d e   i j

Question 3 :  b c d  f g h i

Question 4 :  b c  e  g   j k

Question 5 : a   d e

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 :  b  d e    j   m n

Question 9 : a b  d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b  d e f   i j k l 

Question 12 : a  c d e f g h

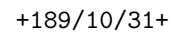
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten evenly spaced, horizontal dotted lines running across its width. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A possède un état puits
☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b P est forcément déterministe.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ b Un mot peut être vide.
☐ c Un mot peut être infini. ☒ d Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ f Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
 ☐ A n'est pas complet.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
 ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible.
 ☐ A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par préfixe.
 ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-.
 ☐ la Figure 3-i-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iv-.
 ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-iv-.
 ☐ la Figure 4-iii-.
 ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

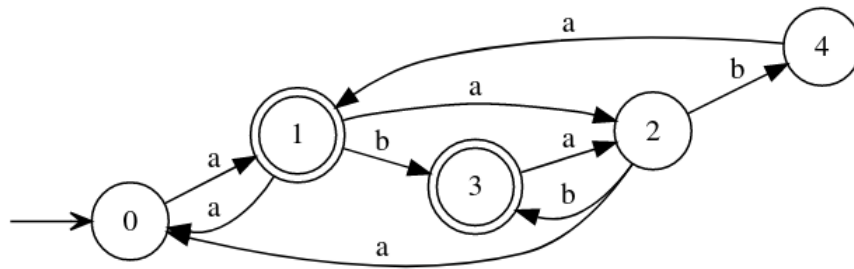
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

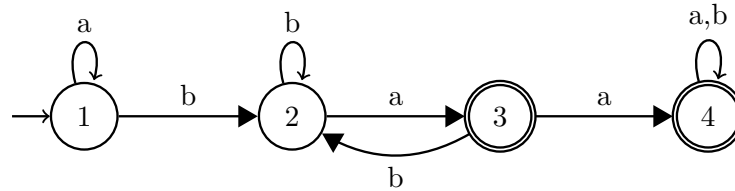
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

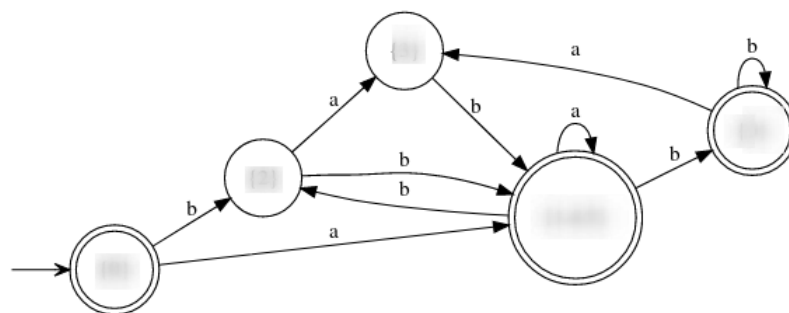
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 2

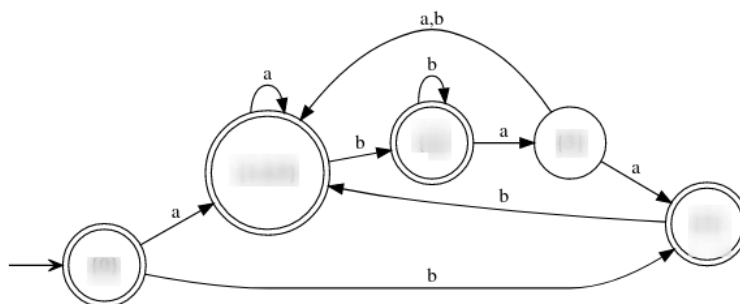
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

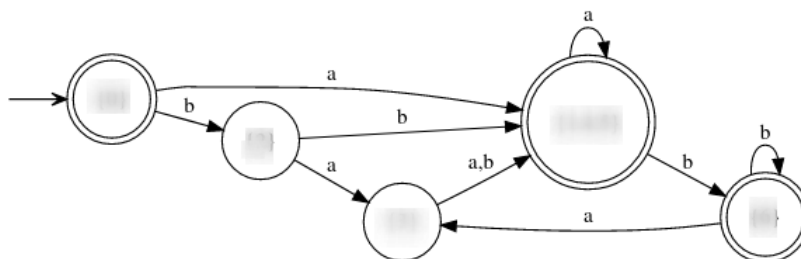
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



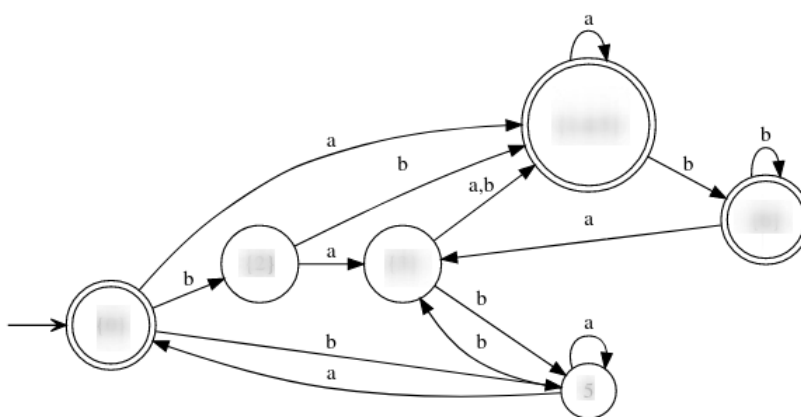
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

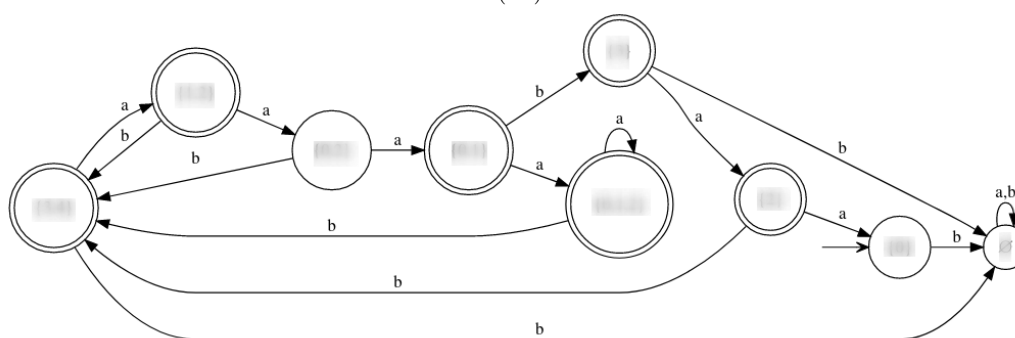
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



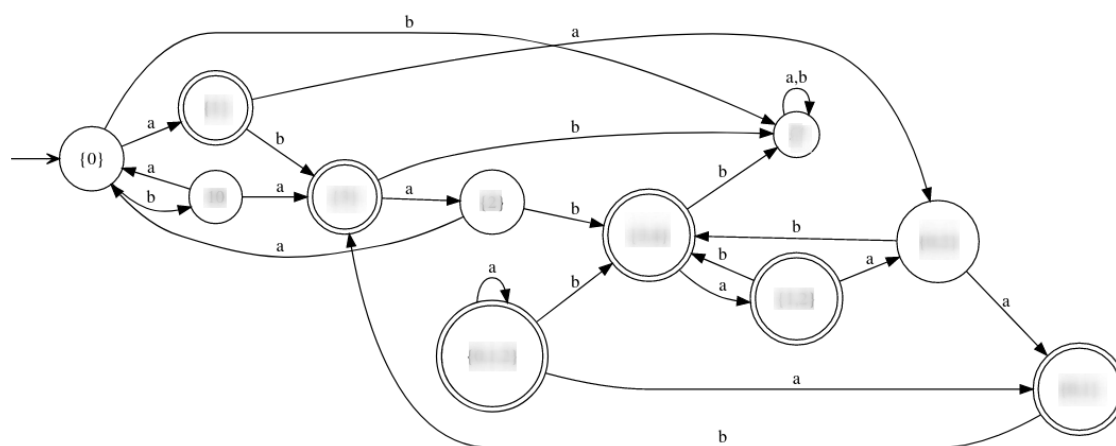
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b		d	e		g	h	i

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

a		c					h	i				m	n

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

	b				f	g		i	j	k

Question 8 :

a			d	e	f			i	j

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a		c	d			g	h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

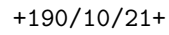
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ l Un mot peut être infini.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A .
- ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ d A est complet.
- ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ d Σ est fermé par facteur.
- ☐ e Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ b A a au moins un état non accessible.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

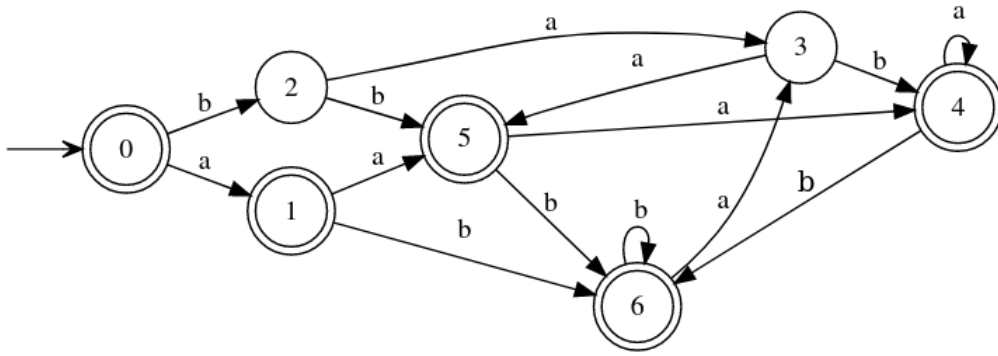
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

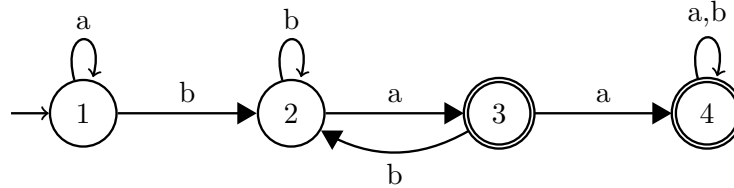
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

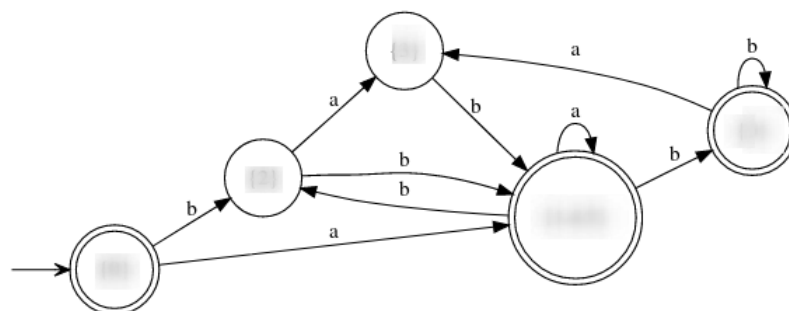
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 1 ☐ e 6 ☒ f 4 ☐ g 5

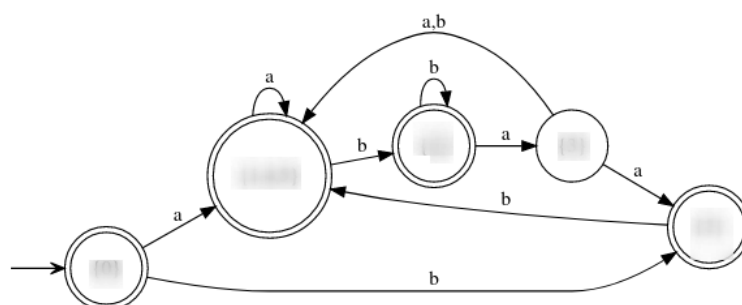
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

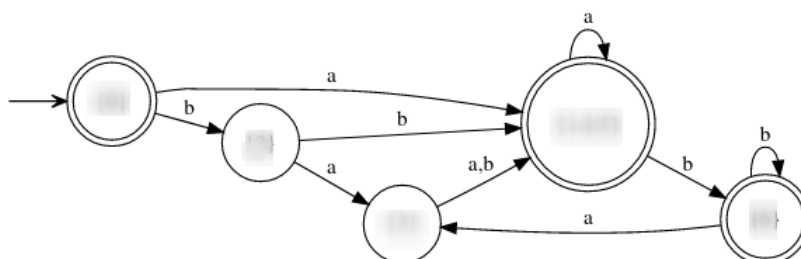
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



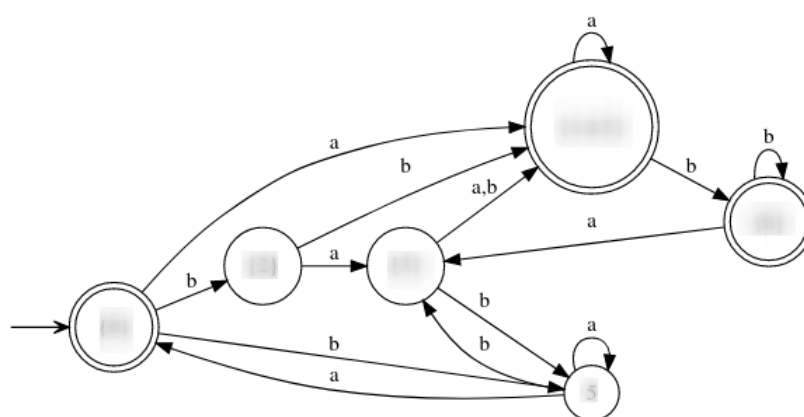
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

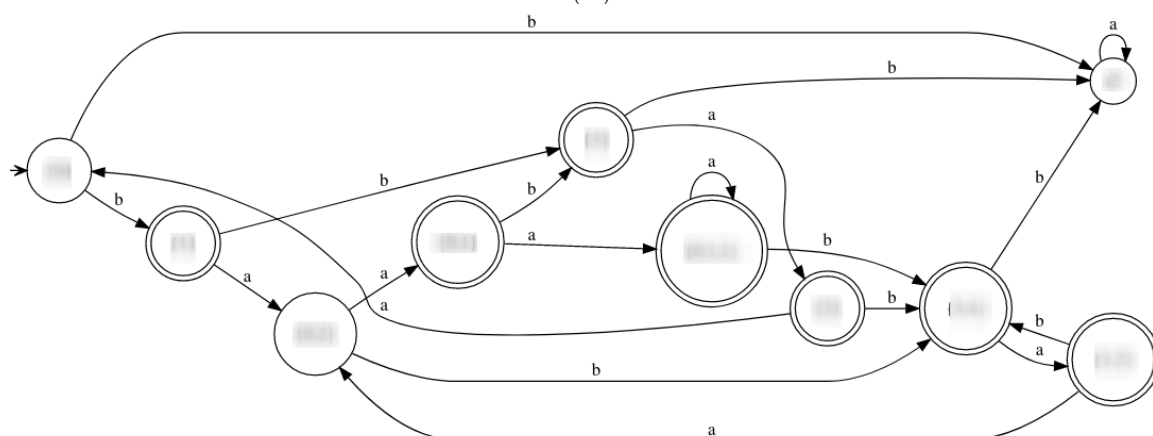


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a		c				g					l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a			d	e	f			i	j

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

	b	c		e	f				j	k

Question 8 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d		f	g		i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

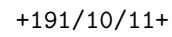
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	
☐ c	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ d	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Un mot peut être vide.	☐	Un mot possède une infinité d'extensions.
☐	Un mot est une application.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ j	Un mot peut être infini.
☐	Un mot est une fonction.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c A possède un état puits ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e A accepte le langage universel.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ c A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.
- ☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☐ f A a au moins un état co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☐ g Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b u est accepté par A . ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

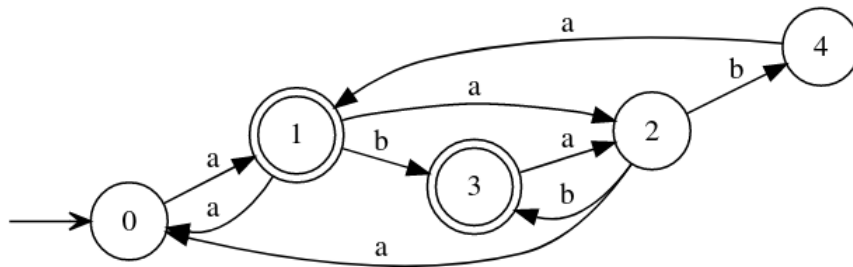
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

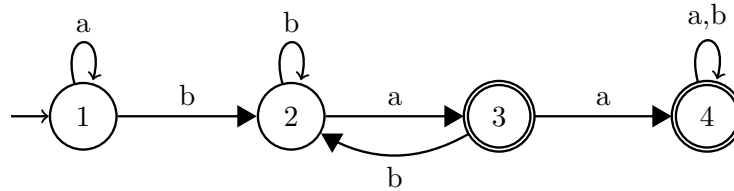
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

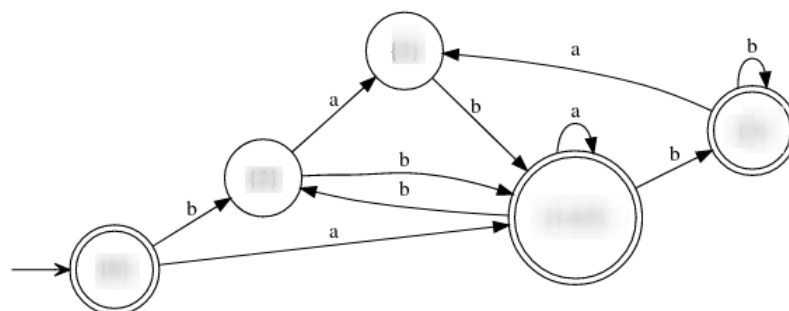
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 6 ☐ c 0 ☐ d 3 ☐ e 2 ☐ f 5 ☒ 4

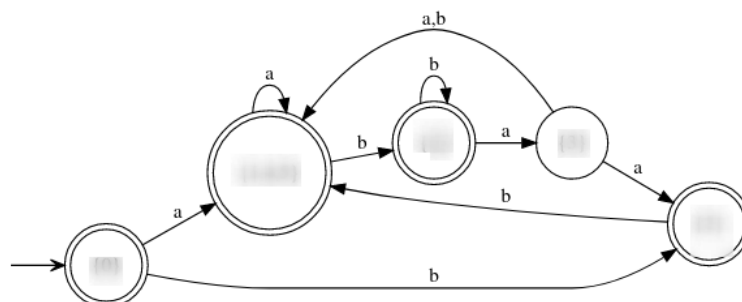
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

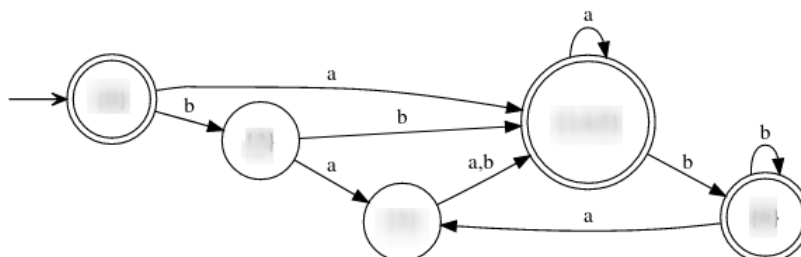
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



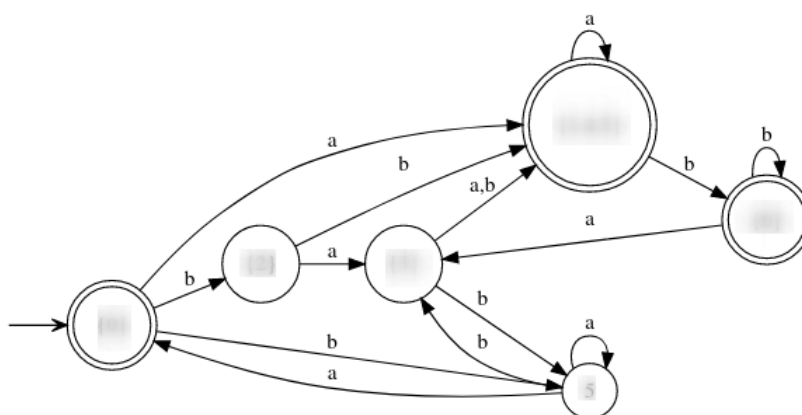
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d						j			m	n

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a		c		e	f	g	h	i

Question 6 :

a		c		e	f				j	k

Question 7 :

a			d		f	g		i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a			d	e	f	g	h		j		l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

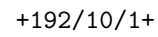
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet.
☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☒ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ A accepte le langage universel. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Un mot est une application.

☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☒ Un mot peut être vide. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-ii- ☒ la Figure 3-iii- ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-i- ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-iii- ☐ la Figure 4-ii- ☐ la Figure 4-iv- ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		
☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$	☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

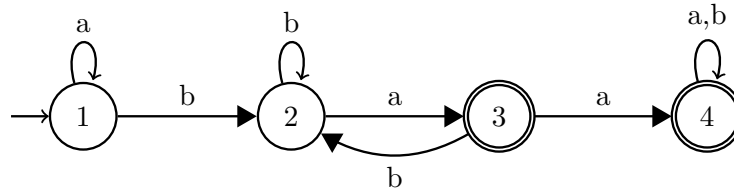
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

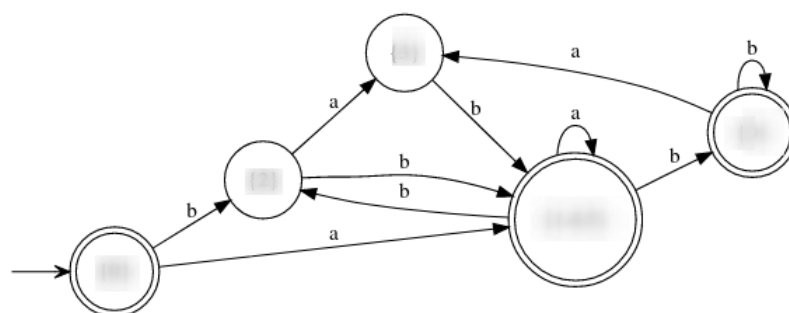
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 5 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 0 ☒ 4

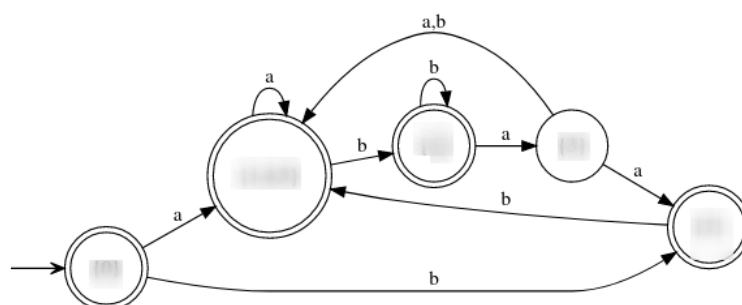
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

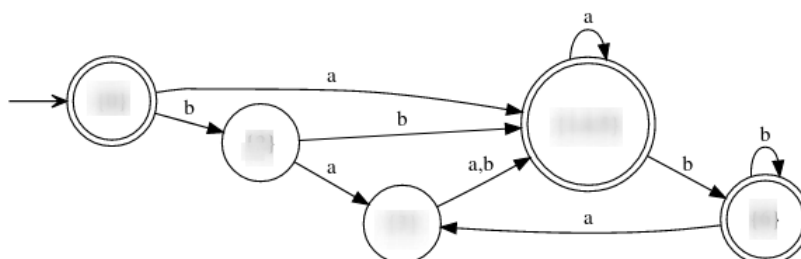
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



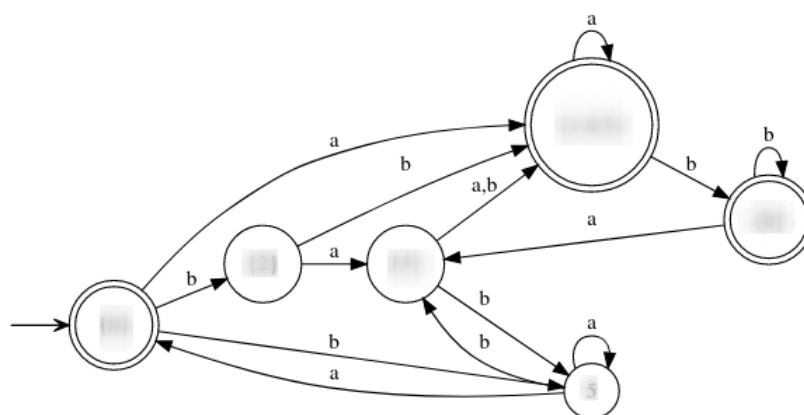
(-i-)



(-ii-)

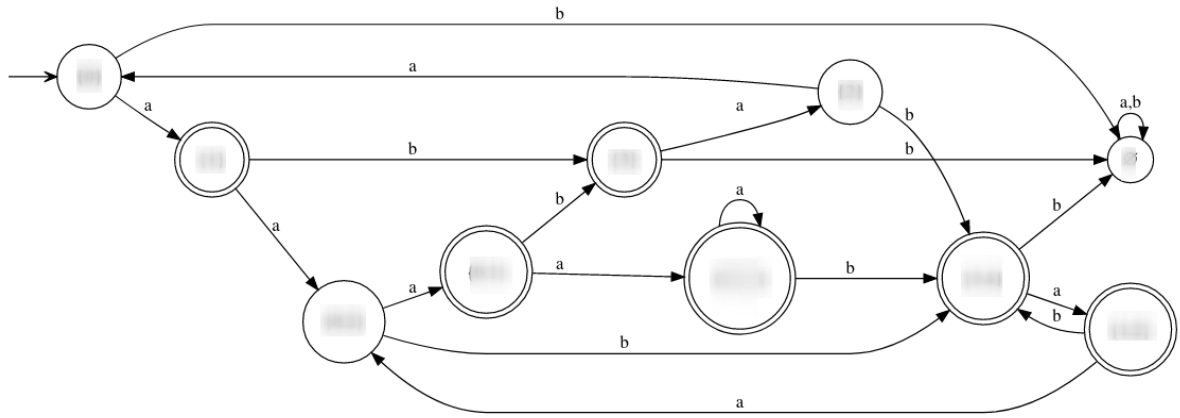


(-iii-)

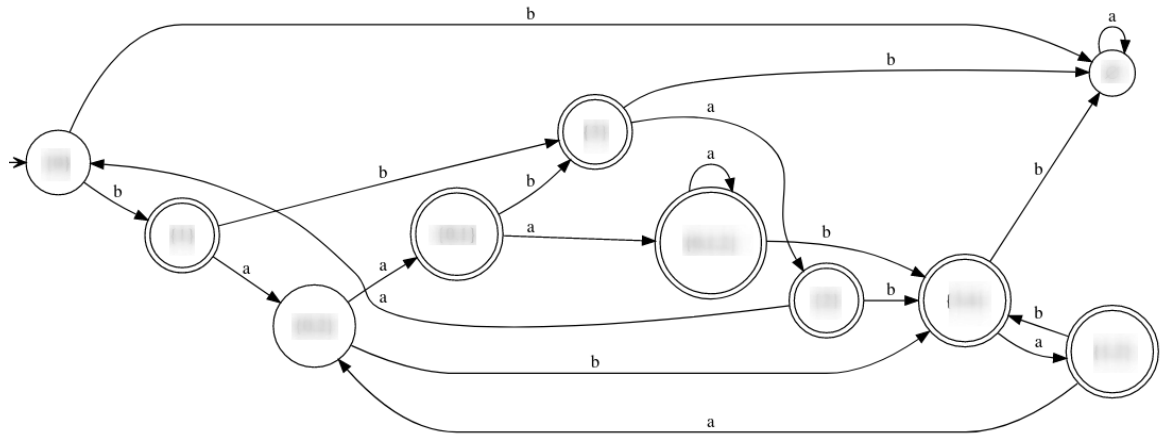


(-iv-)

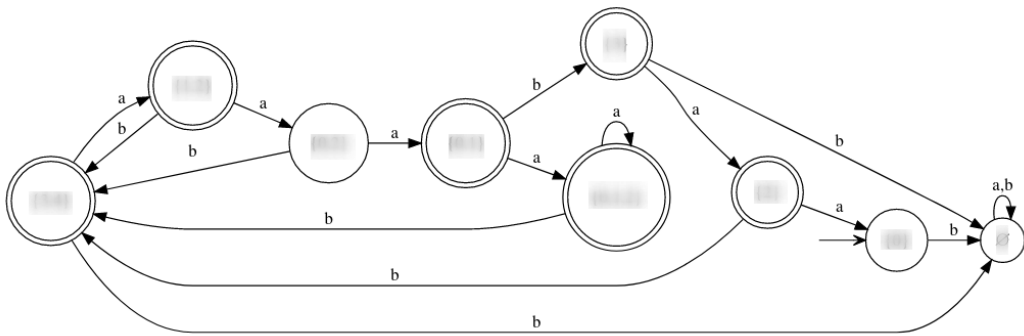
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



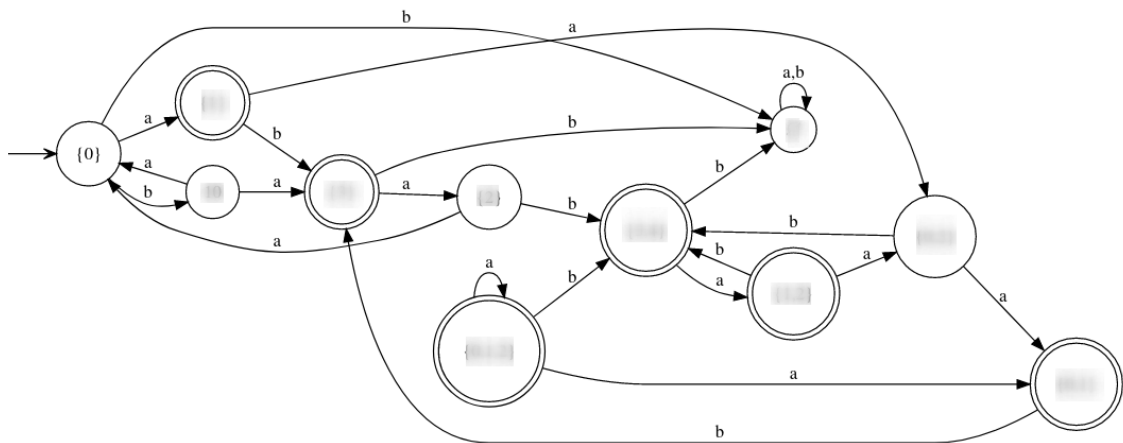
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

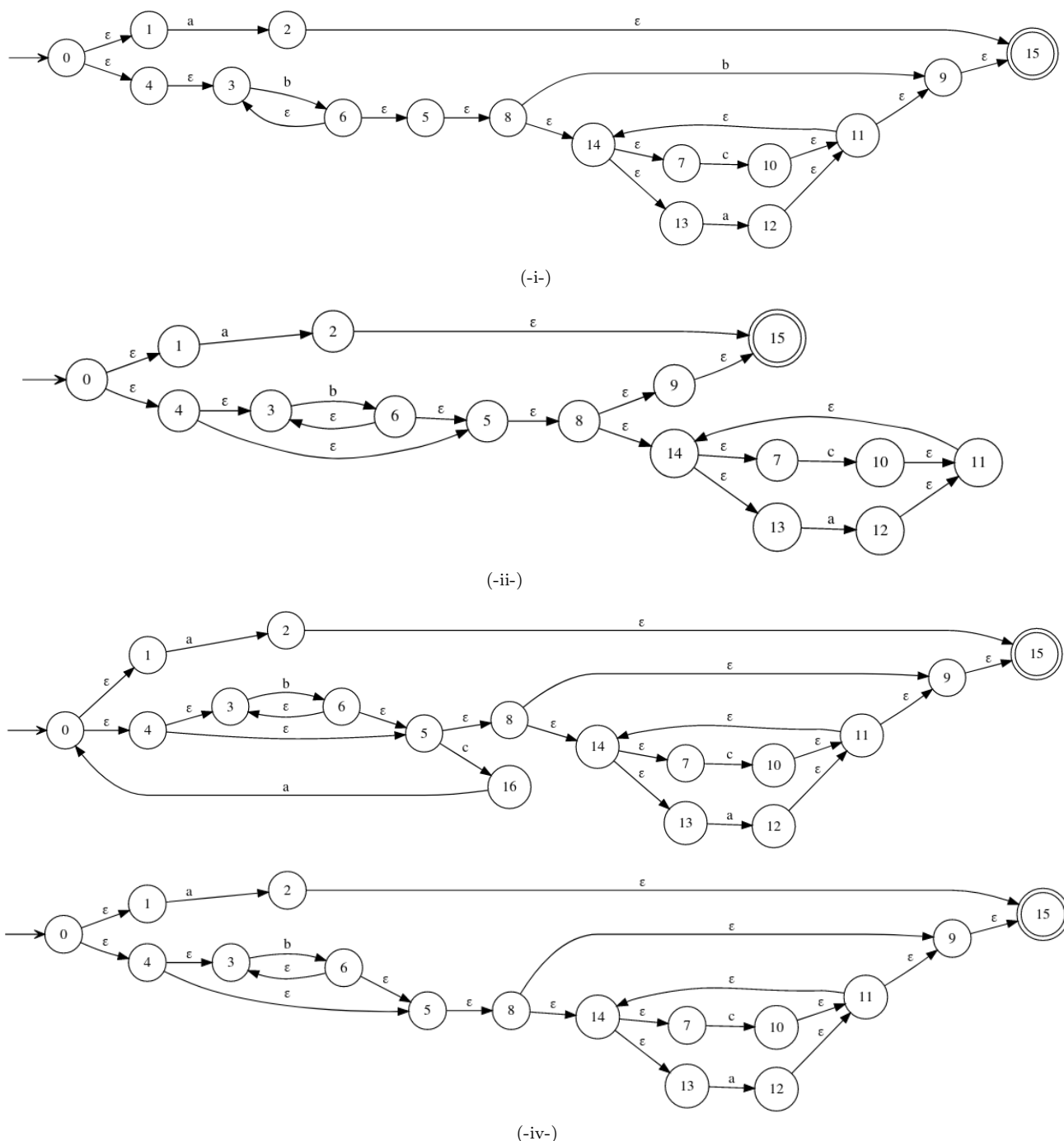


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d e   i j

Question 3 : a   d e  g  j k

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 :  b  d e

Question 6 : a b c d 

Question 7 :  b c d  f g h i

Question 8 : a b      j  l m n

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a  c d e   i j k l m

Question 12 : a b c d e  g h

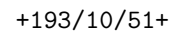
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot est une fonction.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot peut être vide.	☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☐ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ e Σ est fermé par suffixe. ☐ f Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
☐ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d A accepte le langage universel. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a au moins un état non accessible.
☐ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ e A a au moins un état accessible. ☐ f A a au moins un état co-accessible.
☐ g A n'est pas complet. ☐ h u n'est pas accepté par A .
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_4 = a + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☐ j			$X_4 = (a + b)X_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

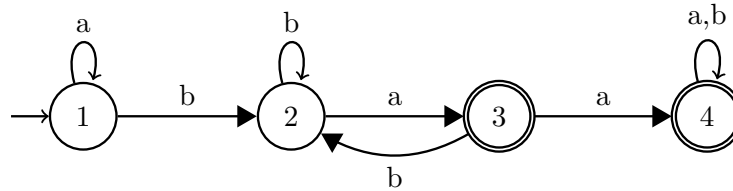
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

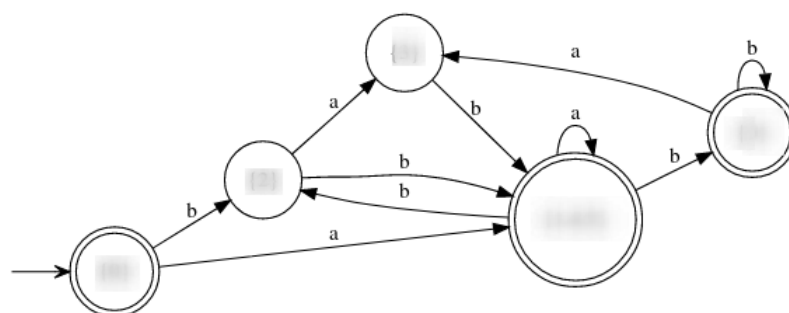
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 1 ☒ c 4 ☐ d 5 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 3

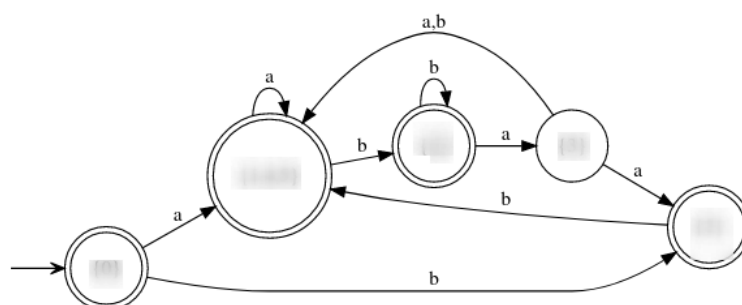
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

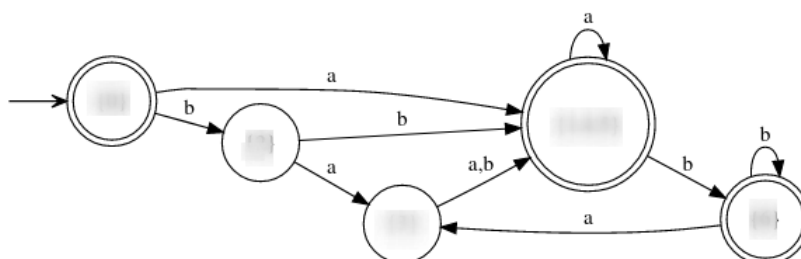
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



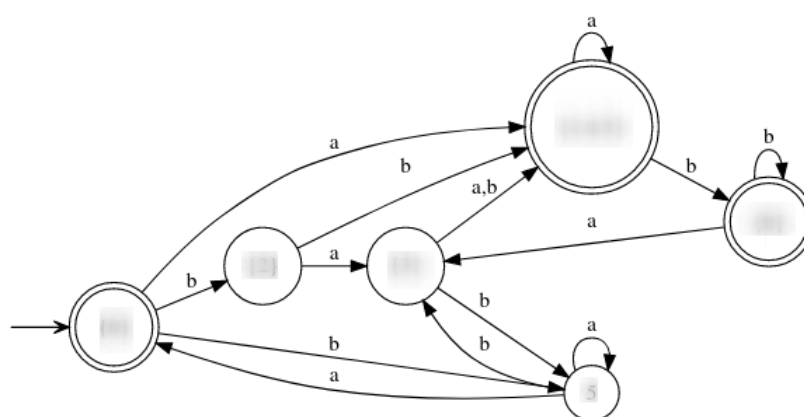
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

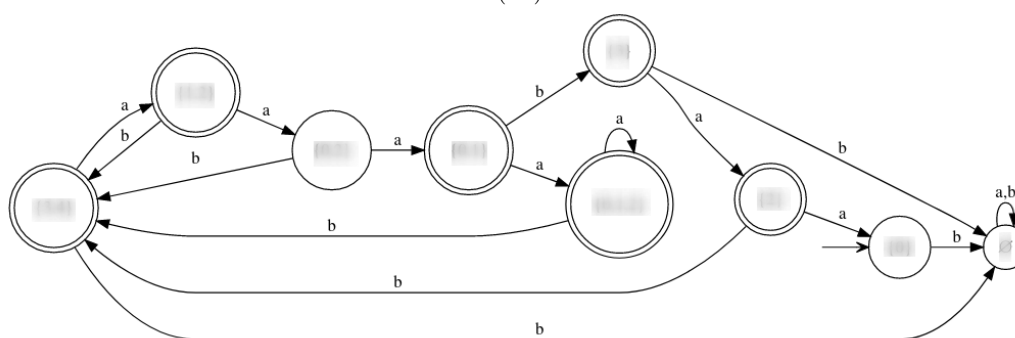
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



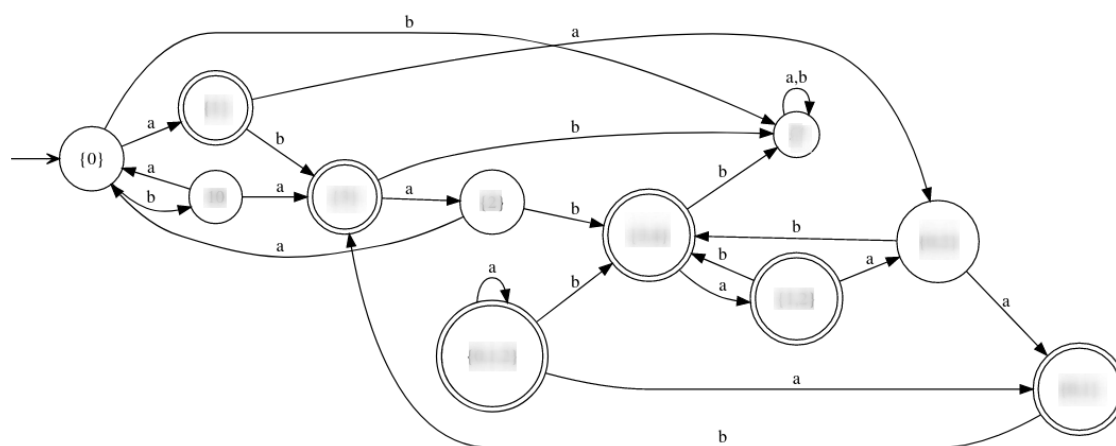
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

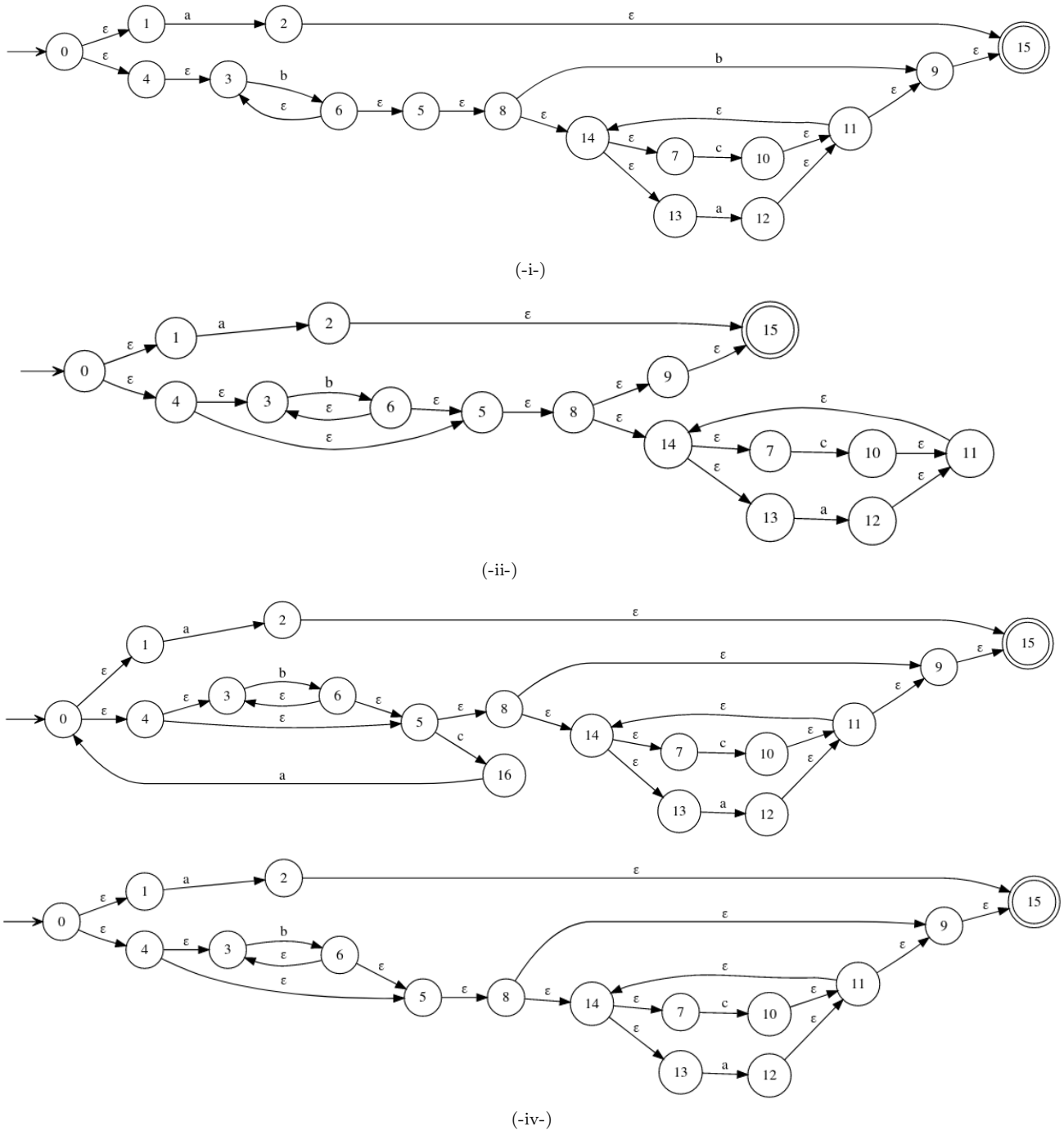


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :       g h  j  l m n

Question 3 :  b  d e

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :  b  d e   h i j

Question 7 : a   d e f g h i

Question 8 : a  c   f   i j k

Question 9 : a b  d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a  c d  f  h  j k l m

Question 12 : a b c d e  g h

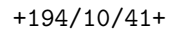
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e A accepte le langage universel.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d u est accepté par A . ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ A a au moins un état co-accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

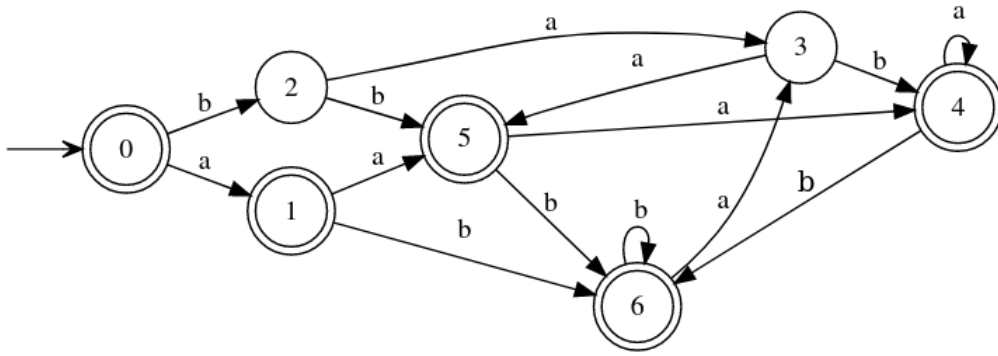
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

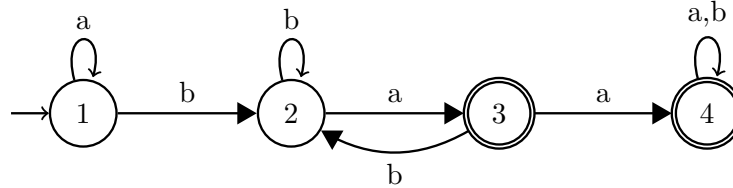
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

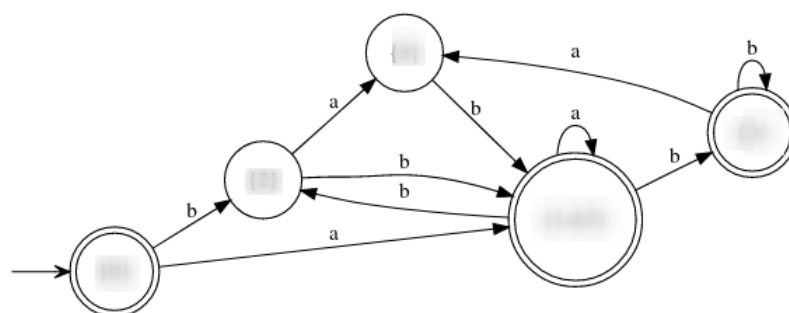
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 5 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 6 ☐ f 1 ☐ g 3

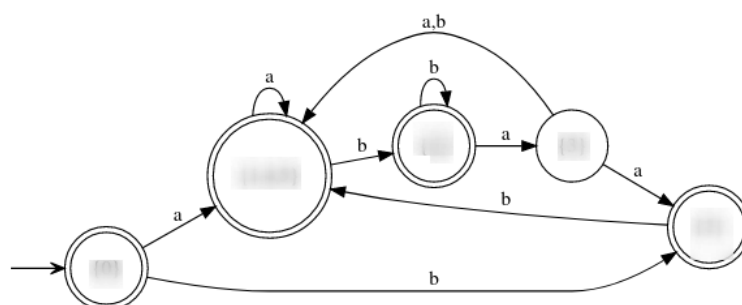
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

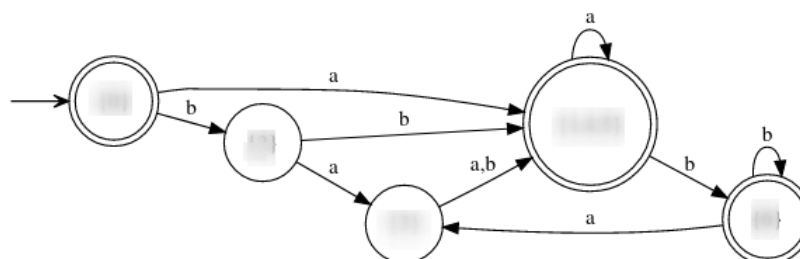
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



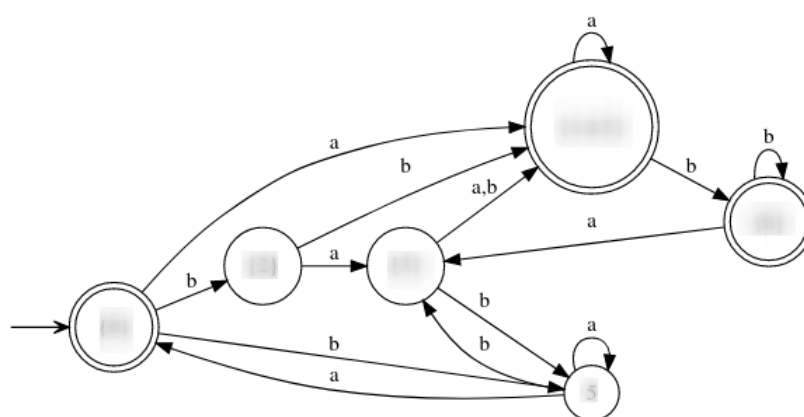
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

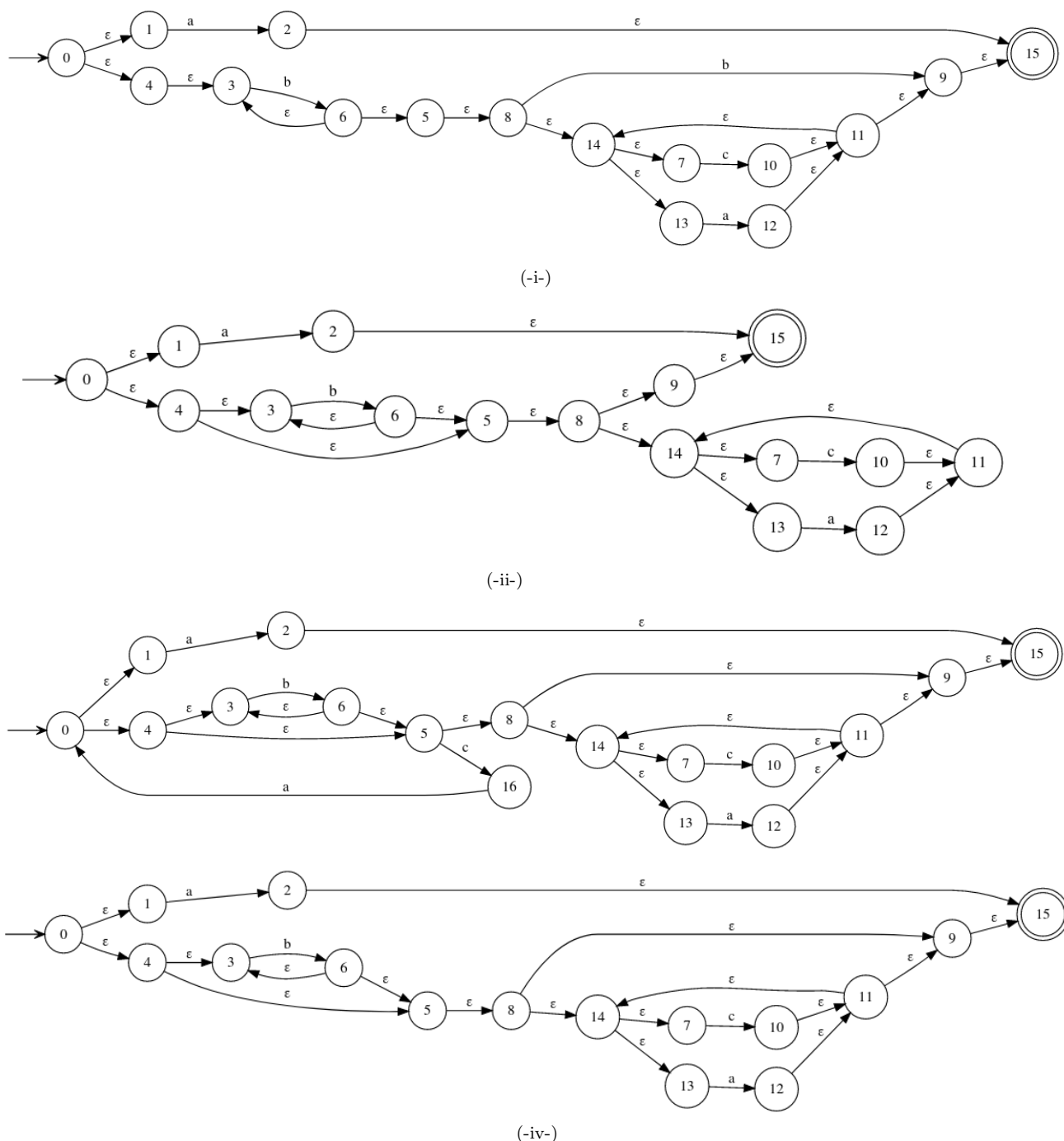


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ ☐ ☐ f ☐ h ☐ ☐ ☐ ☐ l ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ a ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 5 : ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 6 : ☐ b ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ ☐ j ☐ k

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 8 : ☐ a ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d

Question 11 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

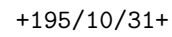
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐ ☐

Question 17 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e A est complet.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b A possède un état puits ☐ c A accepte le langage universel. ☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☒ c Un mot est une fonction. ☒ d Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ e Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ f Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ g Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ h Un mot peut être vide.
☒ i Un mot est une application. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☒ c Σ^* est fermé par facteur.
☒ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ f A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☒ A n'est pas complet. ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

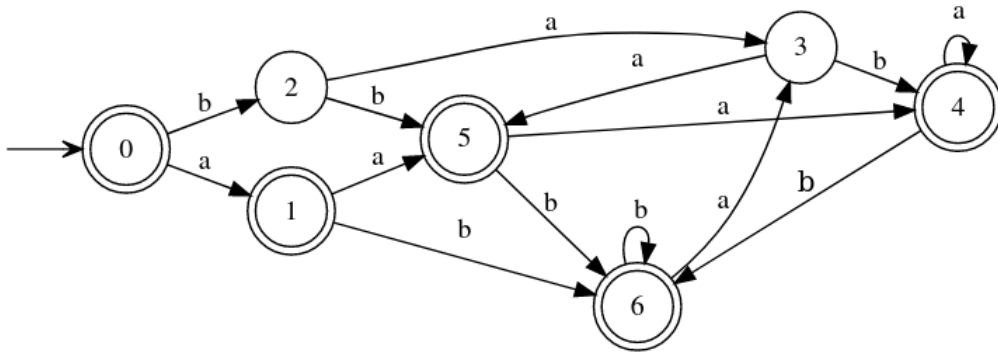
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

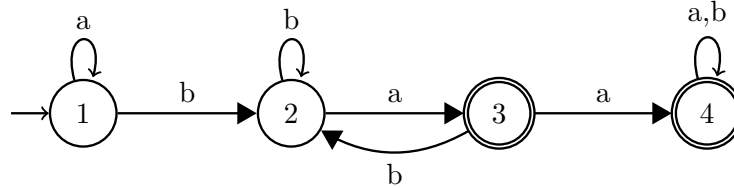
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

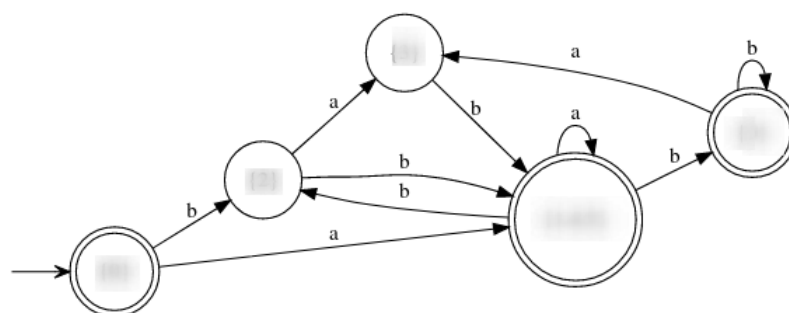
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 0 ☐ f 6 ☐ g 1

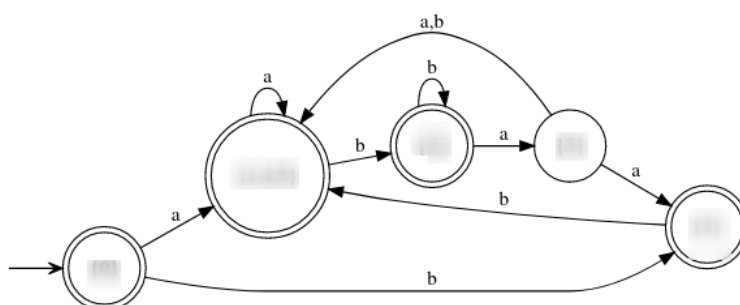
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

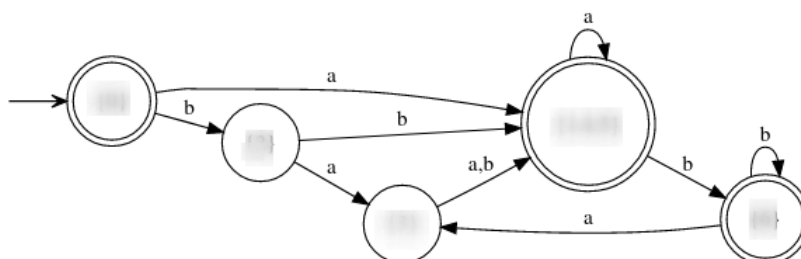
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



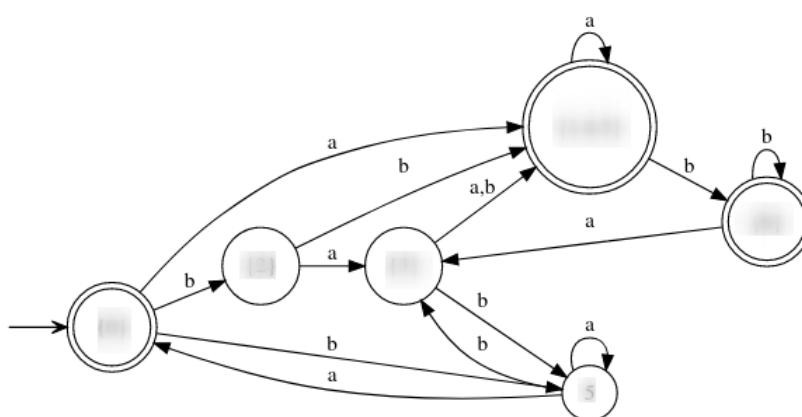
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

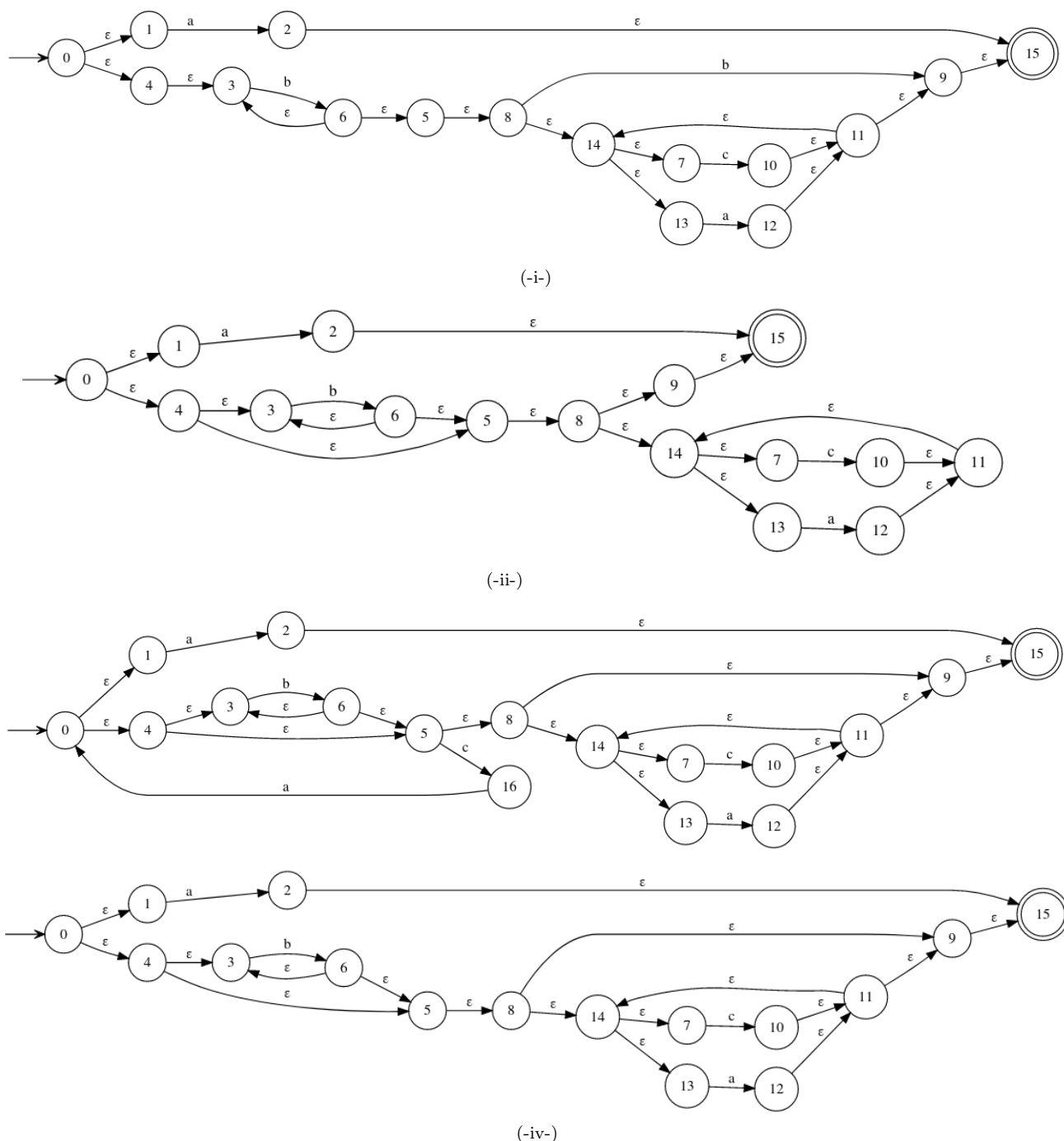


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b	c		e	f	g	h	i

Question 4 :

	b					g			j		l	m	n

Question 5 :

a	b			e	f			i	j

Question 6 :

a		c			f			i	j	k

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

	b		d	e

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a		c	d	e	f		h			k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

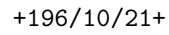
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ g Σ est fermé par préfixe.
- ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ d A a au moins un état non accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ f A n'a pas d'état accepteur.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u est accepté par A . ☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ A a des états accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ A possède un état puits ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A accepte le langage universel.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Un mot peut être infini. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.

☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

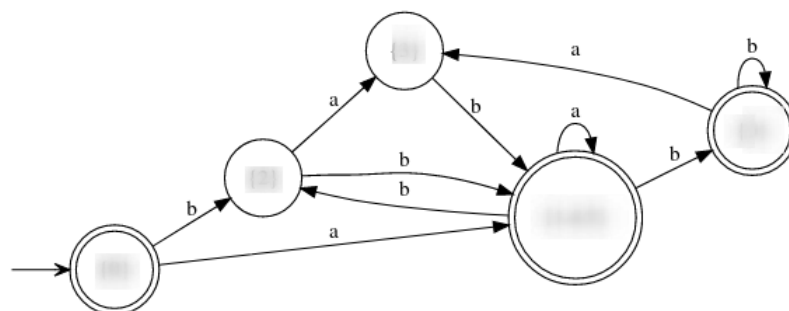
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 0 ☐ e 1 ☐ f 6 ☐ g 5

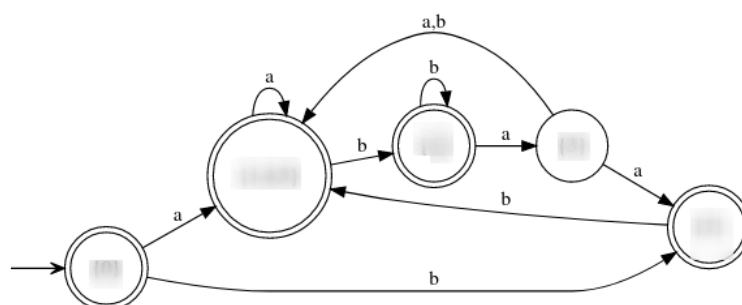
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

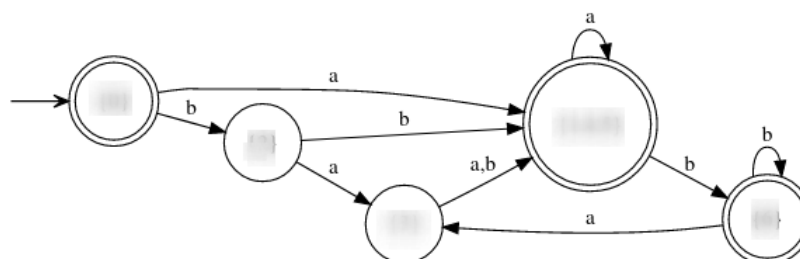
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



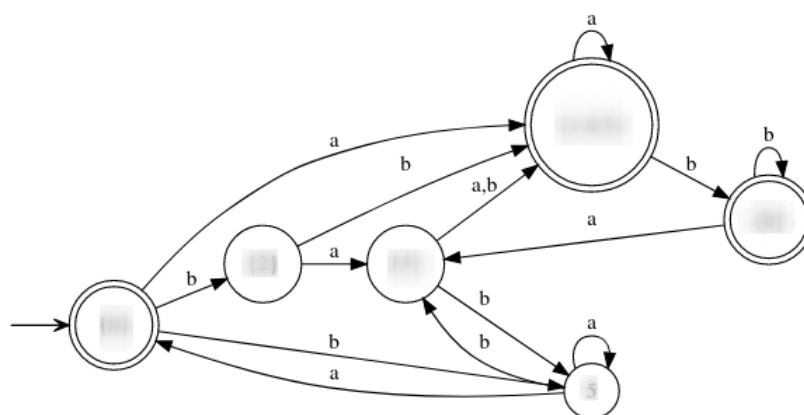
(-i-)



(-ii-)

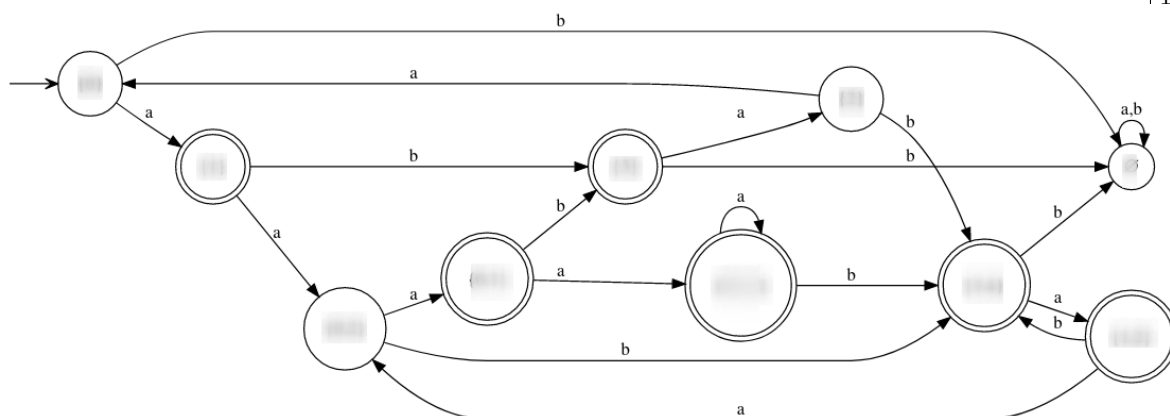


(-iii-)



(-iv-)

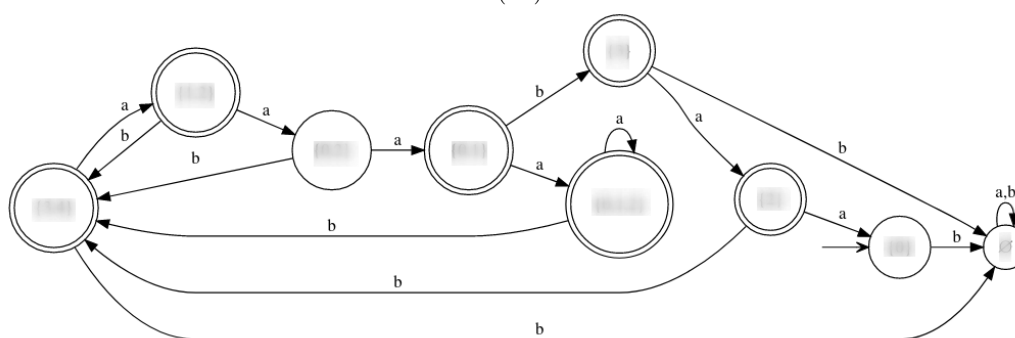
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

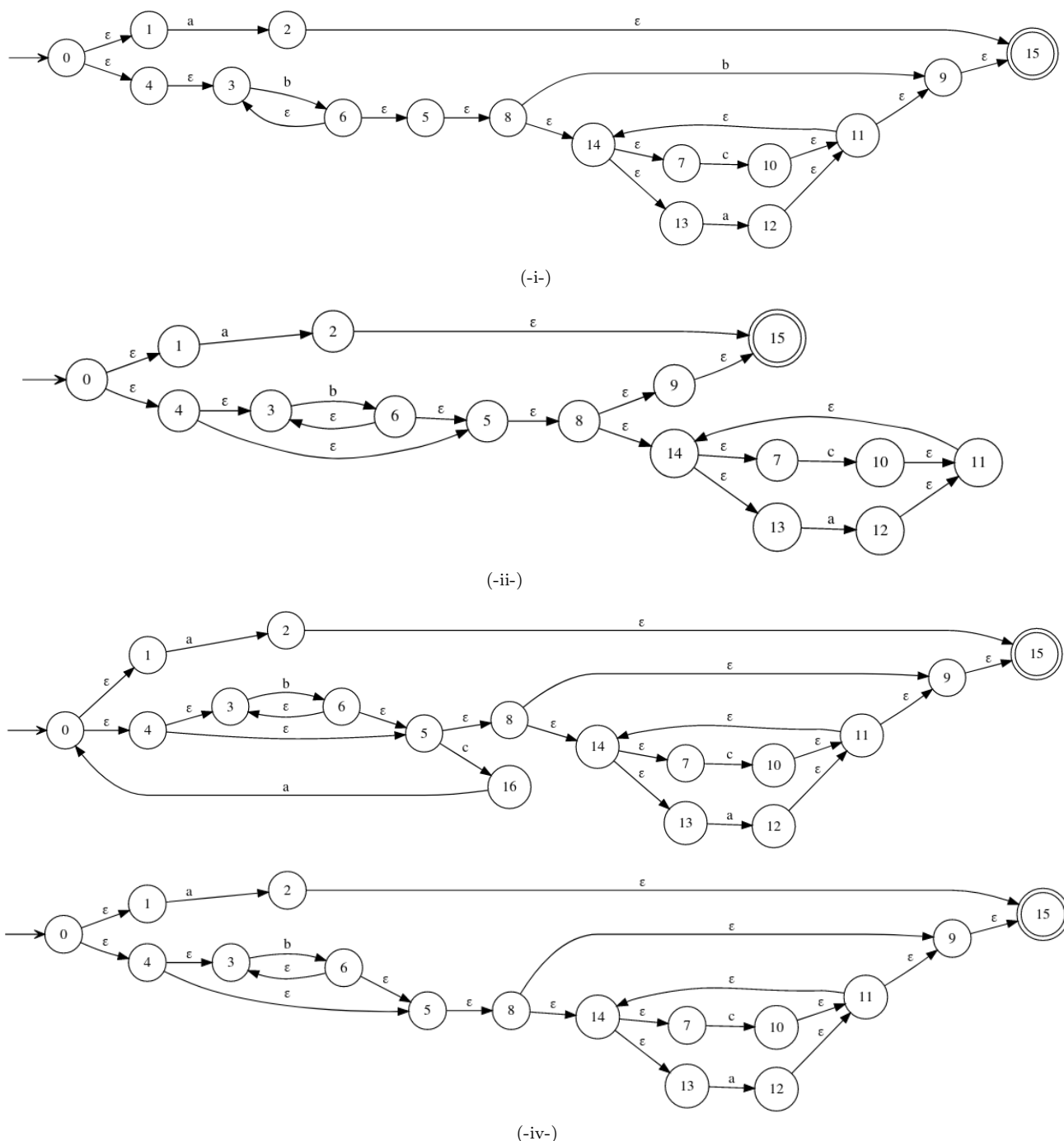


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

		c		e		g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

		c	d		f		h		j	k

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 8 :

		c	d	e	f							m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c		e	f		h	i	j		l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

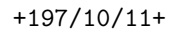
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Σ^* est fermé par préfixe.
☐ h Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état non accessible. ☐ c u n'est pas accepté par A .
☐ d A n'est pas complet.
☐ e Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état co-accessible. ☐ g A a au moins un état non co-accessible.
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ i A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.

- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une fonction.
- ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☒ Un mot est une application.
- ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ g Un mot peut être infini.
- ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ Un mot peut être vide.
- ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d A est complet.
- ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-.
- ☒ la Figure 3-iii-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-.
- ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-.
- ☐ b la Figure 4-iv-.
- ☐ c la Figure 4-iii-.
- ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

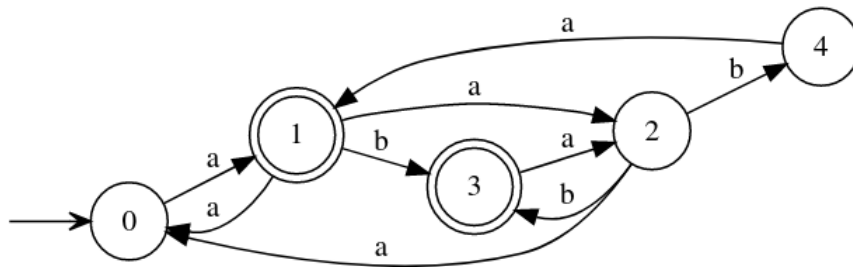
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

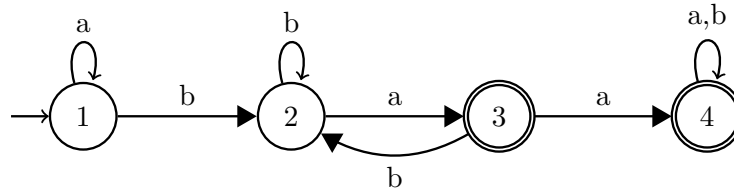
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

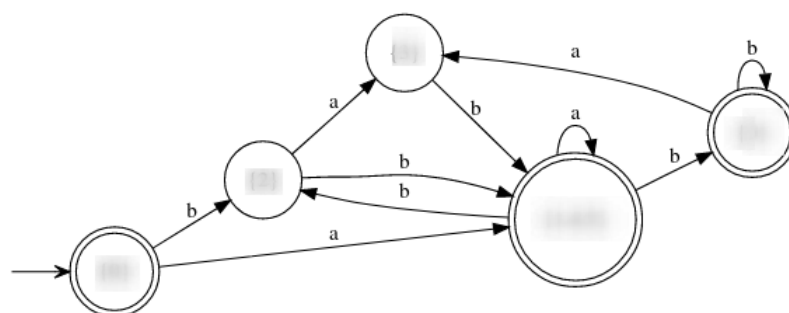
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 0 ☐ d 6 ☐ e 2 ☐ f 1 ☐ g 3

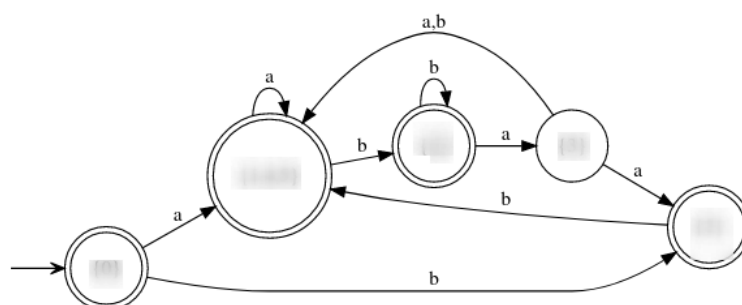
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

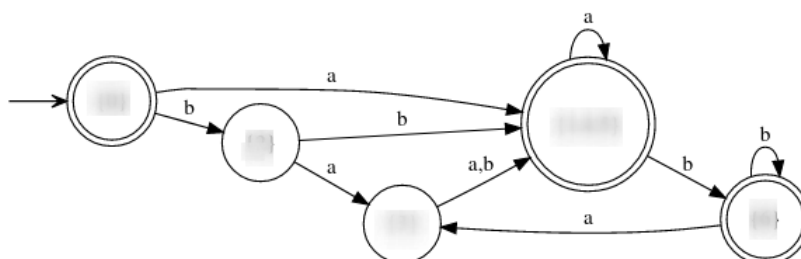
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



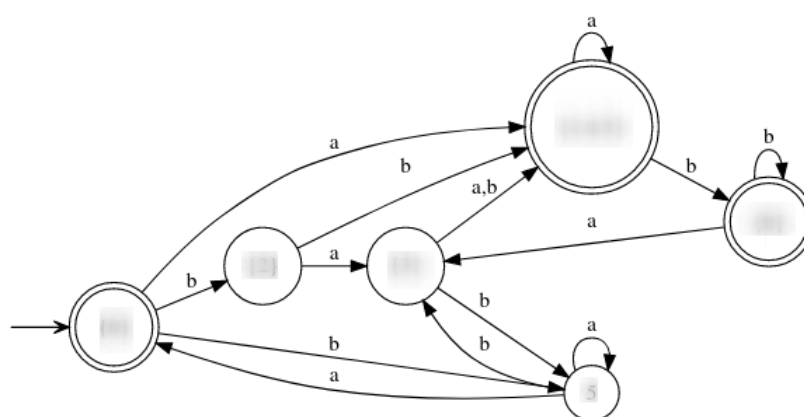
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 3 :

	b	c		e	f			i	j

Question 4 :

	b				f	g	h		j	k

Question 5 :

	b		d	e

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

	b		d			g					l	m	n

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c		e	f	g	h			k		m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

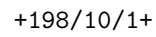
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☒ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☒ e Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☒ g Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ d u est accepté par A .
- ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible.
- ☒ b A n'est pas complet.
- ☐ c A a au moins un état non accessible.
- ☒ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a au moins un état non co-accessible.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A possède un état puits ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_4 = (a+b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a+b)X_4$
☒	$X_4 = (a+b)^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a+b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

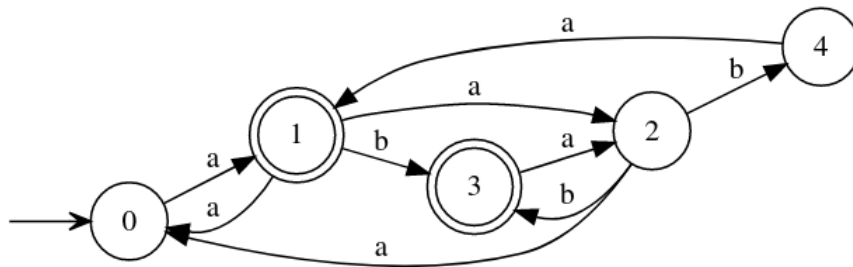
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

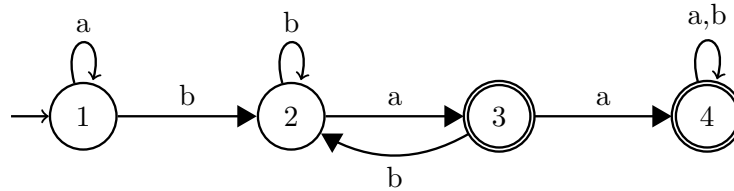
☐ a	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

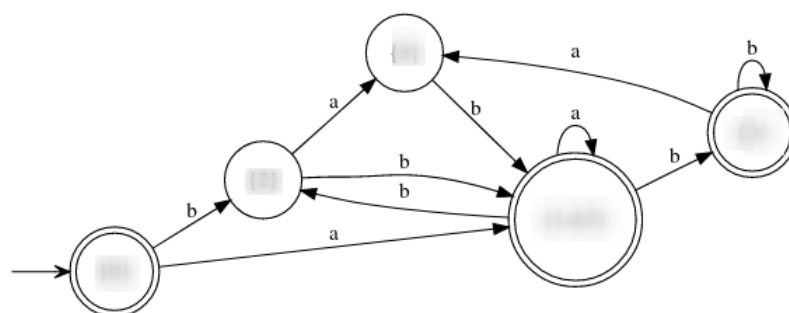
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ b 4 ☐ c 2 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 0

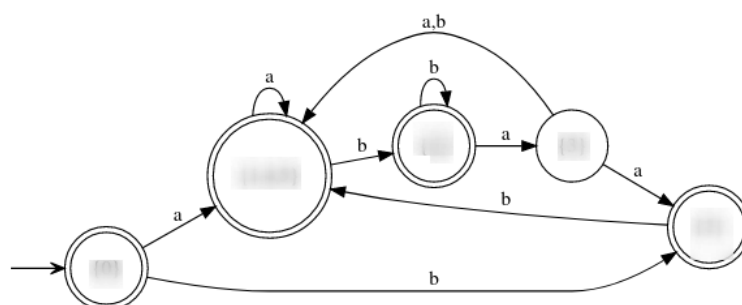
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

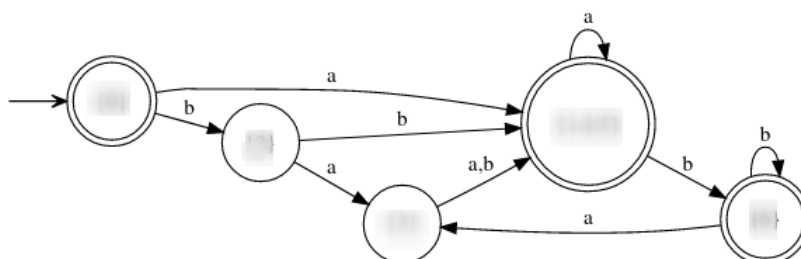
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



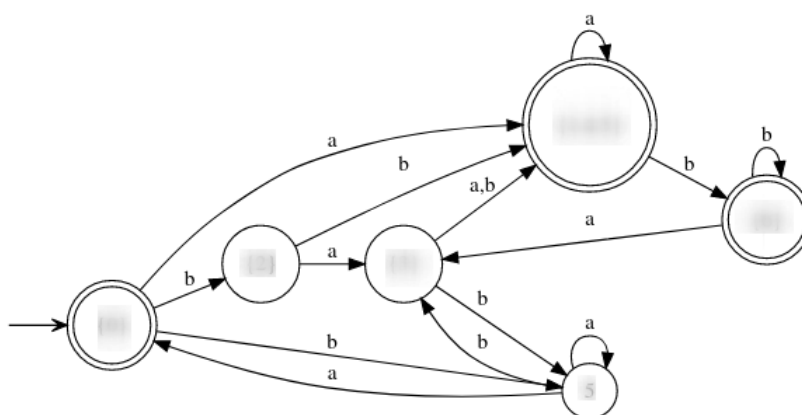
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

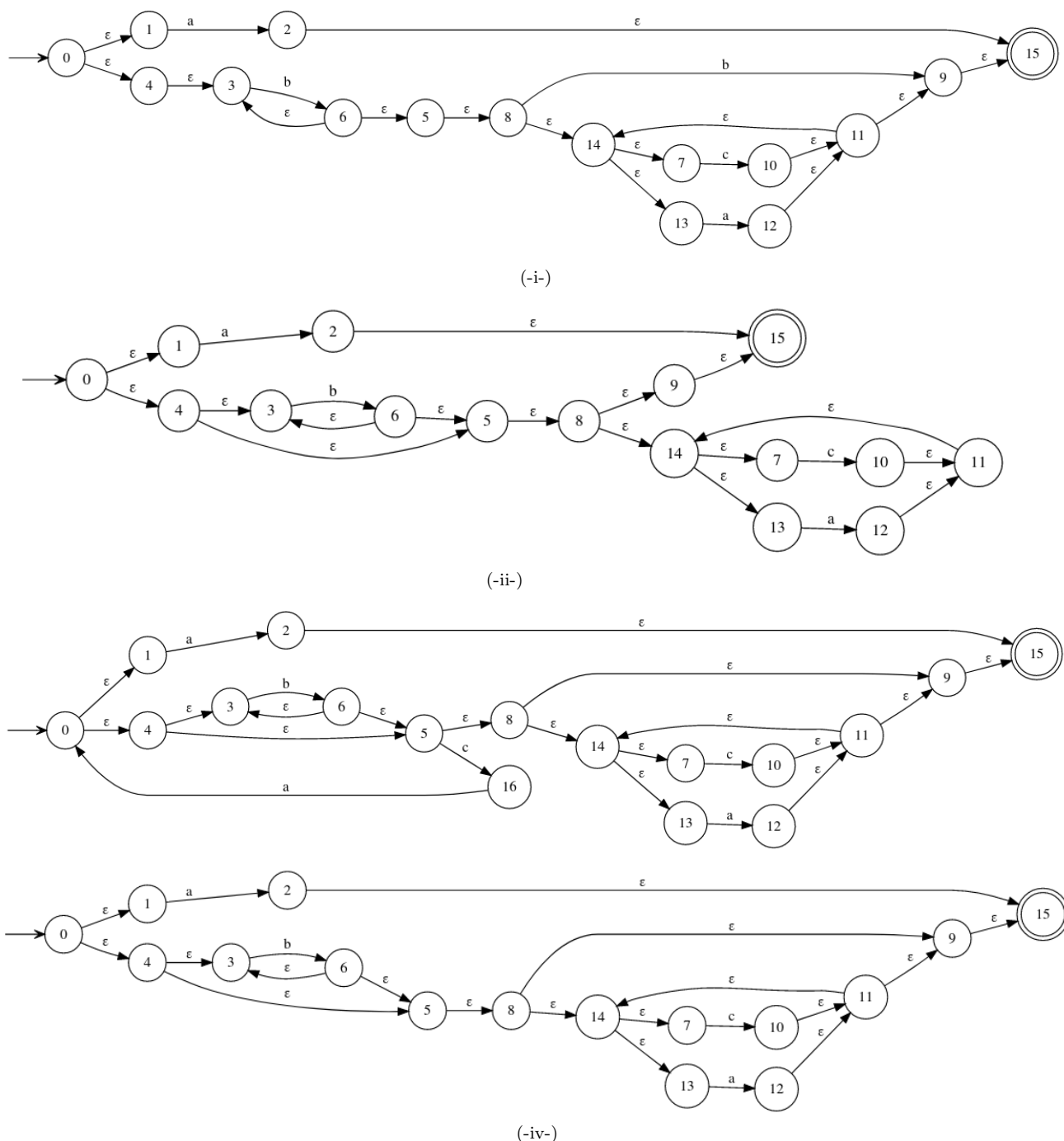


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

	b	c			f		h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a		c			f			i	j	k

Question 6 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 7 :

a	b					g						l	m	n

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c	d	e		g		i	j	k		m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

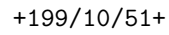
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ b P est forcément déterministe.
- ☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
- ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c A accepte le langage universel.
- ☒ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☒ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ c Un mot peut être infini.
- ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☒ f Un mot peut être vide.

- ☐g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐b Σ est fermé par facteur. ☐c Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐g Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐a A est complet. ☐b Les états de A sont tous accessibles. ☐c u est accepté par A .
☐d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐e A a des états accepteurs. ☐f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐a A a au moins un état non accessible. ☐b A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état accessible. ☐d A a au moins un état non co-accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐f A n'a pas d'état accepteur.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐a la Figure 3-ii-. ☐b la Figure 3-iii-. ☐c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐c la Figure 3-i-. ☐d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐a la Figure 4-iii-. ☐b la Figure 4-iv-. ☐c la Figure 4-ii-. ☐d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
				☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

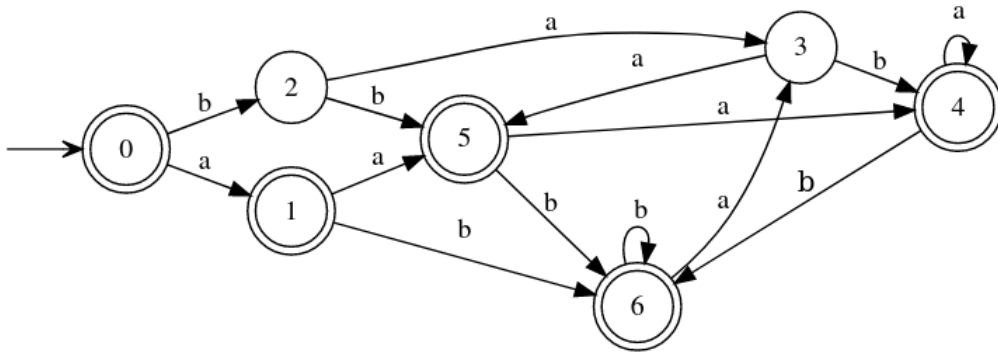
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

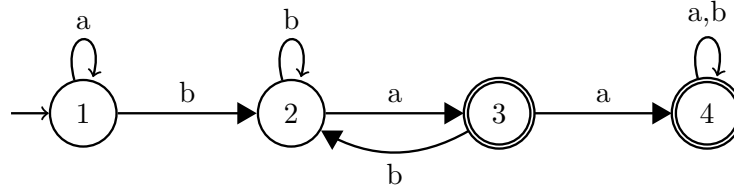
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 1 ☐ c 3 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

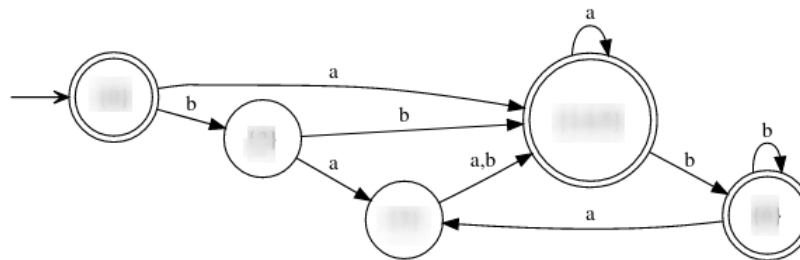
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



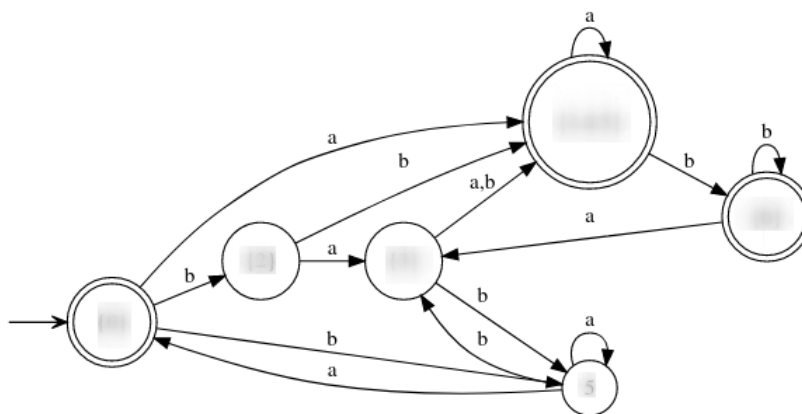
(-i-)



(-ii-)

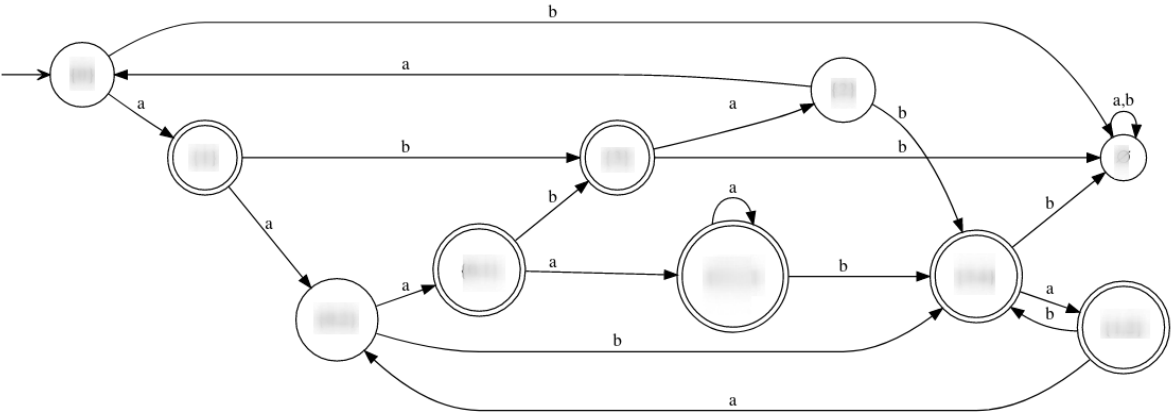
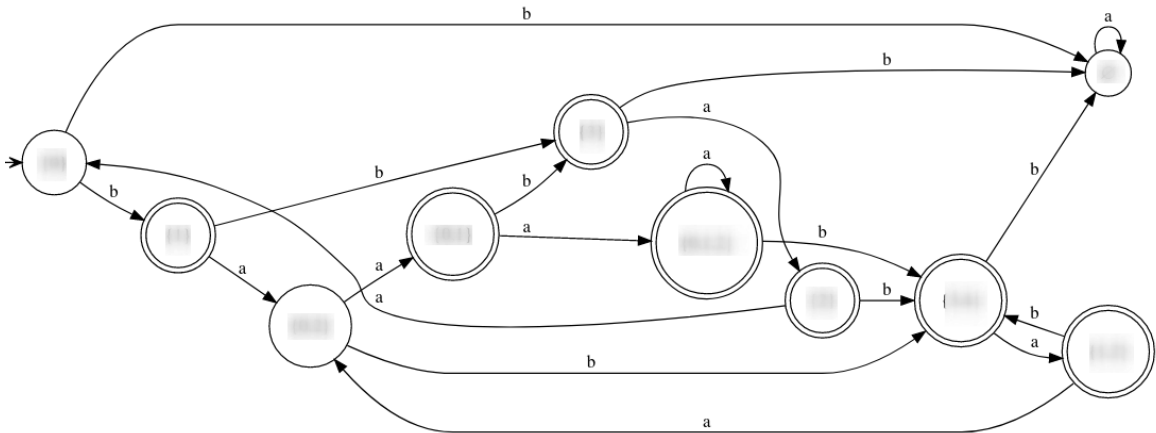


(-iii-)

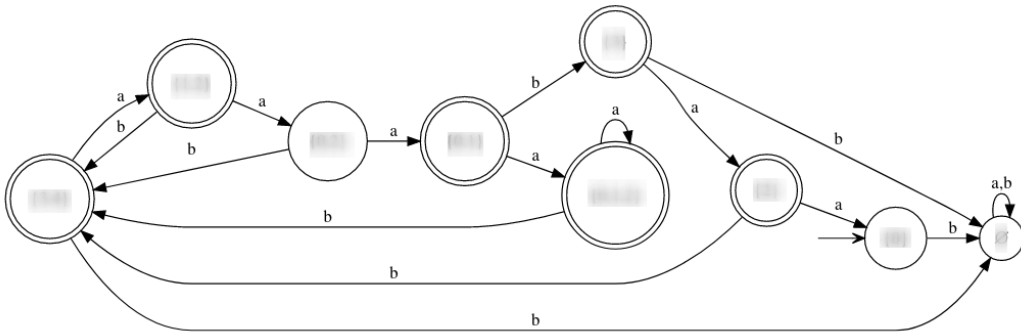


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

 $(-\mathbf{i}-)$ 

(-ii-)



(-iii-

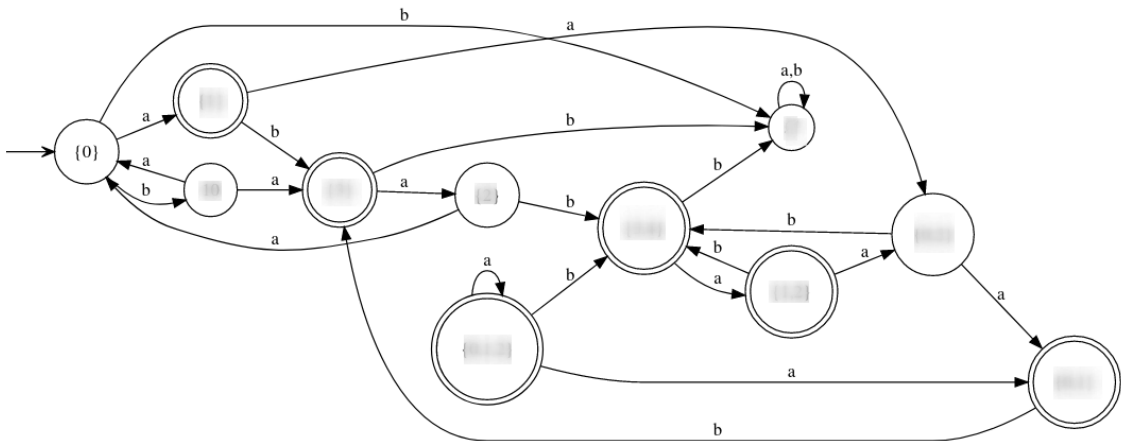
 $(-i\nu -$

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 5 :

	b	c	d			g						m	n

Question 6 :

	b	c			f	g		i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b		d		f				j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c	d	e			h	i		k	l	

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

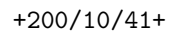
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. A single solid line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ A est complet.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A .

☐ f A a des états accepteurs.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état accessible. ☐ e A a au moins un état non accessible.

☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.

☐ h A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ b A accepte le langage universel. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ e Tous les états de A sont accepteurs. ☐ f A possède un état puits

☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

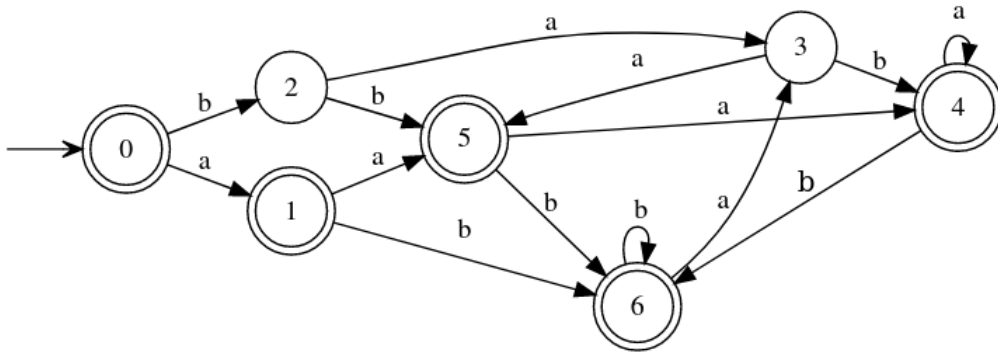
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☐ c 3 ☒ d 4 ☐ e 2 ☐ f 0 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

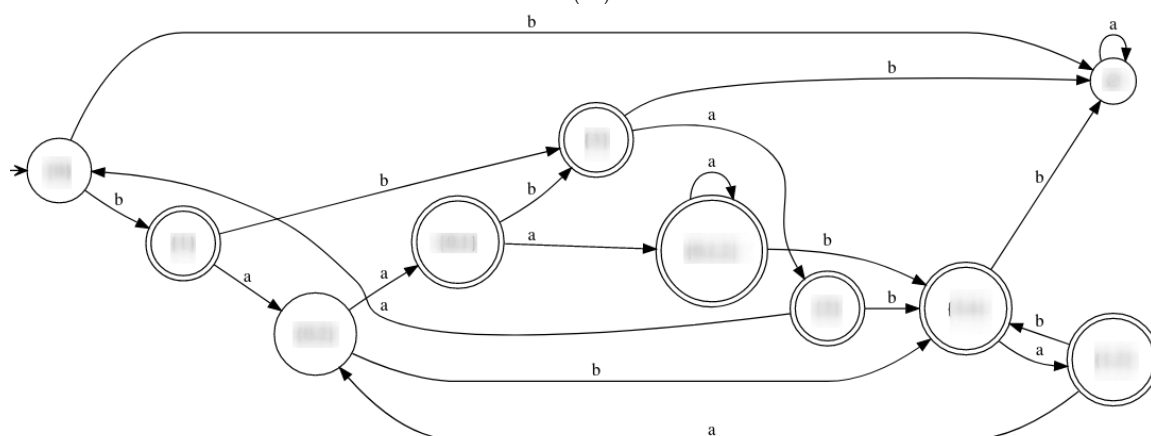


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

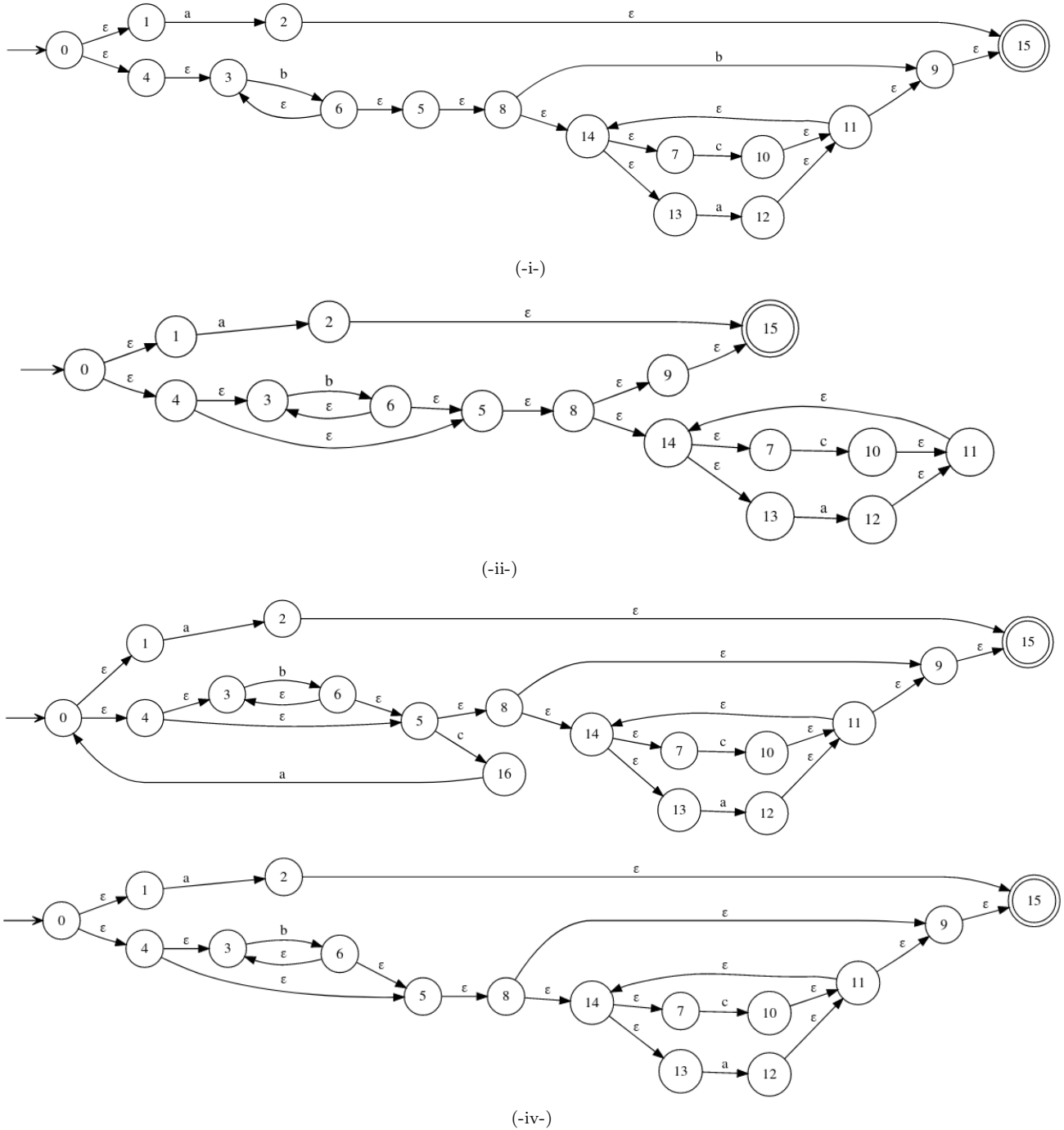


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f g  i j

Question 3 :    d  f g  i    m n

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a    e f  h  j k

Question 7 :  b  d e

Question 8 :  b c  e f g h i

Question 9 : a b c  e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a    e f g h i j k l 

Question 12 : a  c d e f g h

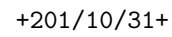
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ b P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ b A est complet.
- ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ c A possède un état puits
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ f A accepte le langage universel.
- ☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot est une fonction. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

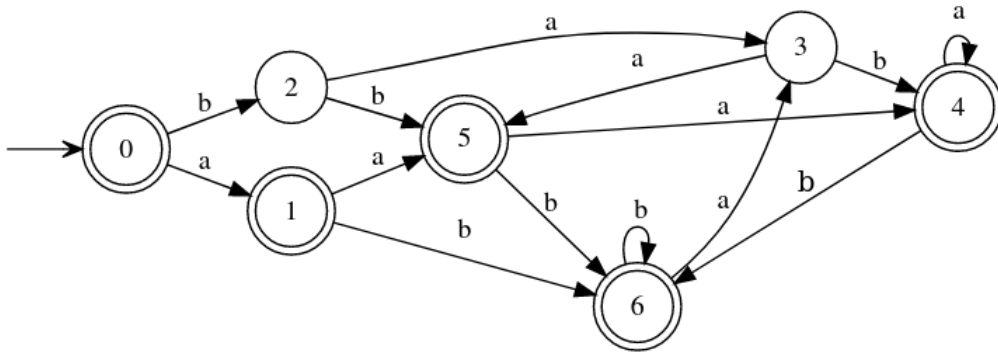
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 3 ☐ c 2 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

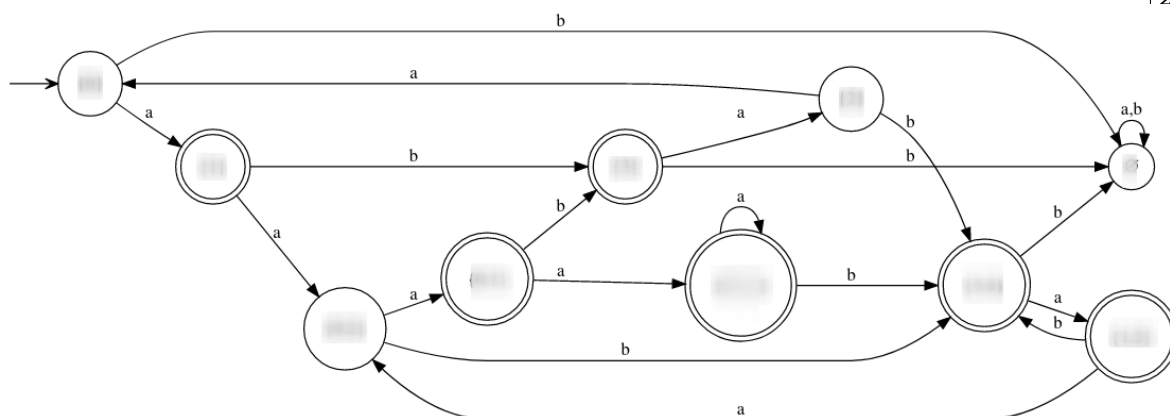


(-iii-)



(-iv-)

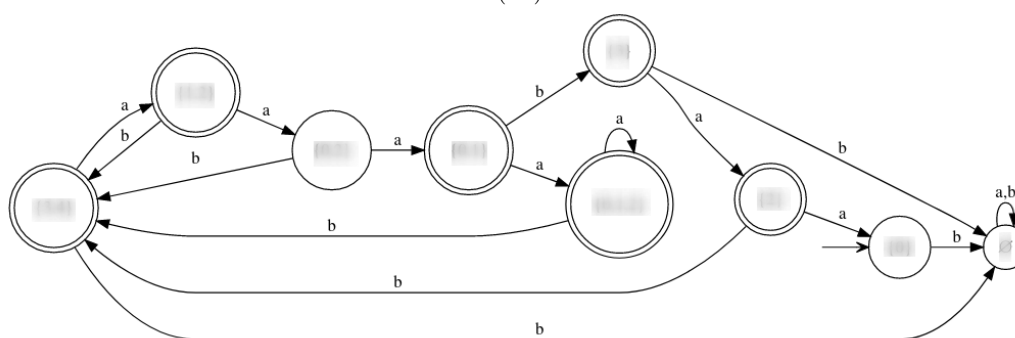
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



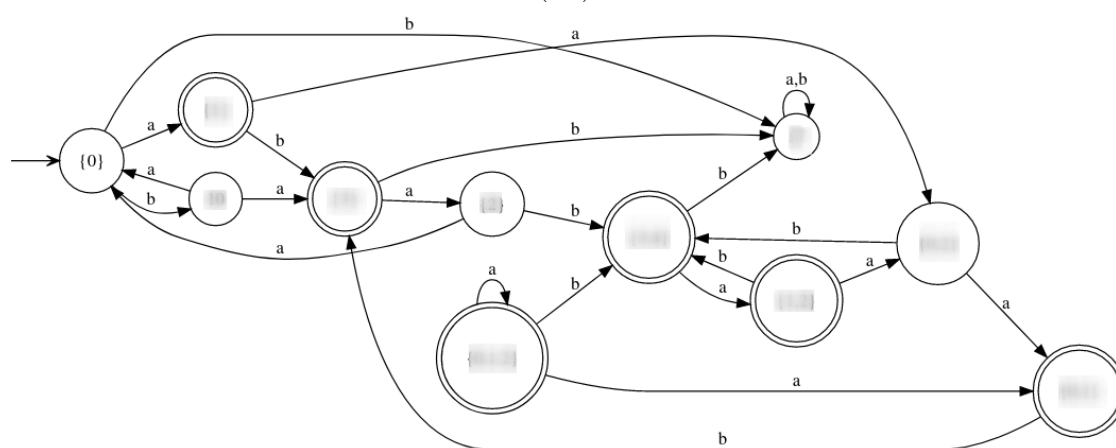
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

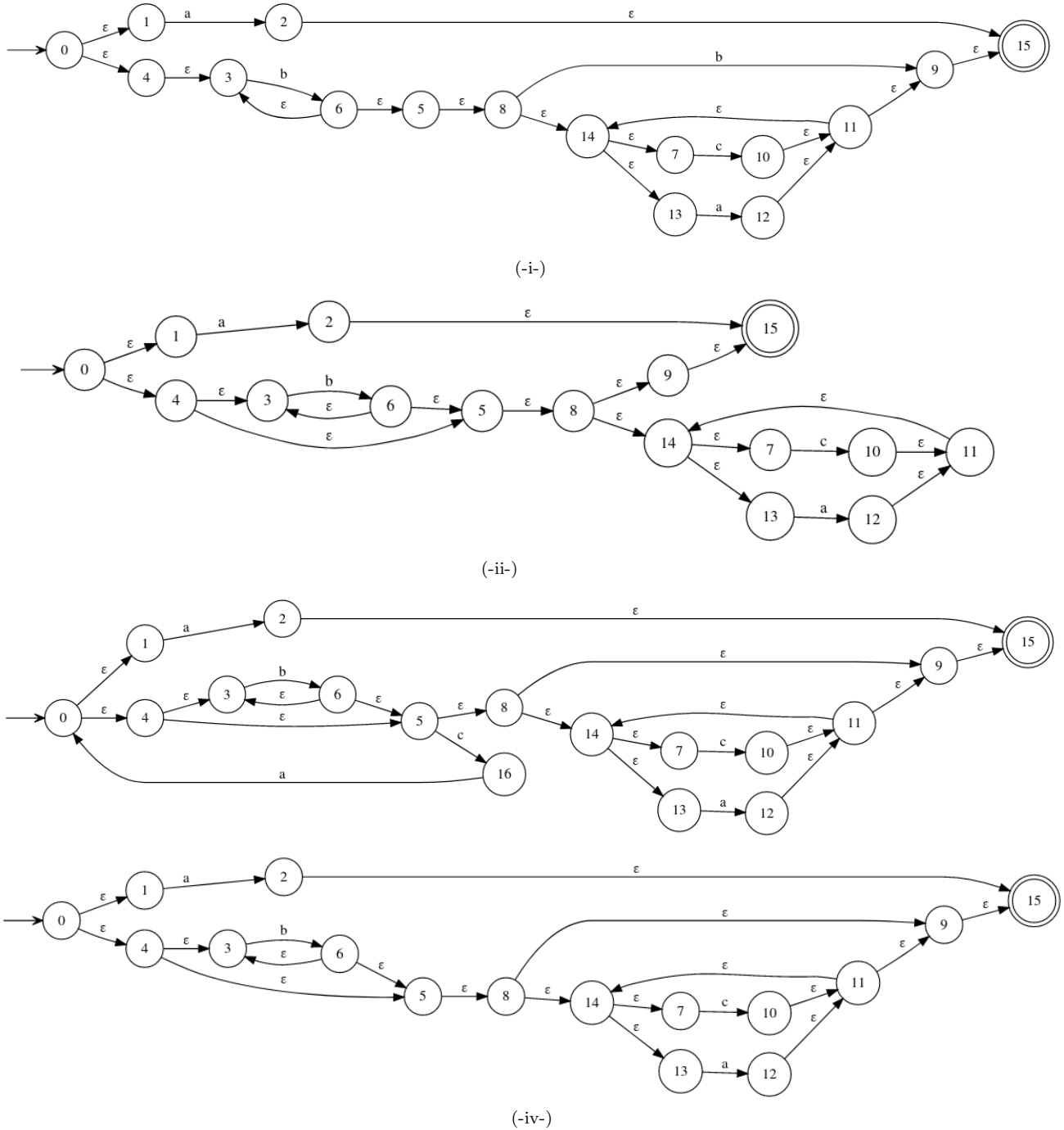


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

	b	c	d	e	f		h	i

Question 6 :

a		c		e	f			i	j

Question 7 :

	b	c	d					i	j	k

Question 8 :

	b						h	i	j			m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b			e	f	g	h		j	k	l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

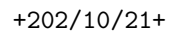
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ f Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot est une application.
☐ g Un mot peut être infini. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e u est accepté par A . ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
- ☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c A accepte le langage universel. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ e Tous les états de A sont accepteurs. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☒ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ b A n'est pas complet. ☐ c A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ d A a au moins un état accessible. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
- ☒ f u n'est pas accepté par A . ☐ g A a au moins un état non accessible.
- ☒ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

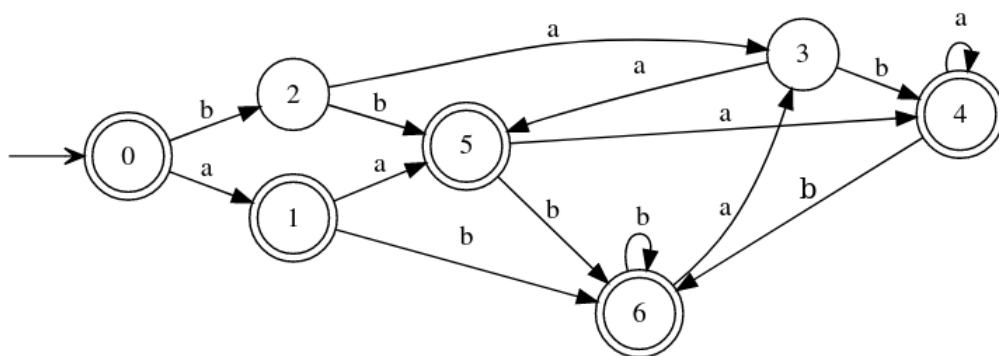
☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

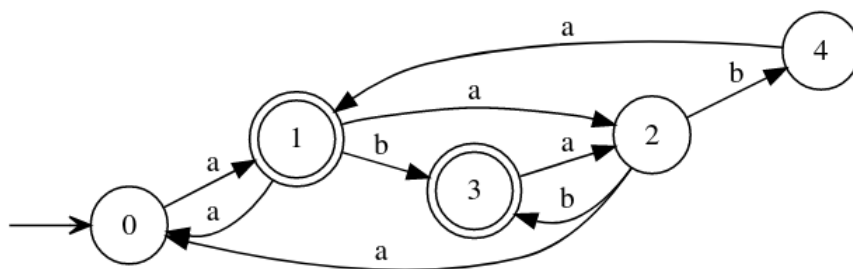
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

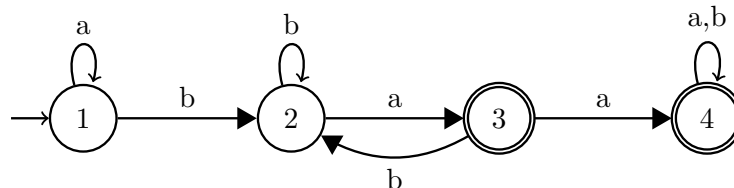
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

- ☐ a 0 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 2 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

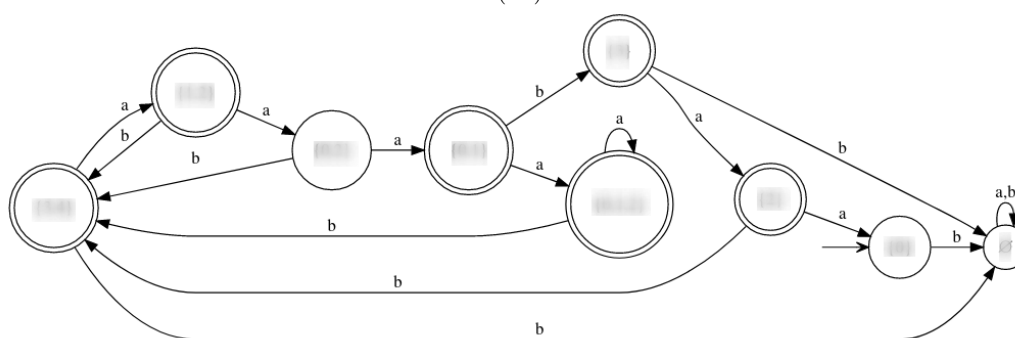
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



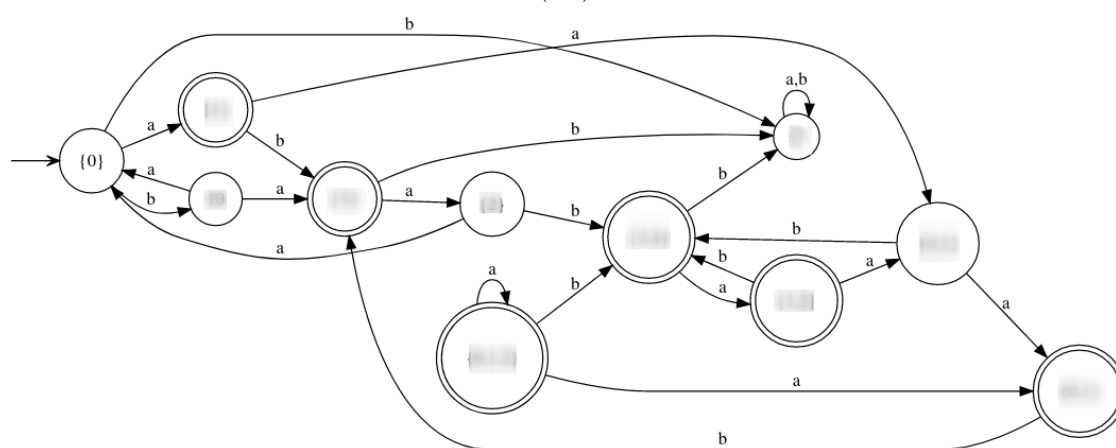
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

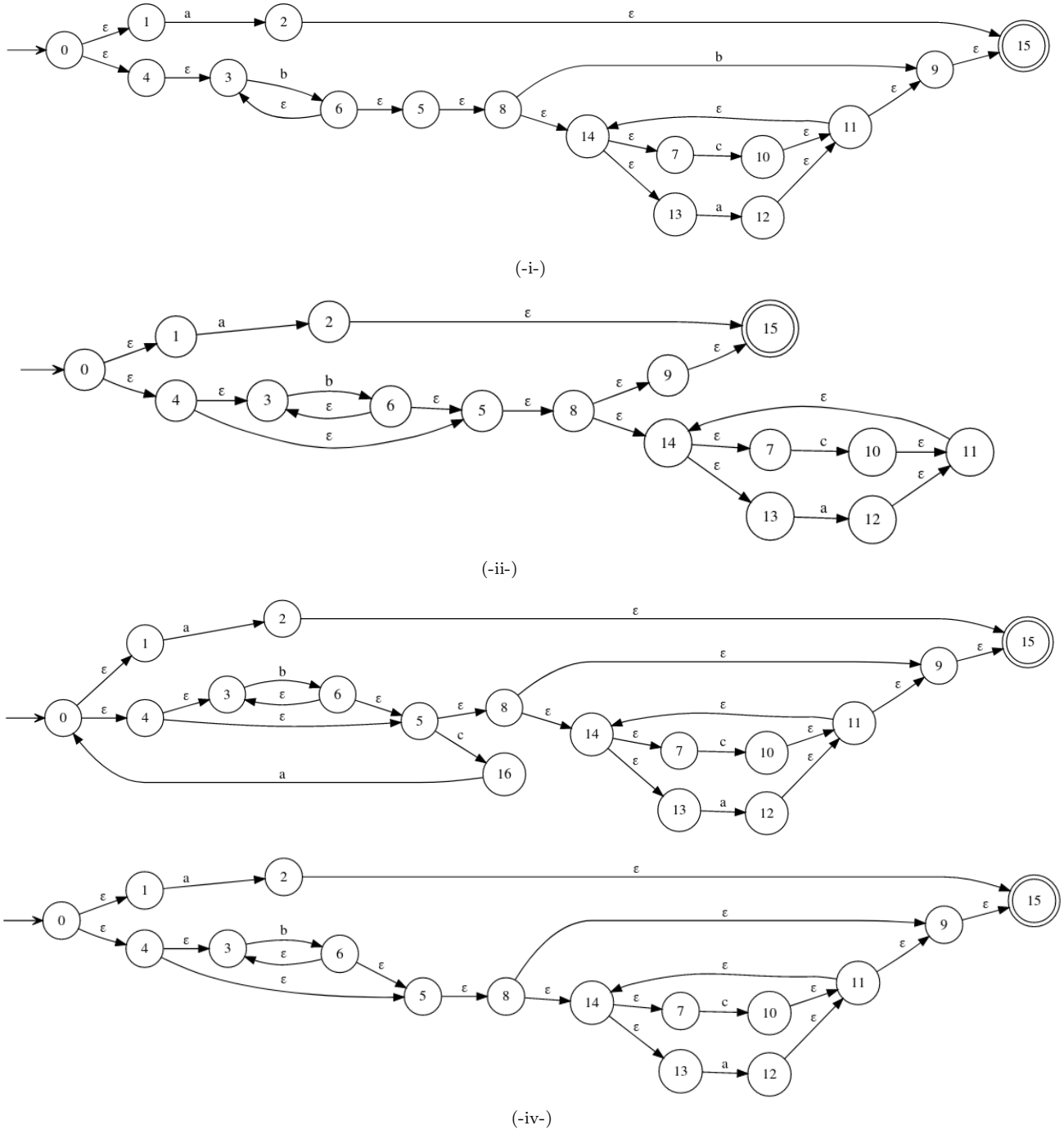


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b				f		h	i	j

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a				e		g			j			m	n

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 8 :

		c		e		g		i	j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d	e	f	g	h		j			m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

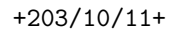
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]



Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a n'est pas complet. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ u $\notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ h A a au moins un état non co-accessible. ☐ i A a au moins un état non accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous accessibles. ☐ f u $\in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.

- ☐ f A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ g Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii- ☐ la Figure 3-iii- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv- ☐ d la Figure 3-i-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii- ☐ b la Figure 4-iv- ☐ la Figure 4-i- ☐ d la Figure 4-ii-

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

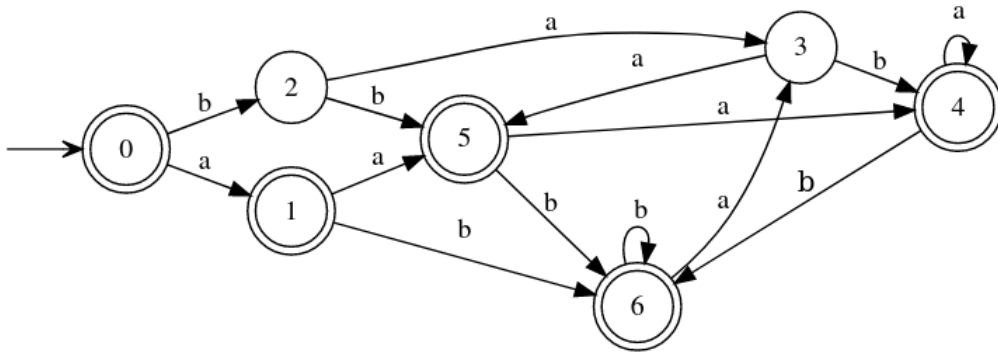
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

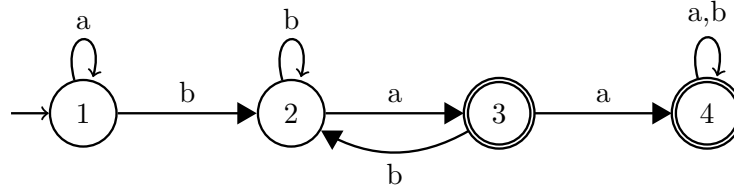
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 3 ☐ d 5 ☐ e 2 ☐ f 6 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

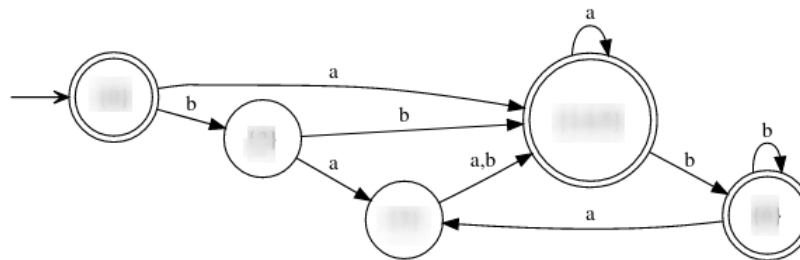
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



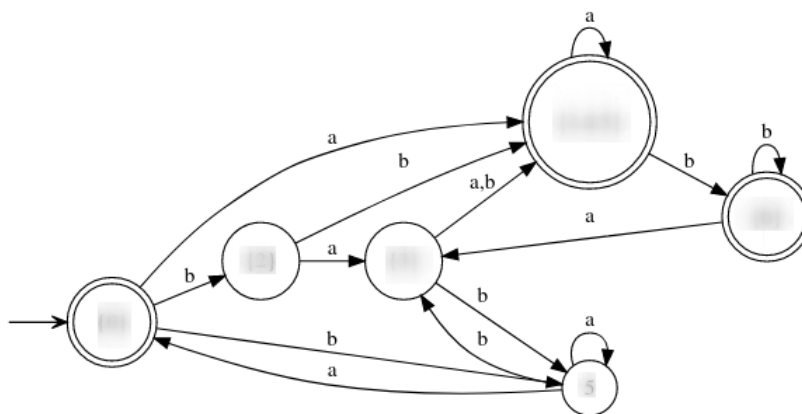
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

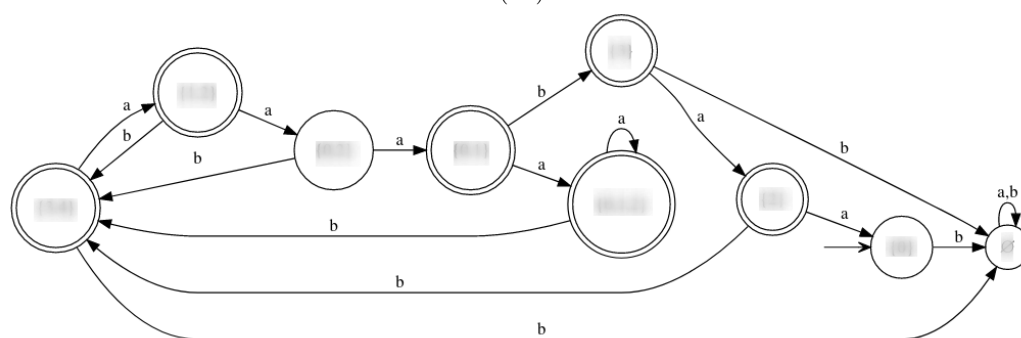


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

 $(-\mathbf{i}-)$ 

(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

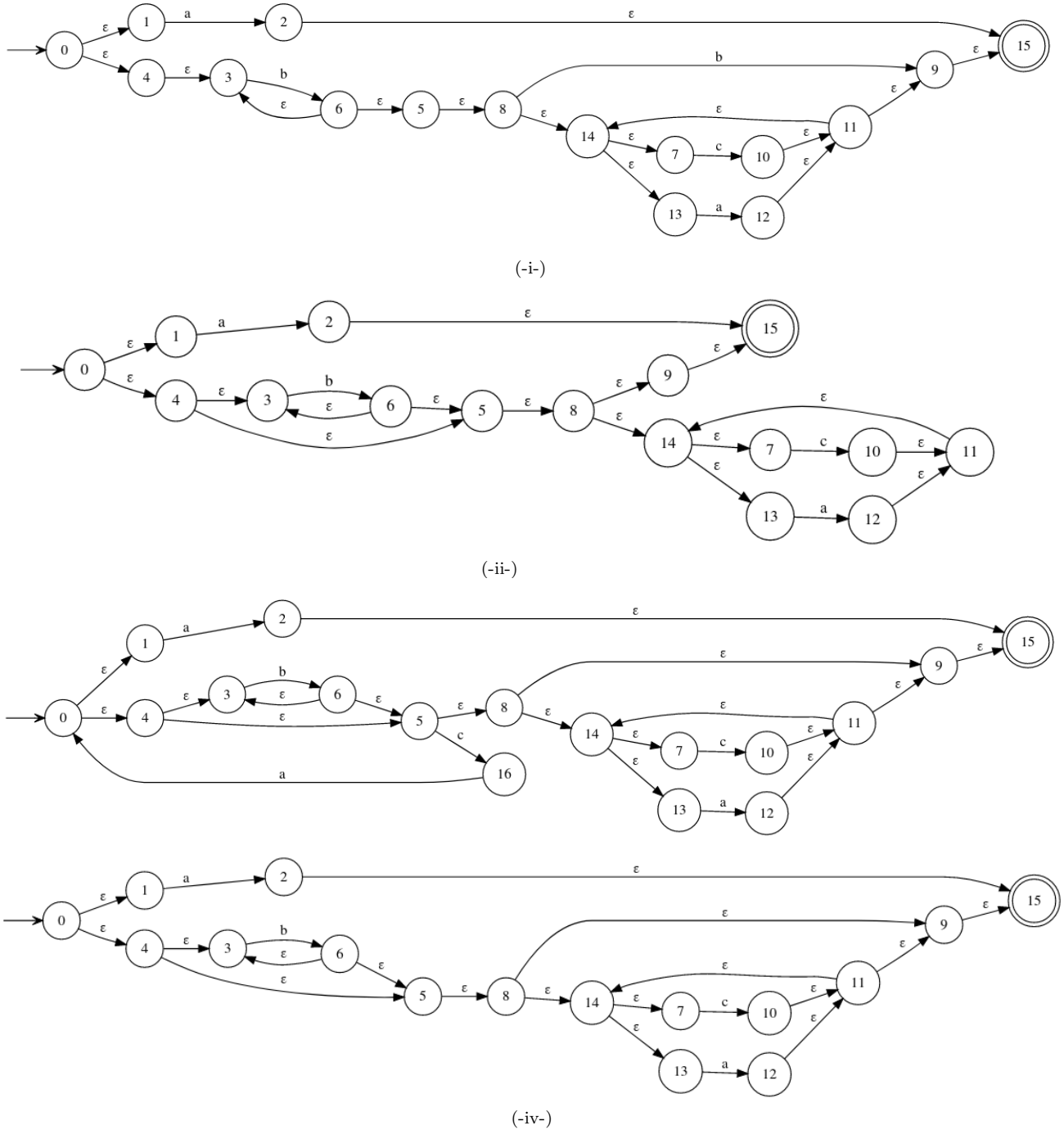


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c    h i j k

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b  d e f  h i

Question 6 : a b  d    h i j

Question 7 :  b  d e

Question 8 :  b   e  g   j   m n

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a  c d e  g  i j k  m

Question 12 : a b c d  f g h

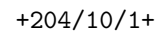
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal ruling lines. Each set consists of three lines: a solid black line at the top, a dashed black line in the middle, and another solid black line at the bottom. These sets are repeated vertically down the page, providing a guide for letter height and placement. The entire sheet is enclosed within a thin black rectangular border.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

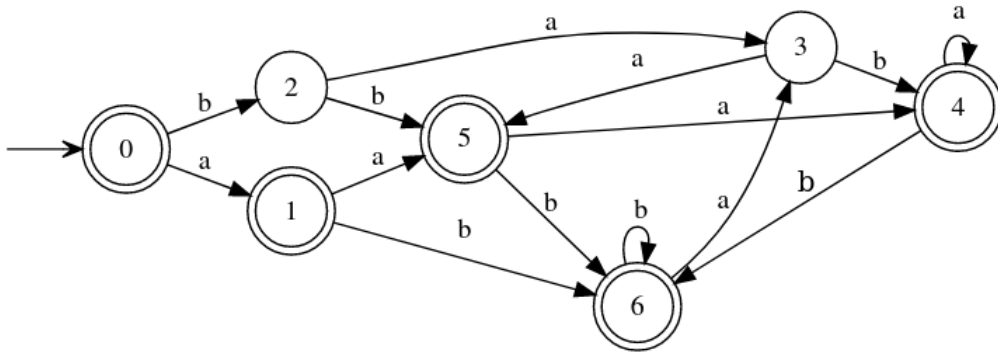
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

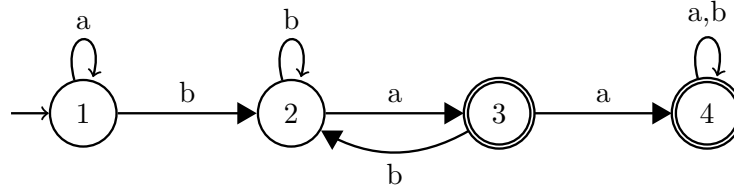
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 2 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 3

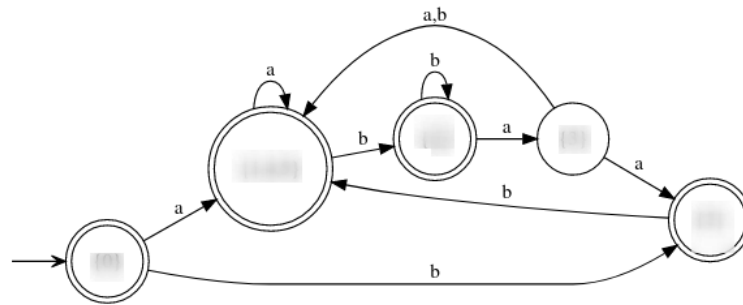
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

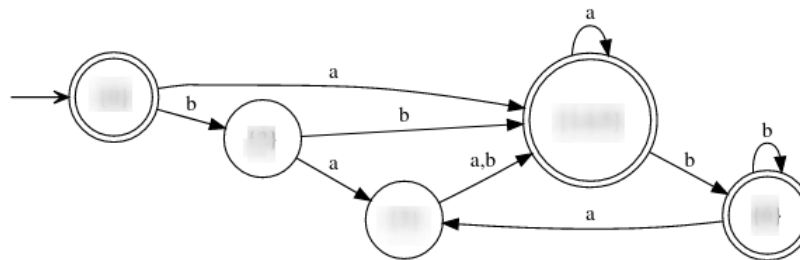
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



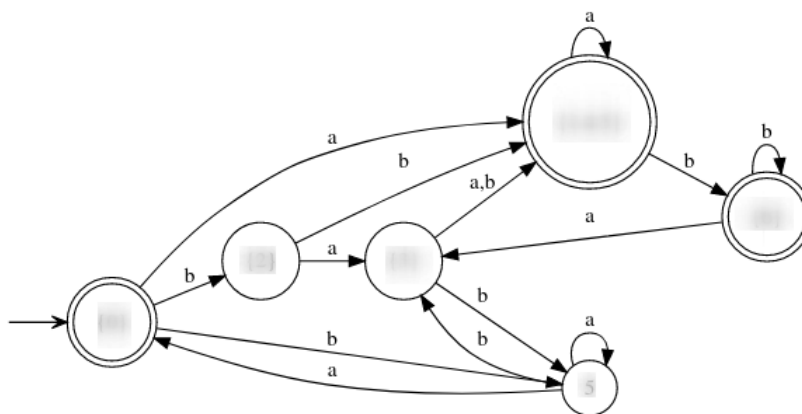
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

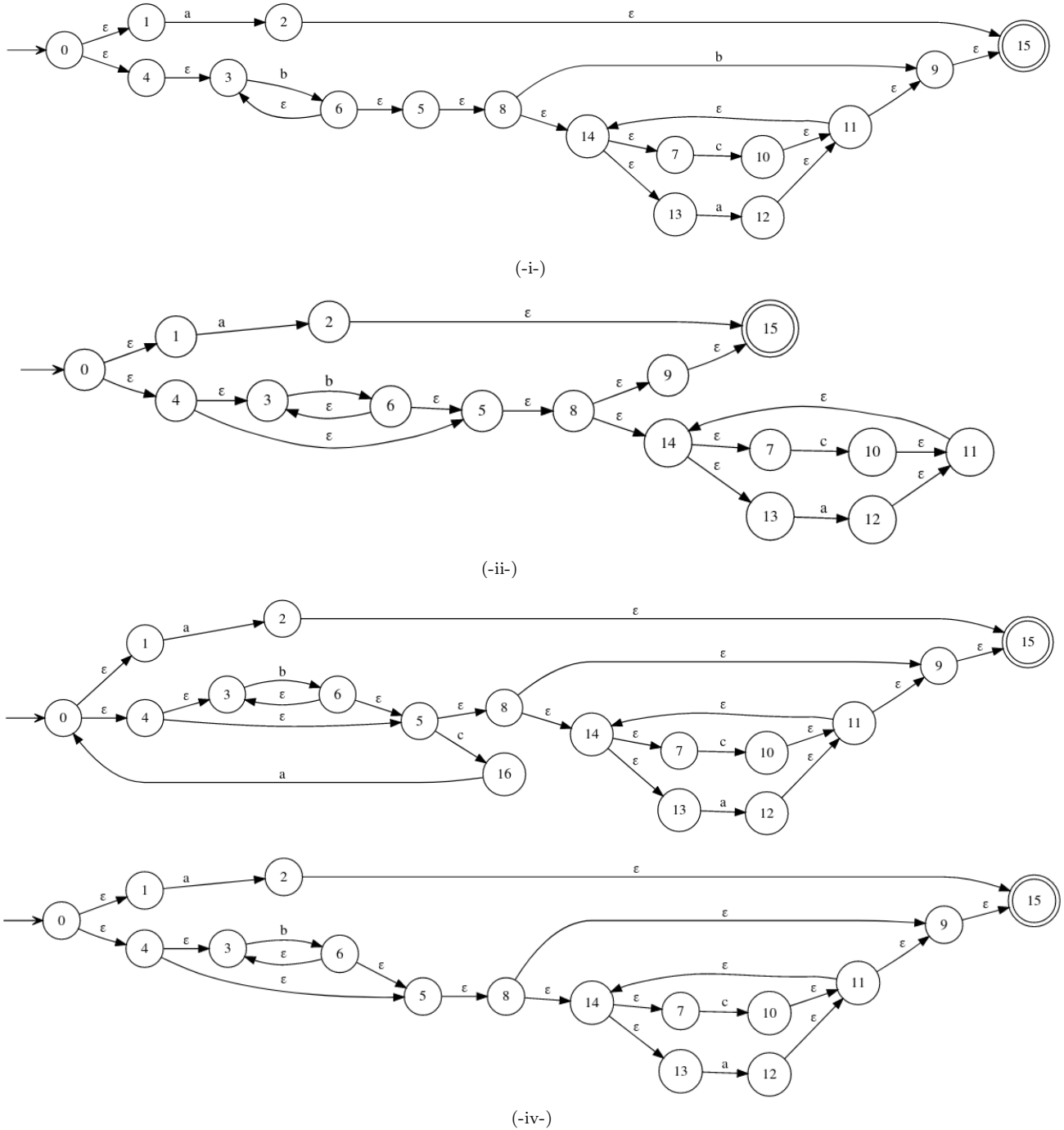


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ f ☐ g ☐ i ☐ j ☐ k

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 5 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ ☐ f ☐ h ☐ i ☐ j

Question 7 : ☐ ☐ b ☐ ☐ d ☐ e

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 9 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h ☐ ☐ ☐ k ☐ l ☐

Question 12 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

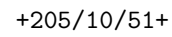
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ ☐ b

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☐ c u n'est pas accepté par A . ☐ d A a au moins un état accessible.
☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ f A n'est pas complet.
☐ g A a au moins un état co-accessible. ☐ h $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ c Σ^* est fermé par préfixe.
☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Σ^* est fermé par suffixe. ☐ f Σ est fermé par préfixe.
☐ g Σ est fermé par suffixe. ☐ h Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

- ☐ e Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixes. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot est une application.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A possède un état puits ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_4 = a + b$ ☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$ ☐ c $X_1 = aX_1 + b$ ☐ d $X_4 = (a + b)X_4$
☐ e $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ f $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ h $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ i $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ l $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☐ m $X_3 = aX_2 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☒ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ b $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ c $X_4 = a + b$ ☐ d $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ f $X_4 = a^* + b^*$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_1 = a^+bX_2$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ b $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

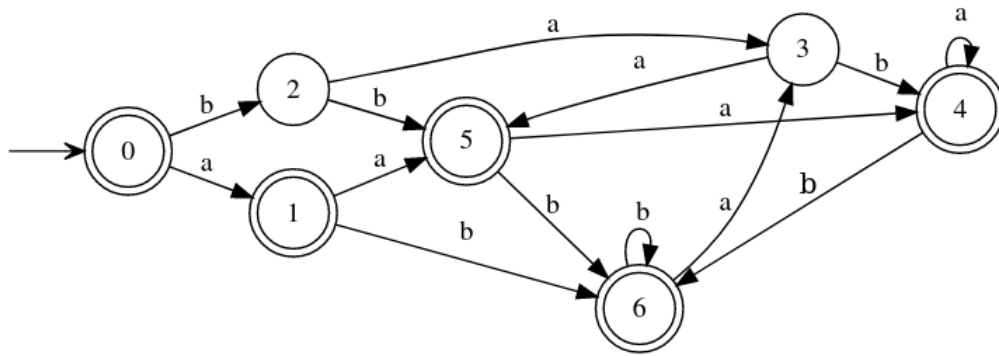
- ☐ a $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ b $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$ ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

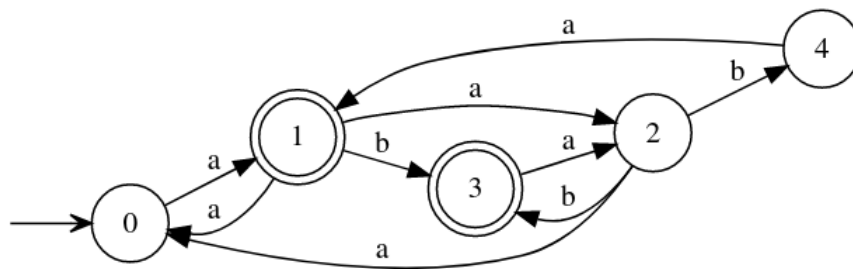
- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

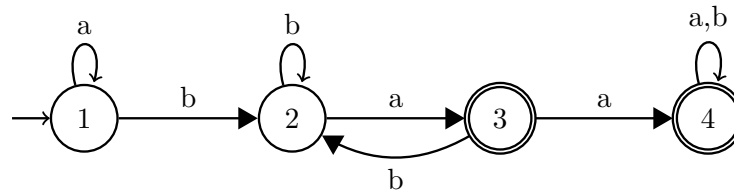
- ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ c $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☐ c 0 ☐ d 2 ☐ e 3 ☒ f 4 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

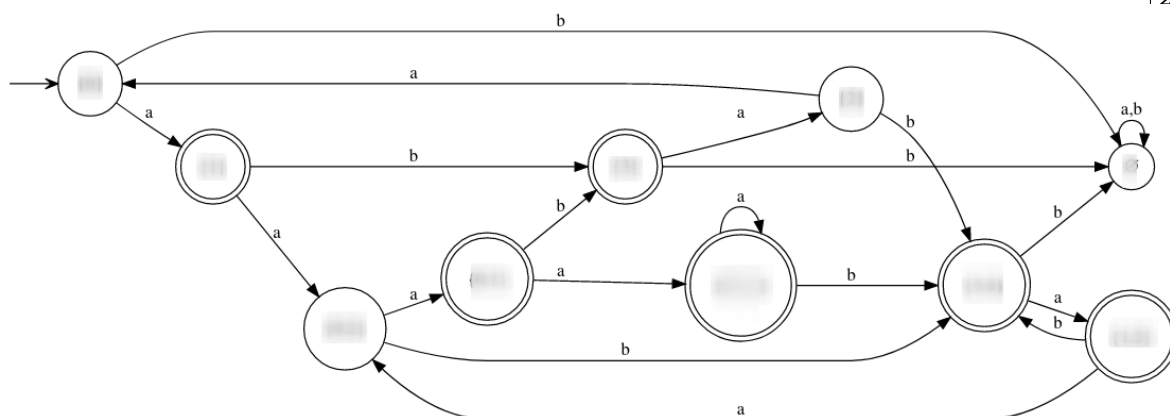


(-iii-)



(-iv-)

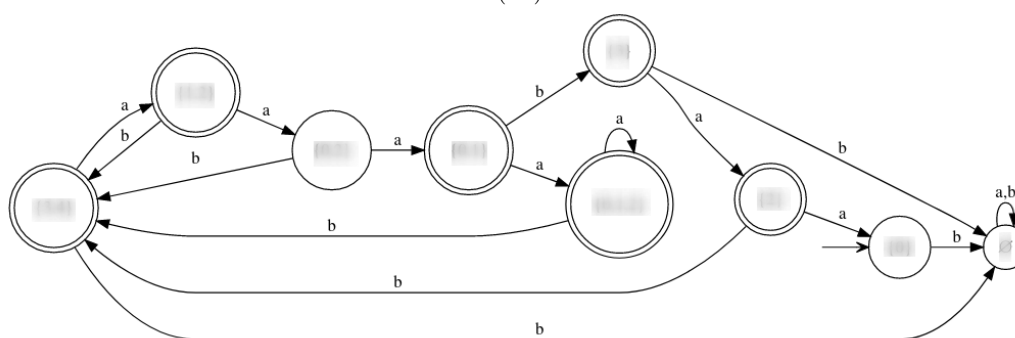
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



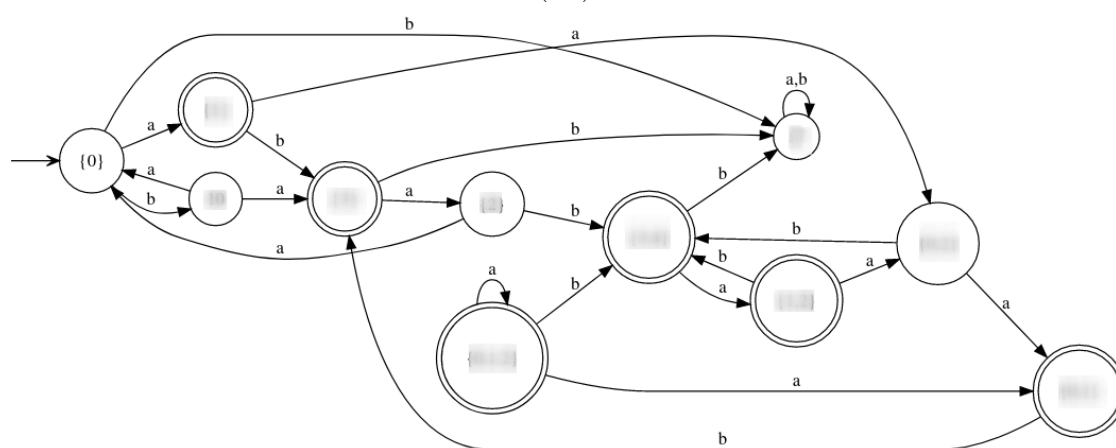
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e		g			j	k

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

	b		d		f	g		i	j

Question 5 :

				e		g				k	l	m	n

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e	f		h	i			l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

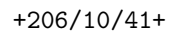
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ b Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe.
- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ g Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ c Un mot est une fonction.
- ☐ d Un mot peut être vide.
- ☐ e Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot est une application.
- ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ i Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ l Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet. ☐ c A a au moins un état non accessible.
☒ A a au moins un état accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
☒ u n'est pas accepté par A . ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c A est complet.
☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a+b)^*$	☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

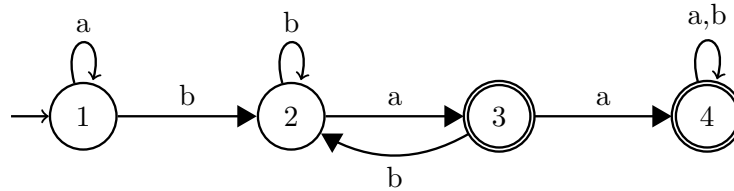
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 0 ☐ c 1 ☒ d 4 ☐ e 2 ☐ f 3 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

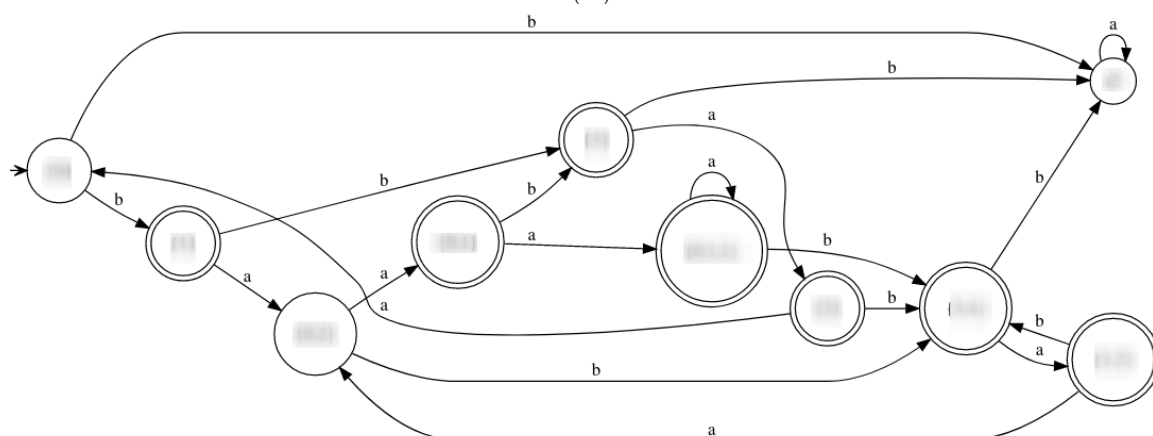


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



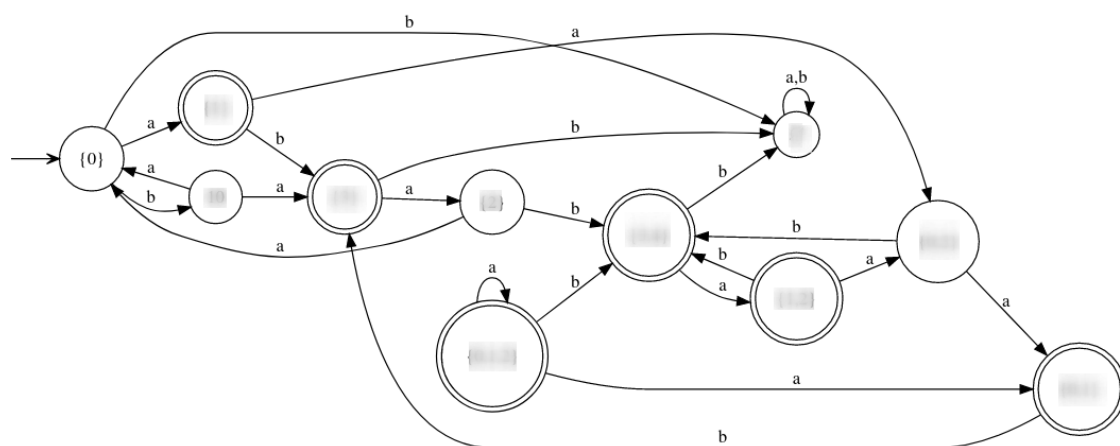
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

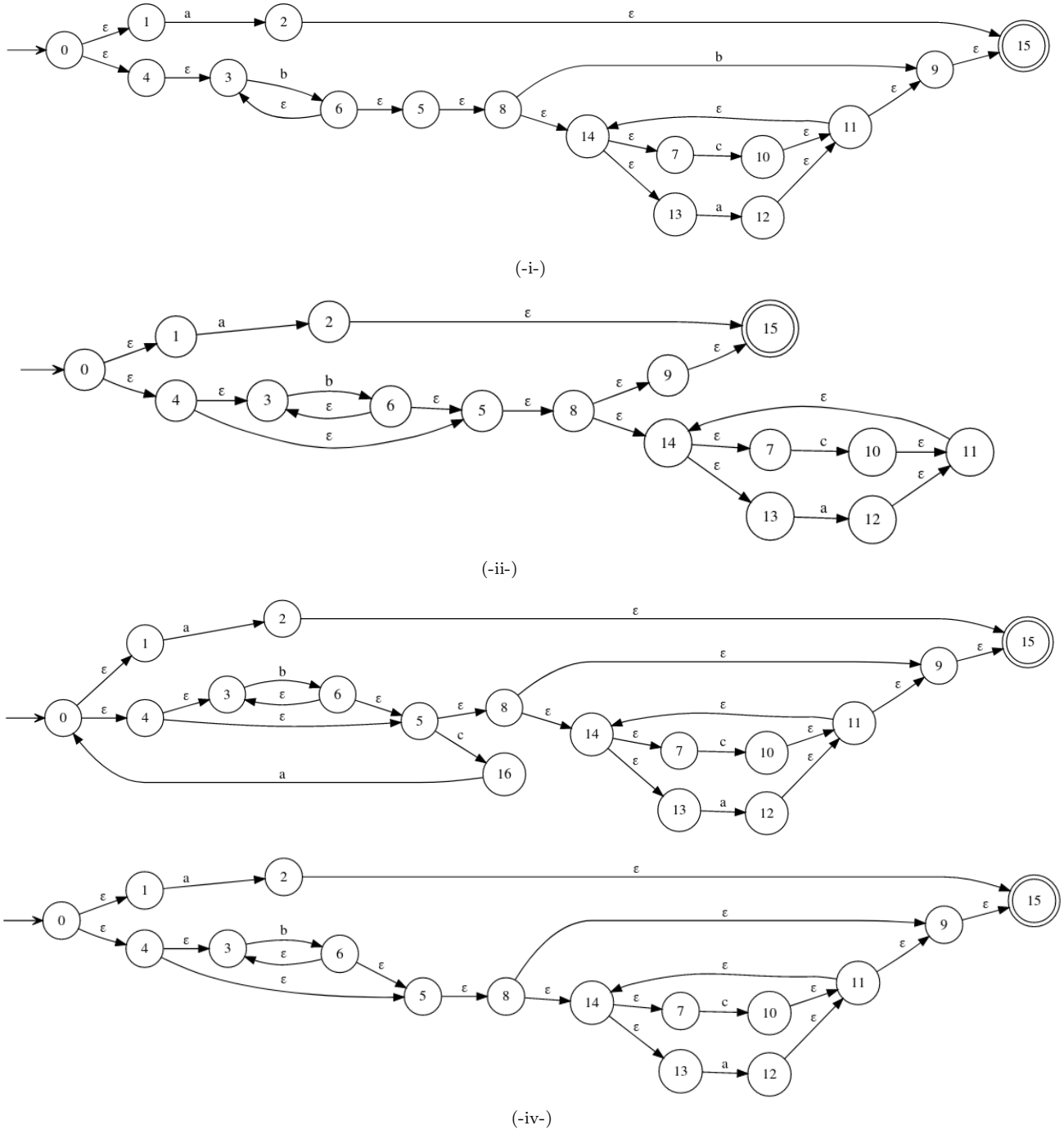


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c	d	e			h	i	j

Question 4 :

	b			e			h		j			m	n

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

		c			f	g		i	j	k

Question 7 :

a		c		e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

			d	e	f	g	h	i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

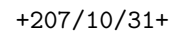
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ A possède un état puits
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ d u est accepté par A . ☐ e A est complet.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ g Un mot peut être infini. ☒ Un mot est une application.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☒ A a au moins un état accessible.
☒ u n'est pas accepté par A . ☐ d A a au moins un état non accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☐ h A a au moins un état co-accessible.
☒ A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

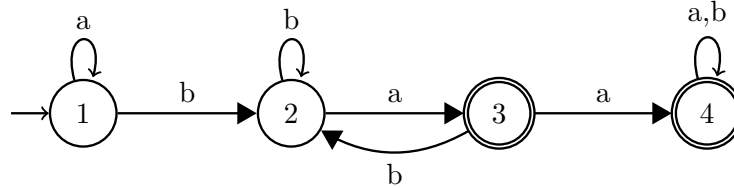
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☐ c 0 ☐ d 3 ☐ e 2 ☐ f 6 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

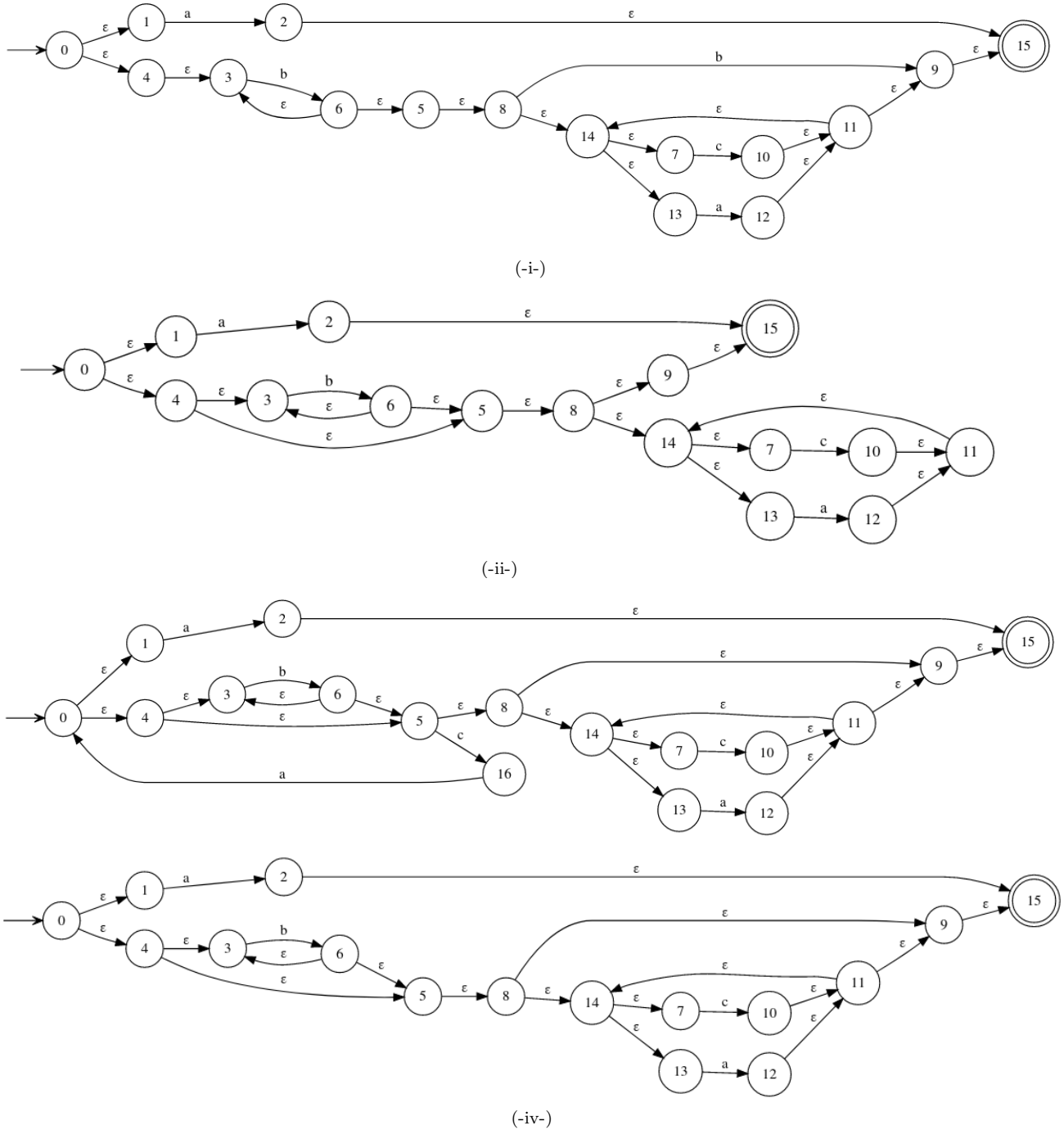


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d e f  h i

Question 3 :  b  d e

Question 4 : a   d  f g  i j

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :   c   f g  i    m n

Question 8 : a   d  g h  j k

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a b  d  f g h  j k  m

Question 12 : a  c d e f g h

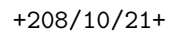
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur.
- ☒ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe.
- ☐ e Σ est fermé par suffixe.
- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ g Σ^* est fermé par suffixe.
- ☒ h Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☒ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☒ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d A accepte le langage universel.
- ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f A possède un état puits
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A est complet.

- ☐g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐e Un mot peut être infini. ☒ Un mot est une application.
☐g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐i Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐a A a au moins un état non co-accessible. ☒ A n'est pas complet.
☒ A a au moins un état accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐f A a au moins un état co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐h A a au moins un état non accessible. ☐i A n'a pas d'état accepteur.
☐j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐b la Figure 3-ii-. ☐e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐c la Figure 3-iv-. ☐d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐a la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐c la Figure 4-ii-. ☐d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

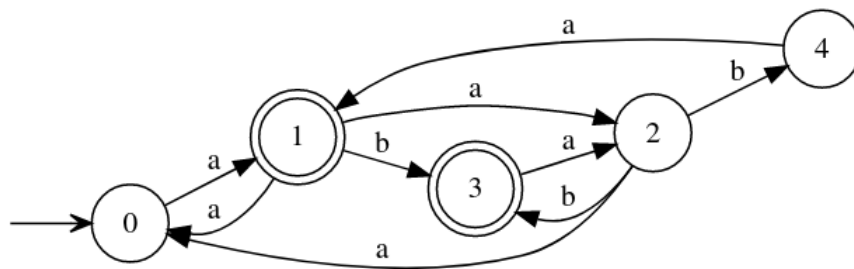
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

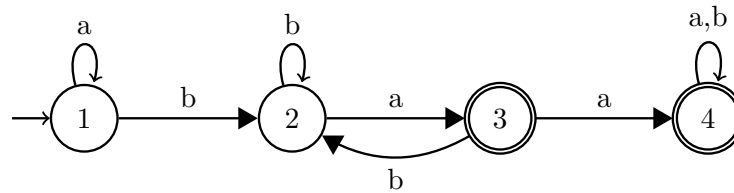
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 2 ☐ f 5 ☐ g 0

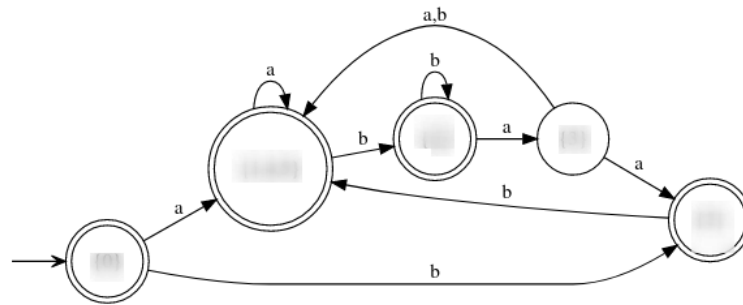
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



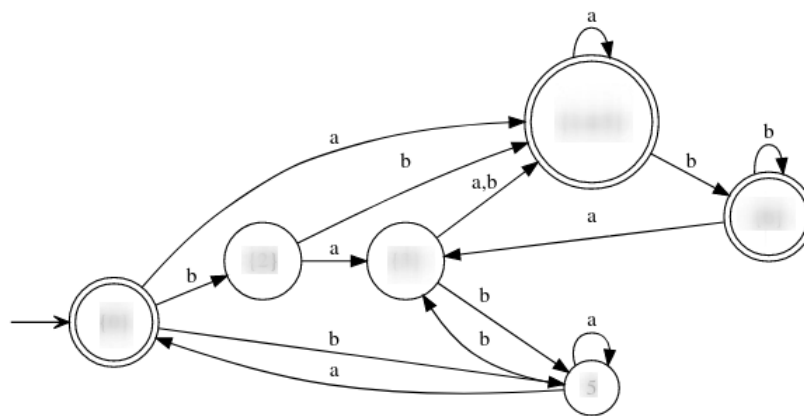
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

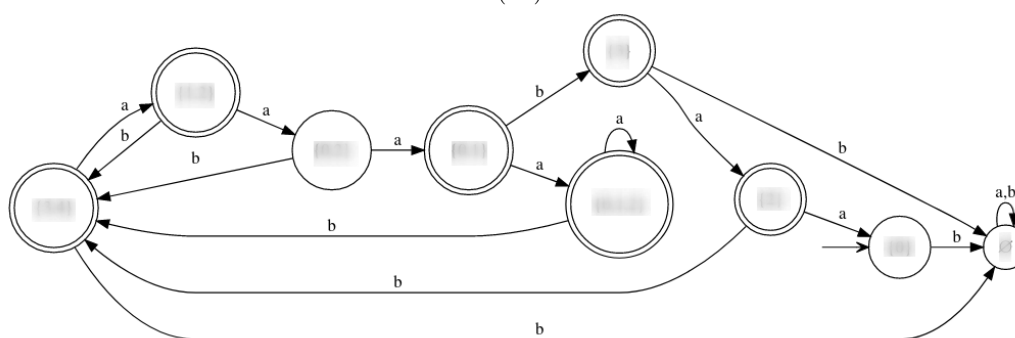
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

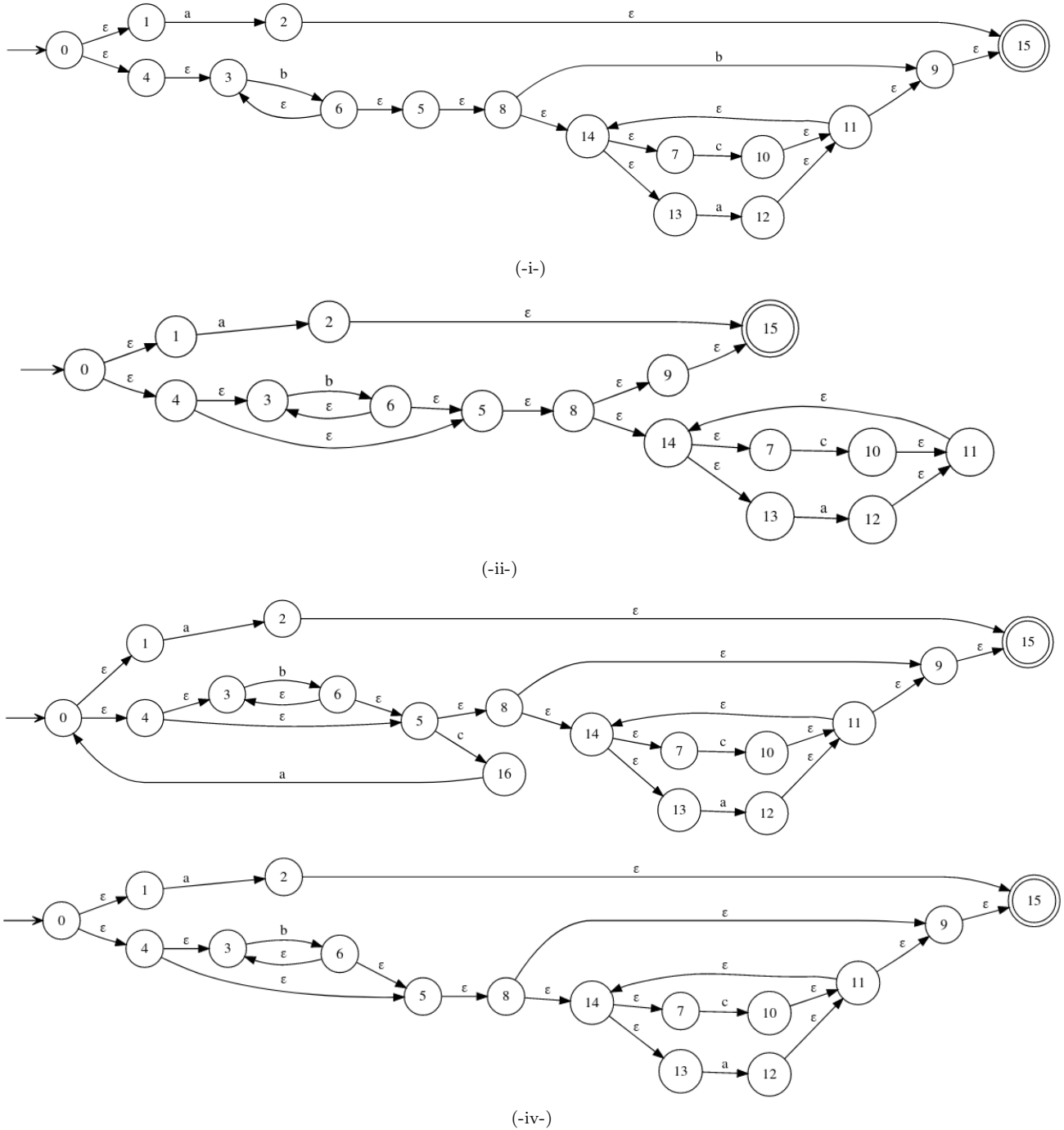


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c	d	e	f			i	j

Question 4 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

				e		g	h	i				m	n

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a					f		h	i	j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e		g	h	i		k		m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

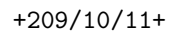
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ e A a au moins un état co-accessible.
- ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ f Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
- ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d A est complet.
- ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A possède un état puits

☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ f A accepte le langage universel. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Un mot peut être infini.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ e Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot est une application.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut être vide.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Un mot est une fonction.

☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-iv-.

☐ b la Figure 3-i-.

☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-ii-.

☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-i-.

☐ b la Figure 4-ii-.

☐ c la Figure 4-iii-.

☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

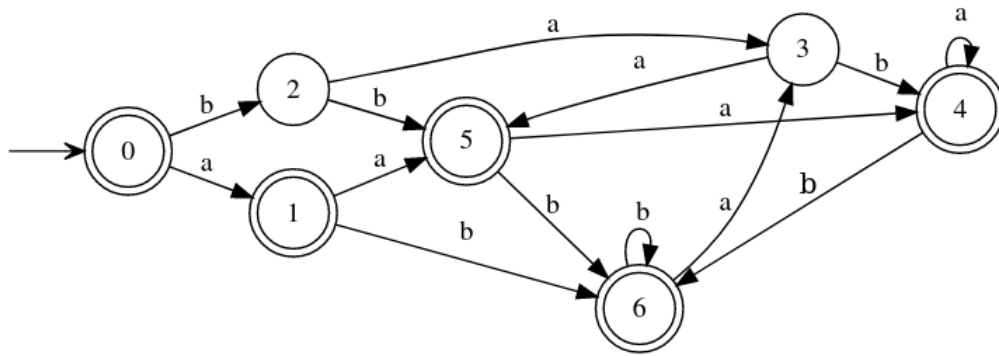
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

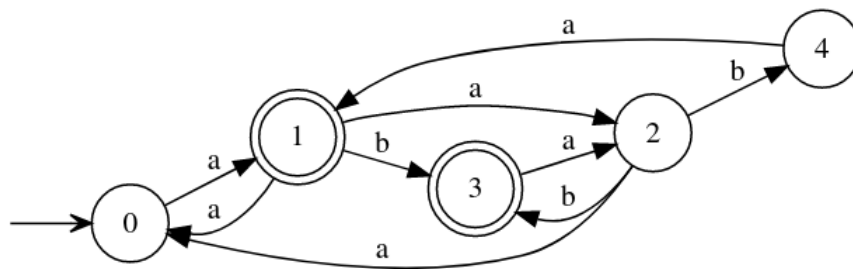
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

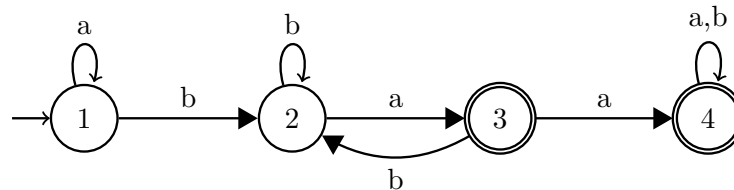
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 1 ☐ g 0

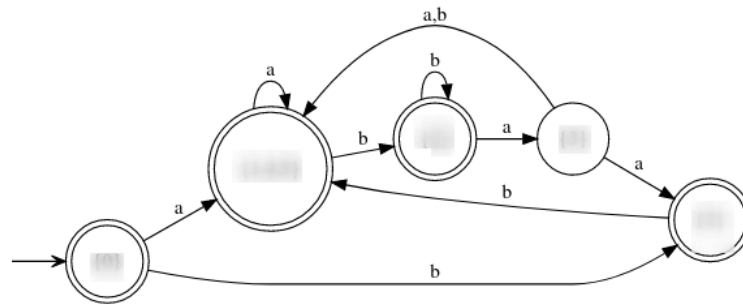
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



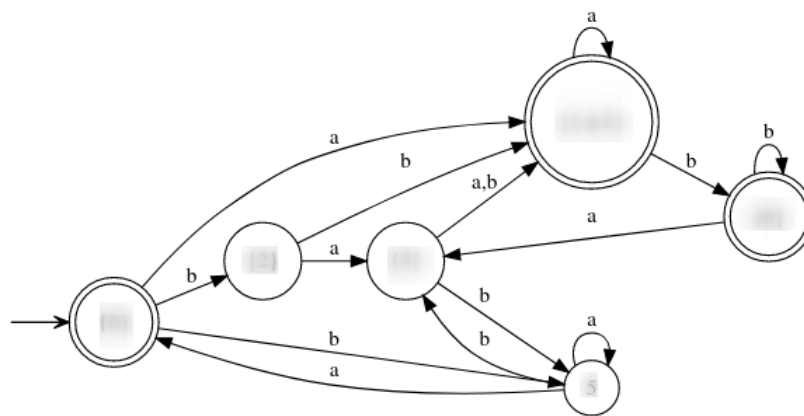
(-i-)



(-ii-)

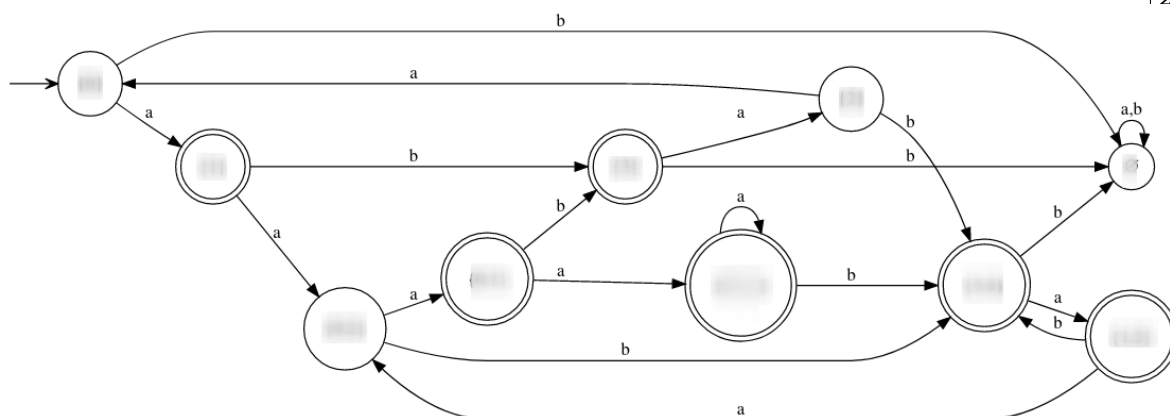


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

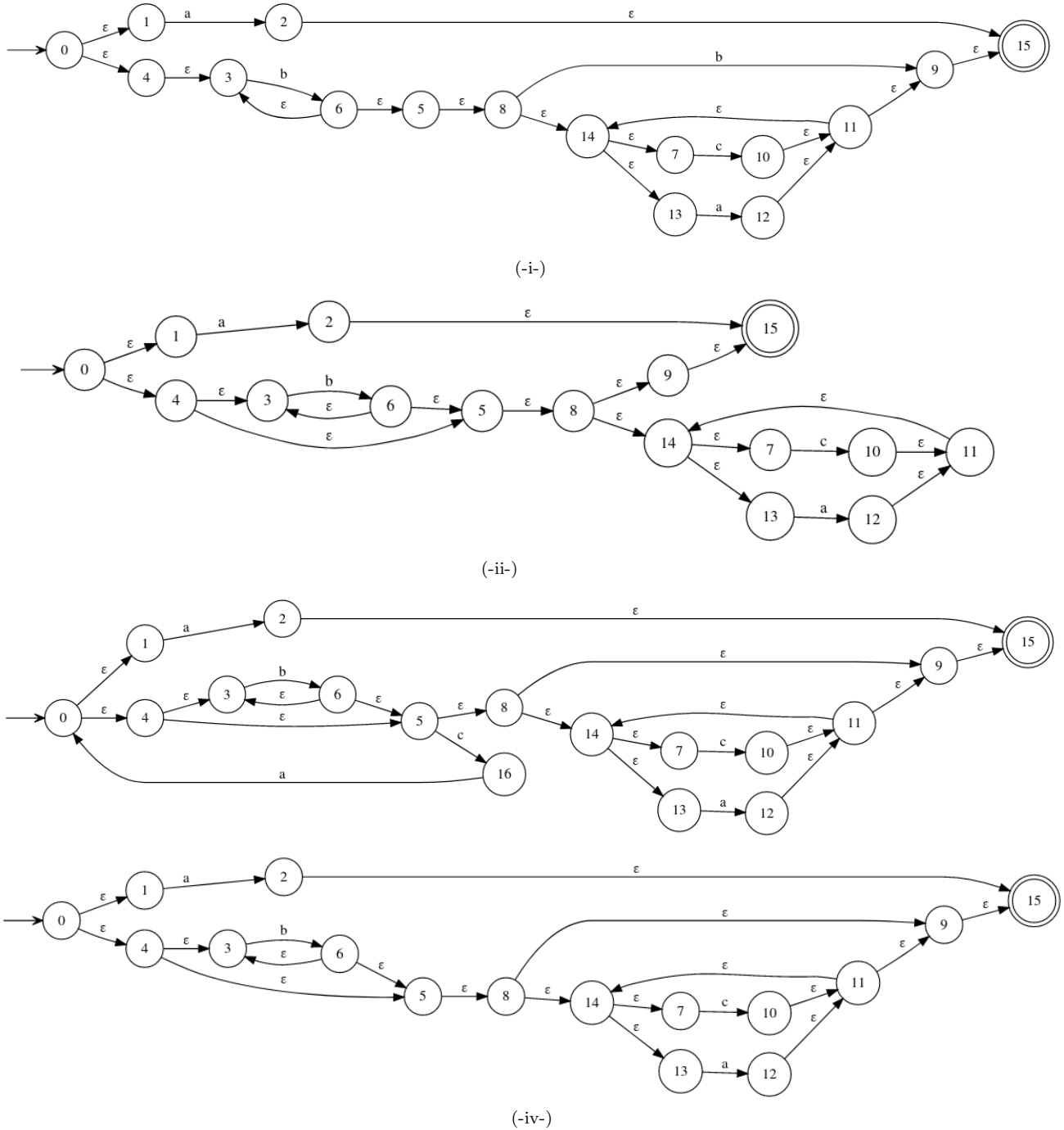


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b			e	f				j	k

Question 4 :

	b		d		f		h	i	j

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 8 :

	b		d	e							l	m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d	e	f			i	j		l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

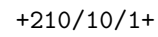
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ A accepte le langage universel. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut être vide.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

- ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Un mot est une application.
 ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☒ Un mot est une fonction.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles.
 ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c u est accepté par A .
 ☐ d A a des états accepteurs.
 ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe.
 ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ c Σ^* est fermé par facteur.
 ☒ d Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☒ f Σ^* est fermé par suffixe.
 ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a u n'est pas accepté par A .
 ☒ b A n'est pas complet.
☐ c A a au moins un état non co-accessible.
 ☐ d A a au moins un état non accessible.
☒ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ g A a au moins un état accessible.
 ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-.
 ☐ b la Figure 3-iv-.
 ☐ c la Figure 3-i-.
 ☒ d la Figure 3-iii-.
 ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-.
 ☐ b la Figure 4-ii-.
 ☒ c la Figure 4-i-.
 ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

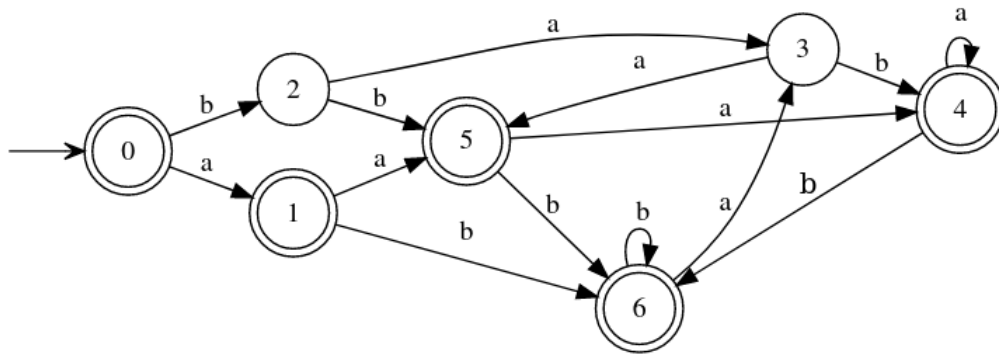
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

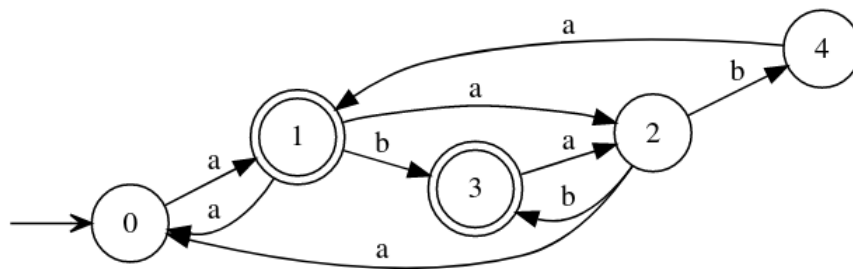
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

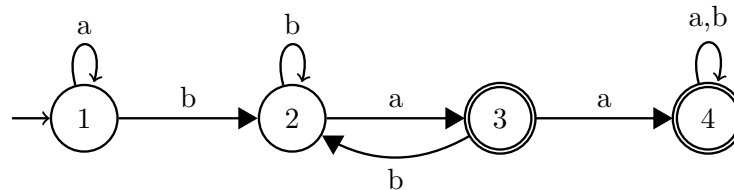
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☒ b 4 ☐ c 0 ☐ d 1 ☐ e 6 ☐ f 5 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

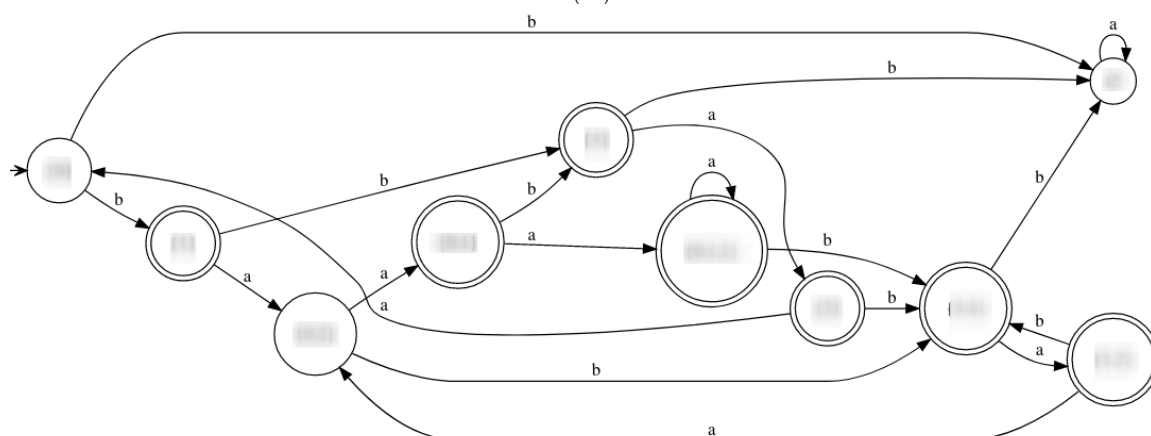


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

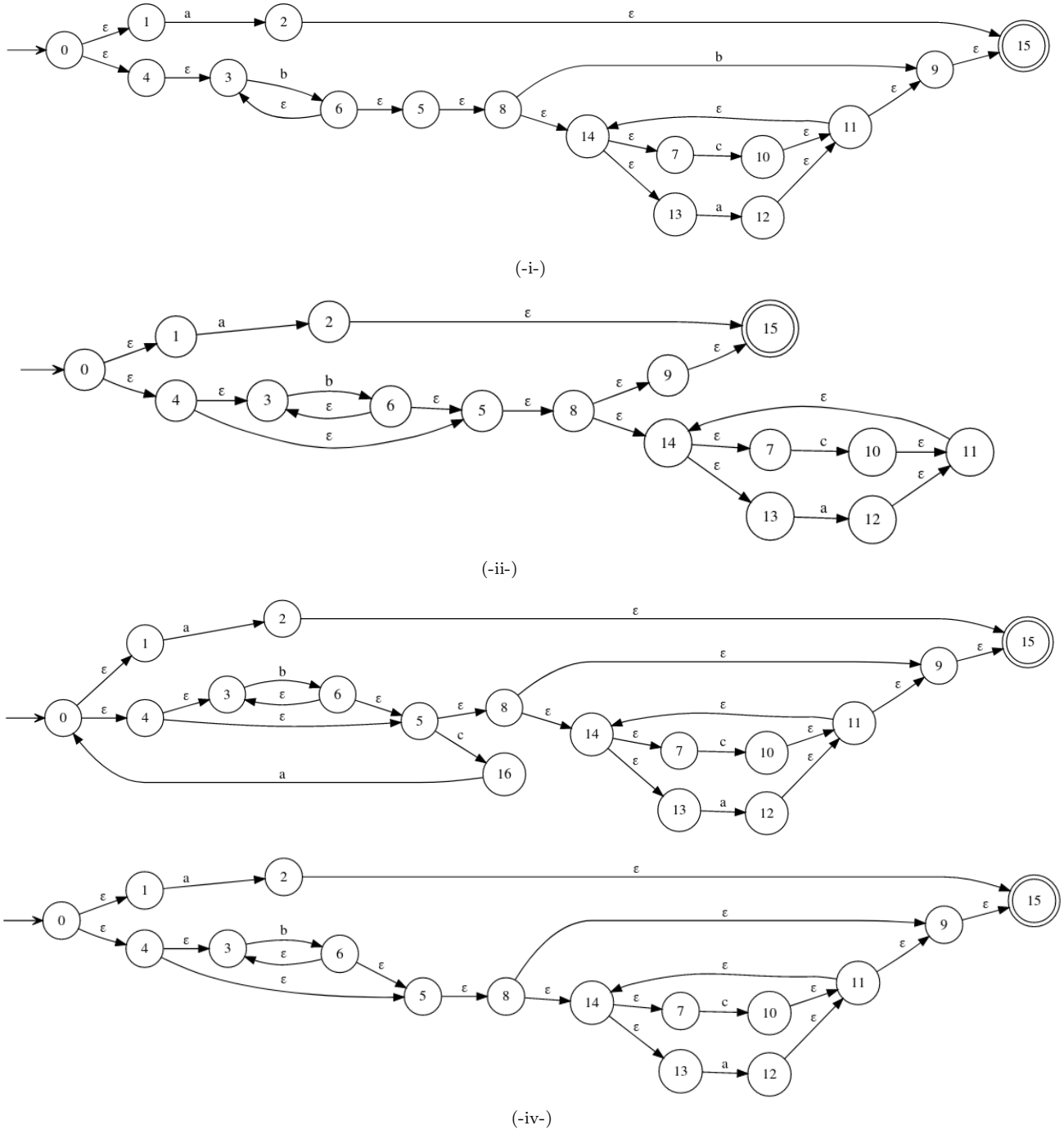


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 : a b  d e f  h i

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a  c d  f      m n

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b   e   h i j

Question 8 :   c d   h i j k

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a b c d  f g  i  k l 

Question 12 :  b c d e f g h

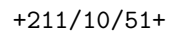
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot est une fonction.	☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ d Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot est une application.	☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Σ est fermé par facteur.	☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.	
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.	☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe.	☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur.	
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.	
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.	

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.

- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ f A accepte le langage universel.
- ☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☒ b A n'est pas complet.
- ☒ c u n'est pas accepté par A . ☐ d A a au moins un état co-accessible. ☒ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a au moins un état non accessible. ☐ g A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ h Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ i A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A est complet.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-i-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

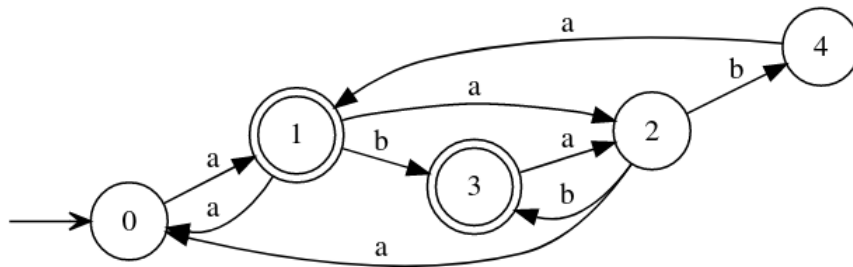
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

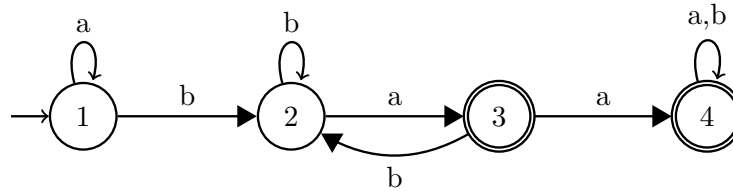
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

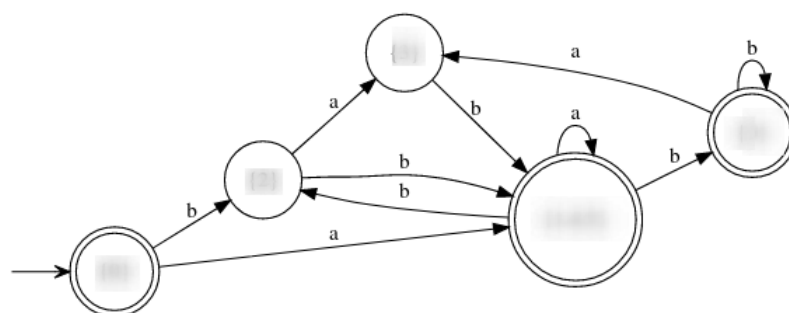
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 2 ☐ f 3 ☐ g 0

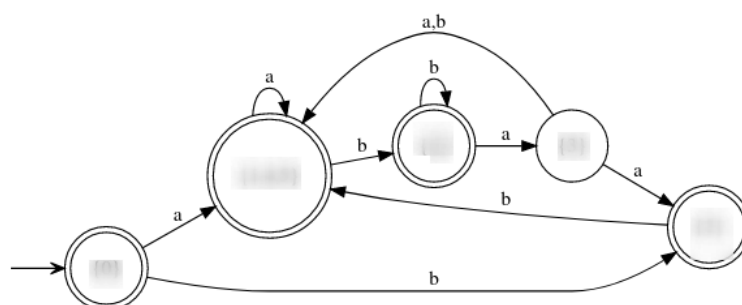
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

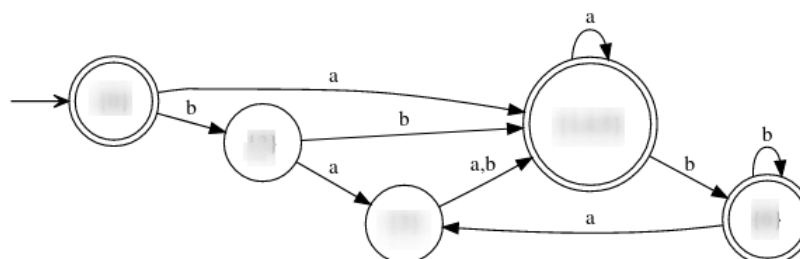
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



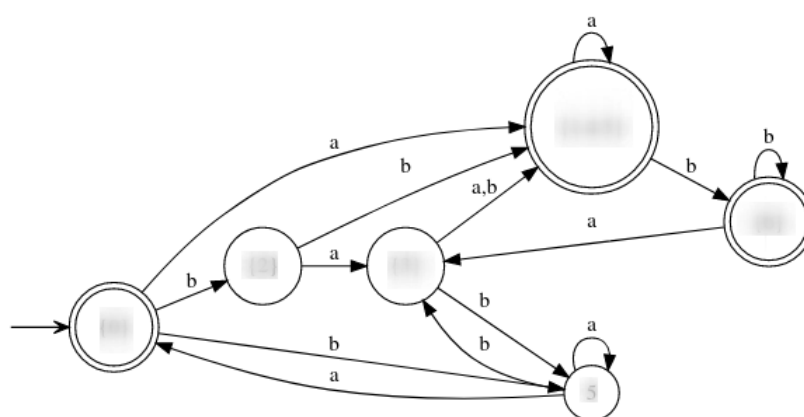
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

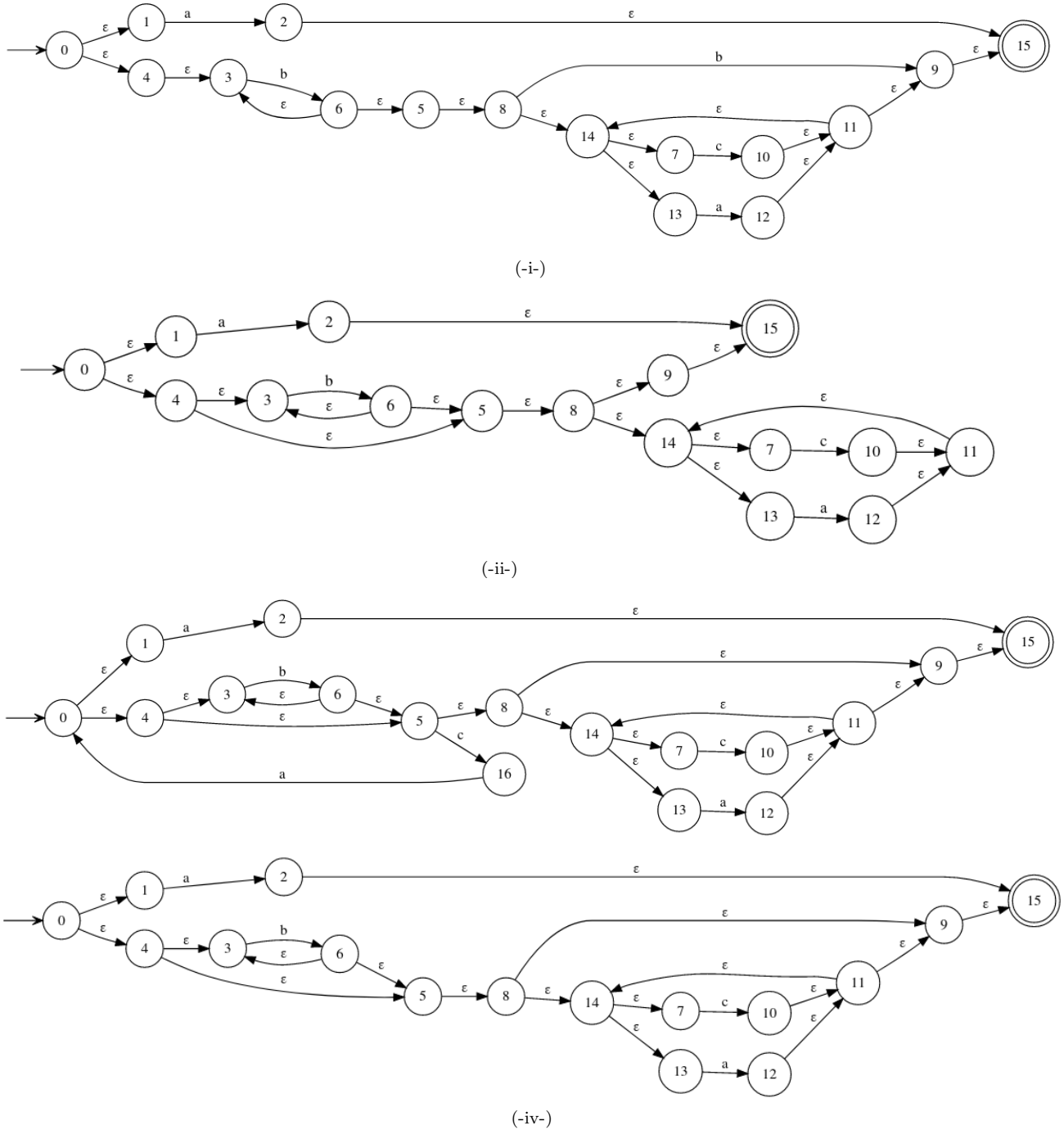


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ f ☐ ☐ ☐ i ☐ ☐ ☐ l ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 4 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ ☐ e ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ ☐ h ☐ i

Question 7 : ☐ a ☐ ☐ ☐ d ☐ ☐ f ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ k

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ ☐

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

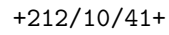
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c A a des états accepteurs.

☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ h Σ est fermé par préfixe.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u n'est pas accepté par A . ☐ b A a au moins un état co-accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état accessible. ☐ e A a au moins un état non accessible.

- ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ h A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ e Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d A possède un état puits ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☐ f A accepte le langage universel. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

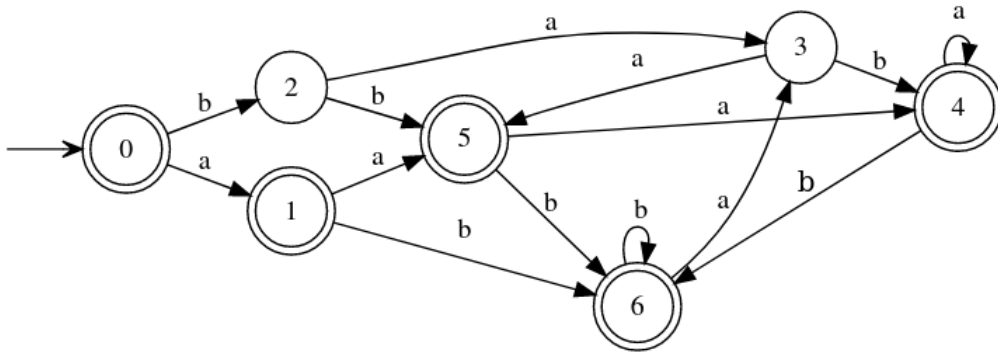
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☒ b 4 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 1 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



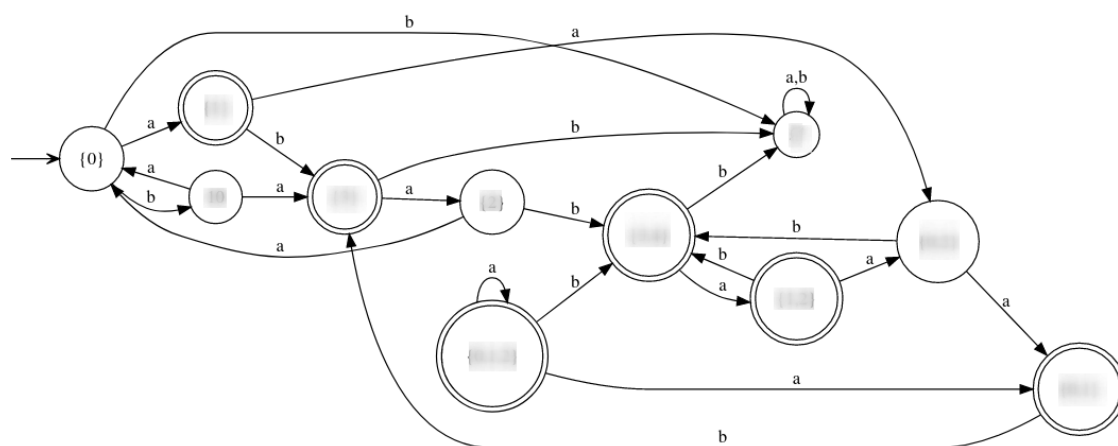
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

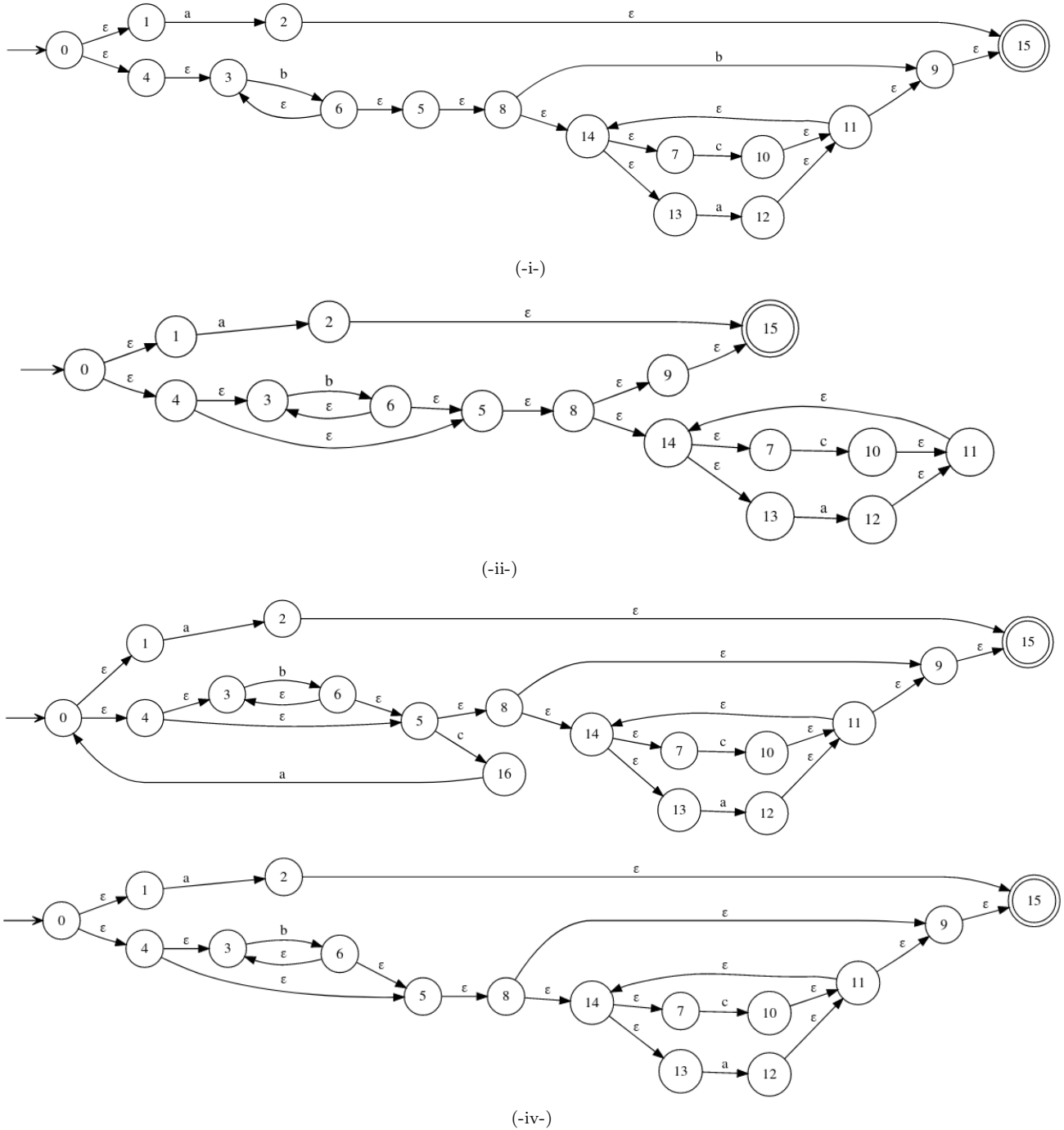


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ ☐ b ☐ ☐ ☐ e ☐ f ☐ ☐ h ☐ ☐ j ☐ k

Question 6 : ☐ ☐ b ☐ ☐ ☐ e ☐ ☐ g ☐ ☐ ☐ ☐ k ☐ ☐ m ☐ n

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 8 : ☐ ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ ☐ j ☐ ☐ l ☐

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

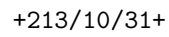
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. A single solid line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u n'est pas accepté par A . ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ d A a au moins un état non accessible.
☐ e $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
☐ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A n'est pas complet. ☐ i A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ^* est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☐ f Σ^* est fermé par facteur. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ h Σ est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b u est accepté par A . ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ b A possède un état puits ☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f A accepte le langage universel.
- ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.
- ☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ i Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ k Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii- ☐ b la Figure 3-iv- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii- ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i- ☐ b la Figure 4-iii- ☐ c la Figure 4-iv- ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_4 = a + b$
☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$				

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

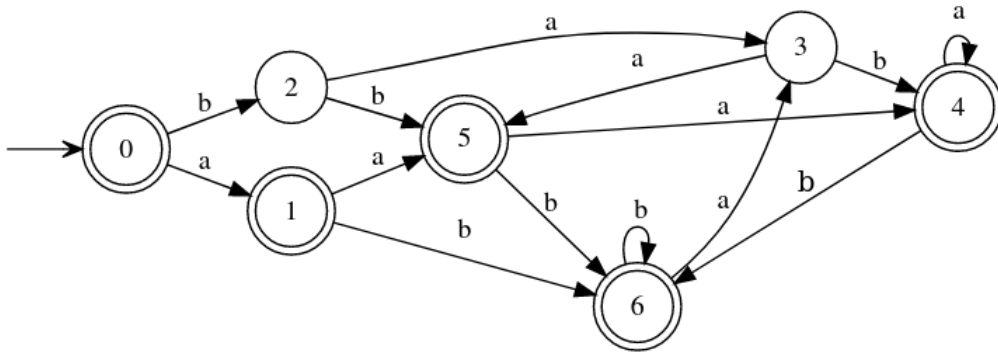
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 3 ☐ f 5 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

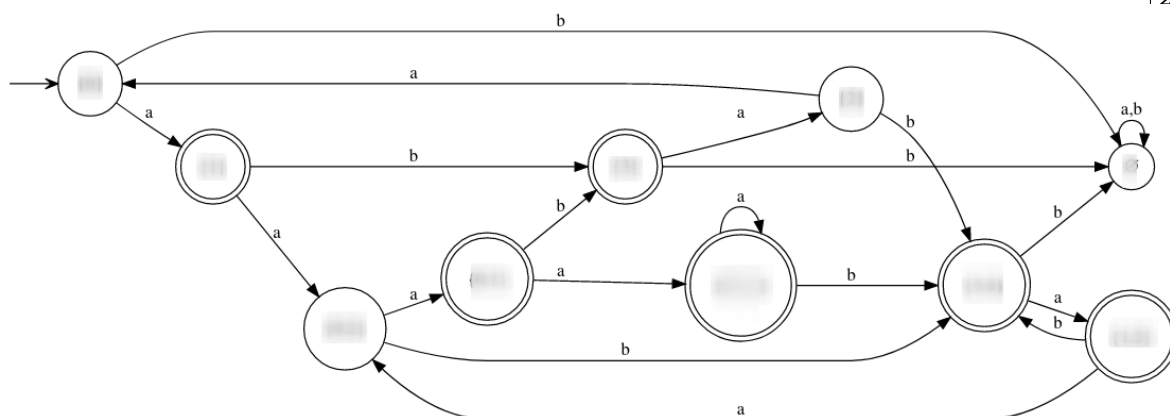


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



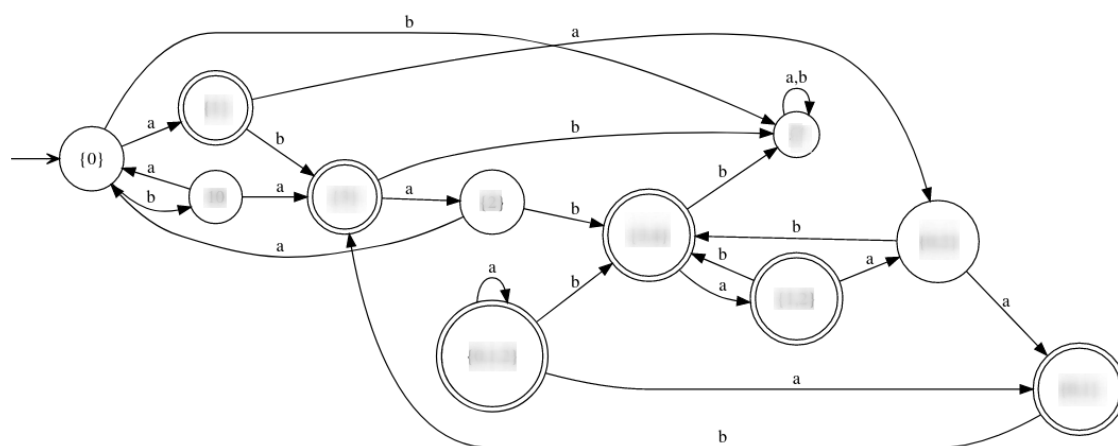
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

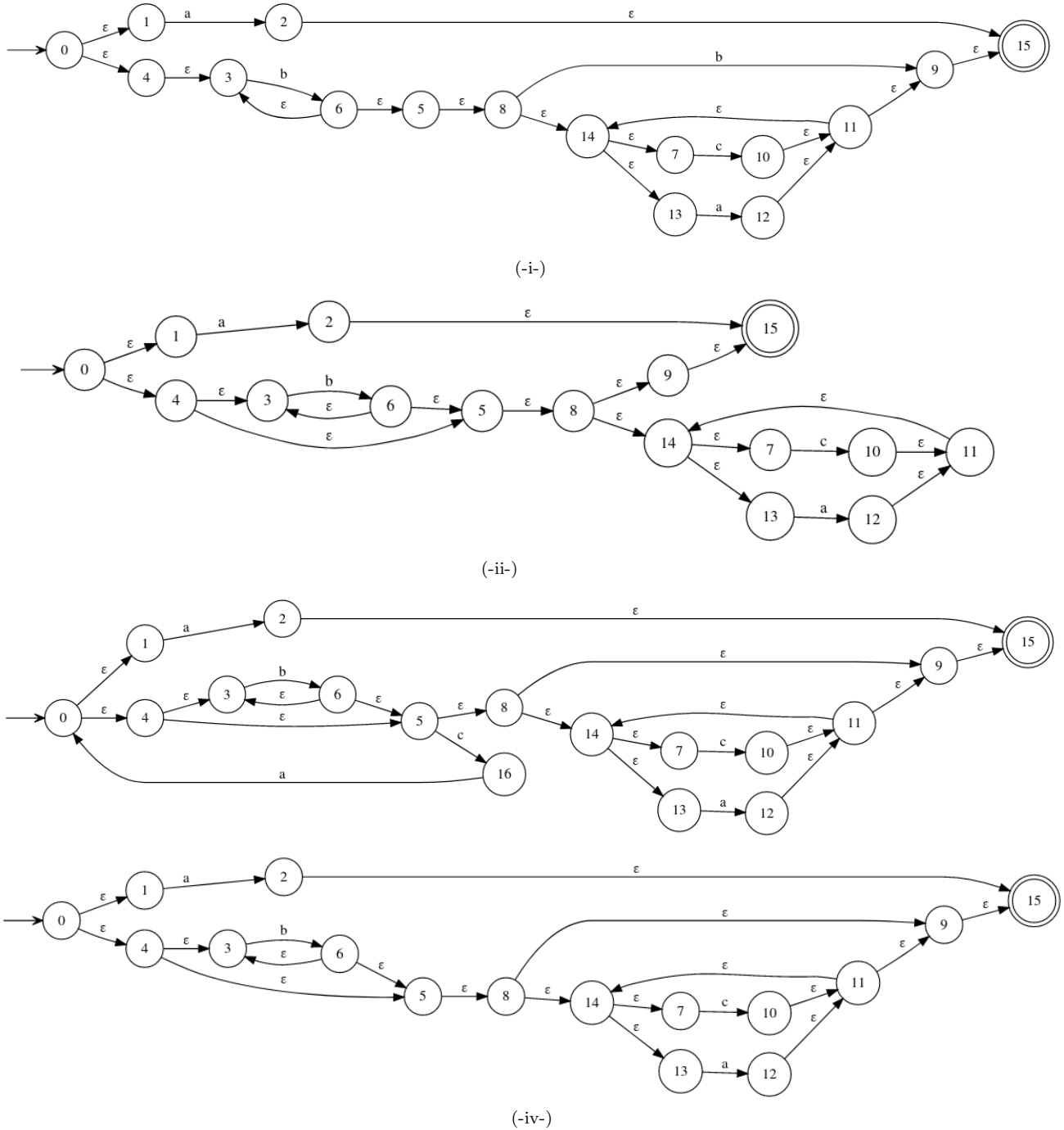


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d  f    j k

Question 3 : a    e  g h i j

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c d 

Question 6 :  b c  e f g h i

Question 7 :      g  i j k  m n

Question 8 :  b  d e

Question 9 :  b c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a  c d  f g   j k l m

Question 12 :  b c d e f g h

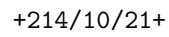
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ g Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ l Un mot peut être infini.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ u n'est pas accepté par A . ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet.
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☐ f Σ est fermé par préfixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
☐ f Tous les états de A sont accepteurs. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

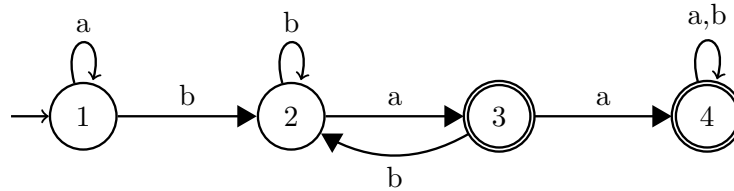
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 0 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

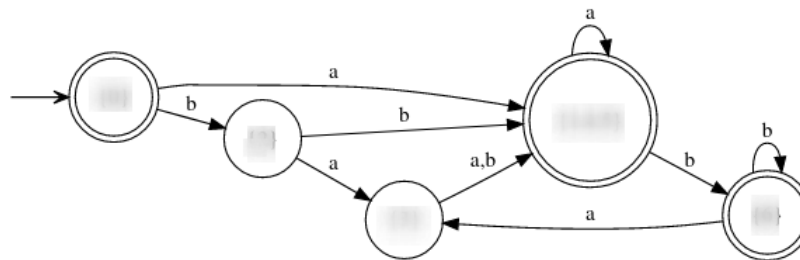
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



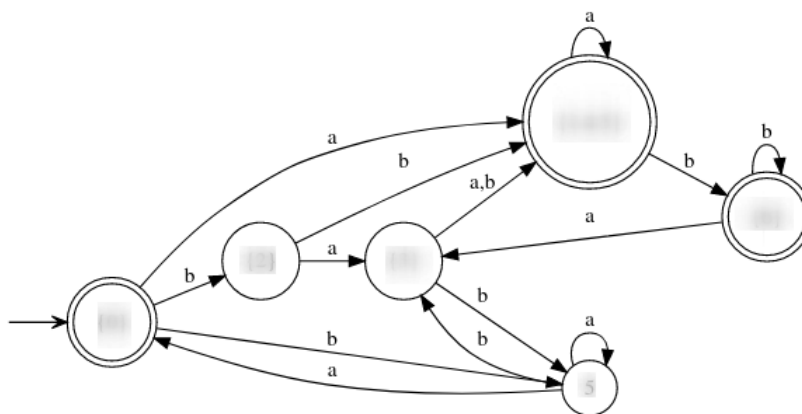
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

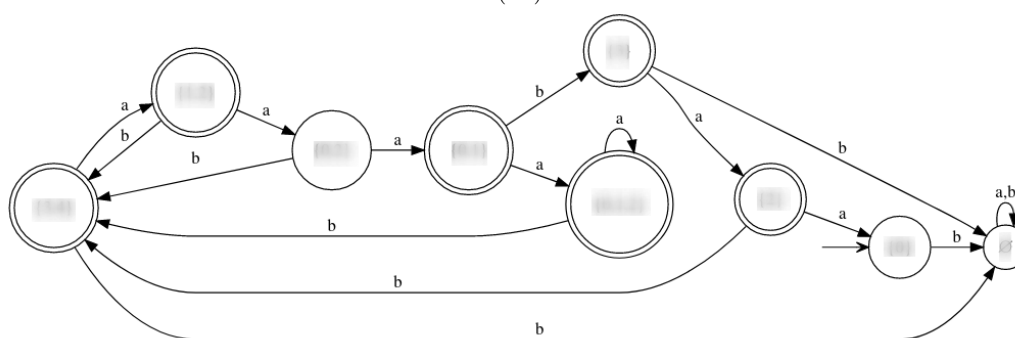
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



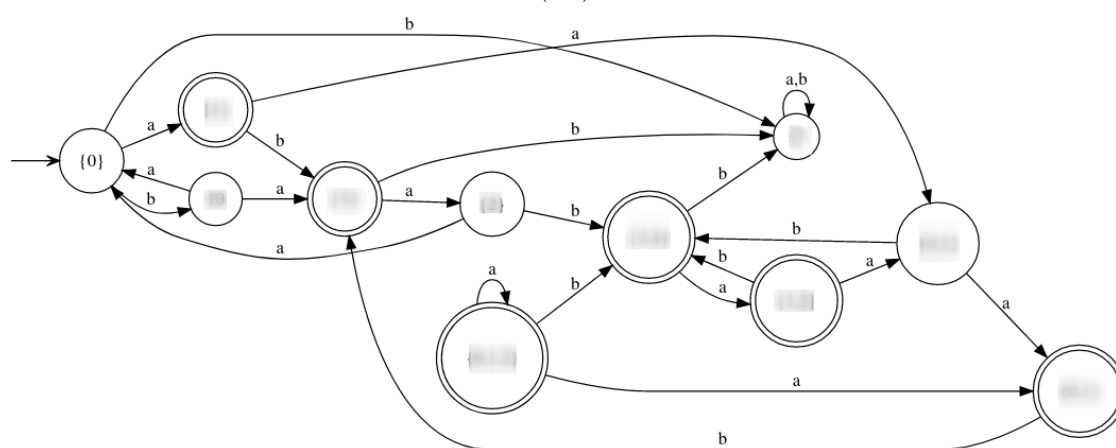
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

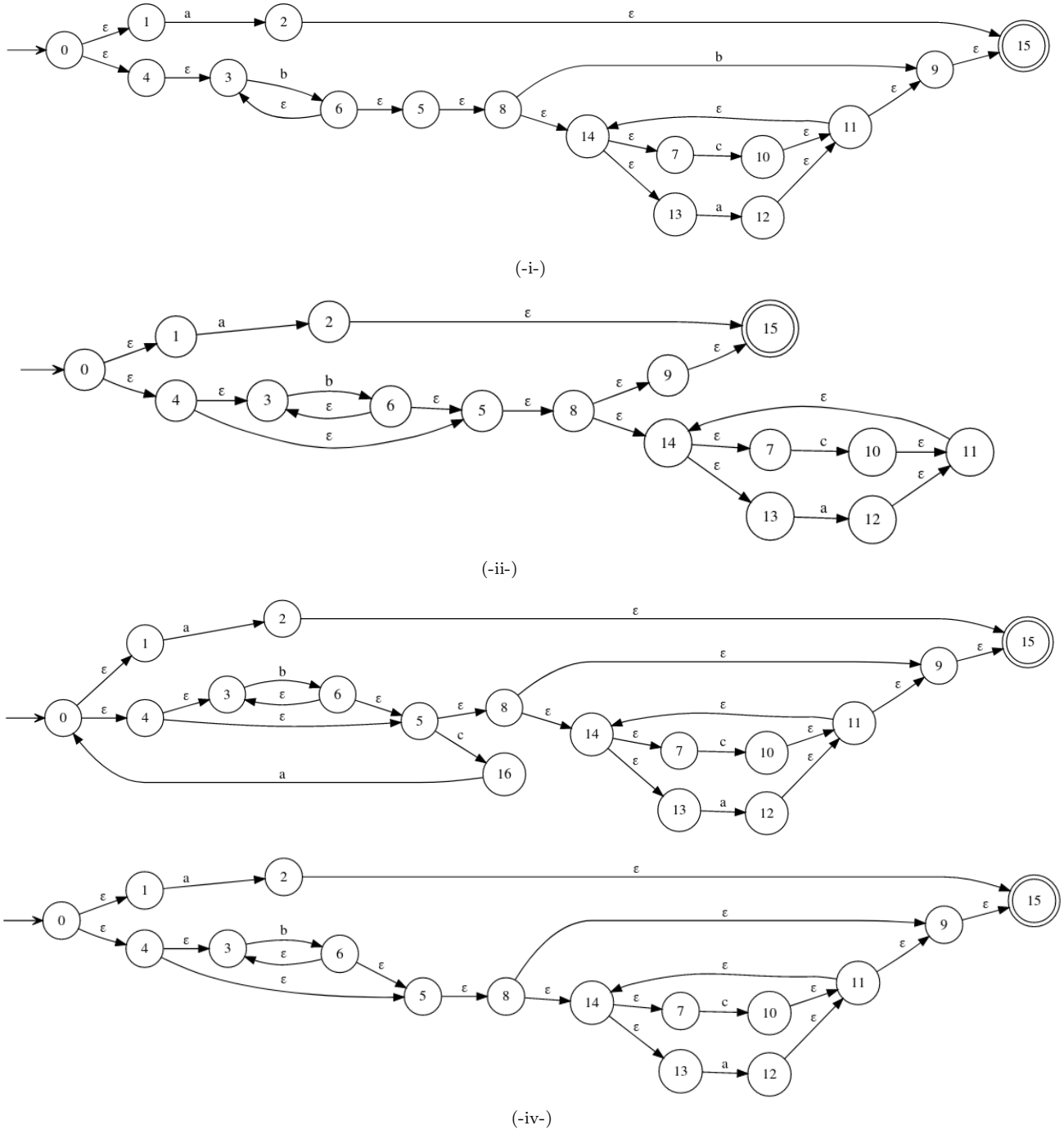


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

		c		e		g						l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a		c	d					i	j	k

Question 6 :

		c	d	e	f			i	j

Question 7 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a		c		e		g	h		j	k	l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

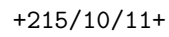
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ b	Un mot peut être infini.
☐ c	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ g	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Un mot est une application.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ l	Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐	A n'est pas complet.	☐	$u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .		
☐ d	A a au moins un état non co-accessible.	☐ e	A a au moins un état co-accessible.
☐	A a au moins un état accessible.	☐ g	A n'a pas d'état accepteur.
☐ h	A a au moins un état non accessible.	☐	u n'est pas accepté par A .
☐ j	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.		
☐ k	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.		

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a	A est complet.	☐ b	Les états de A sont tous accessibles.	☐ c	u est accepté par A .
☐ d	Les états de A sont tous co-accessibles.	☐ e	$u \in \mathcal{L}(A)$.	☐ f	A a des états accepteurs.
☐ g	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.				
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.				

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

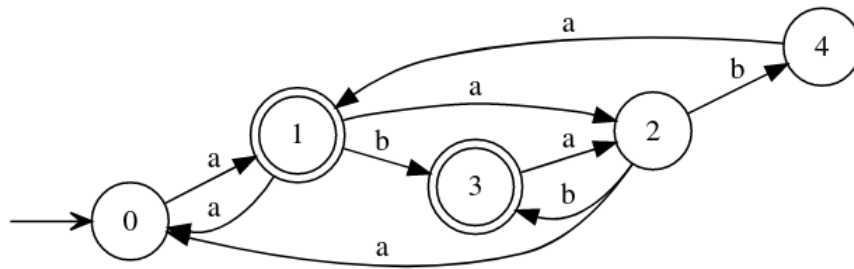
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

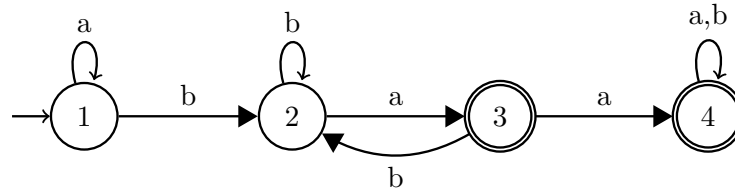
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 3 ☐ c 6 ☐ d 2 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



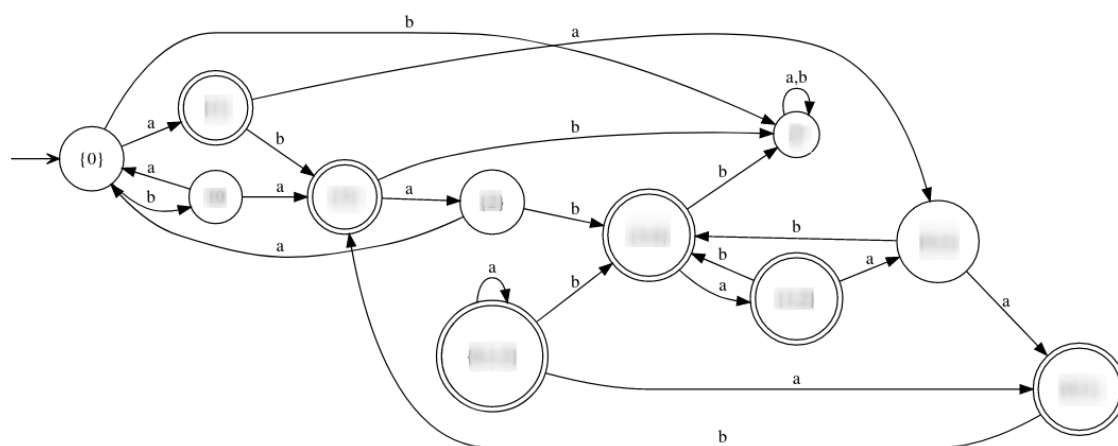
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

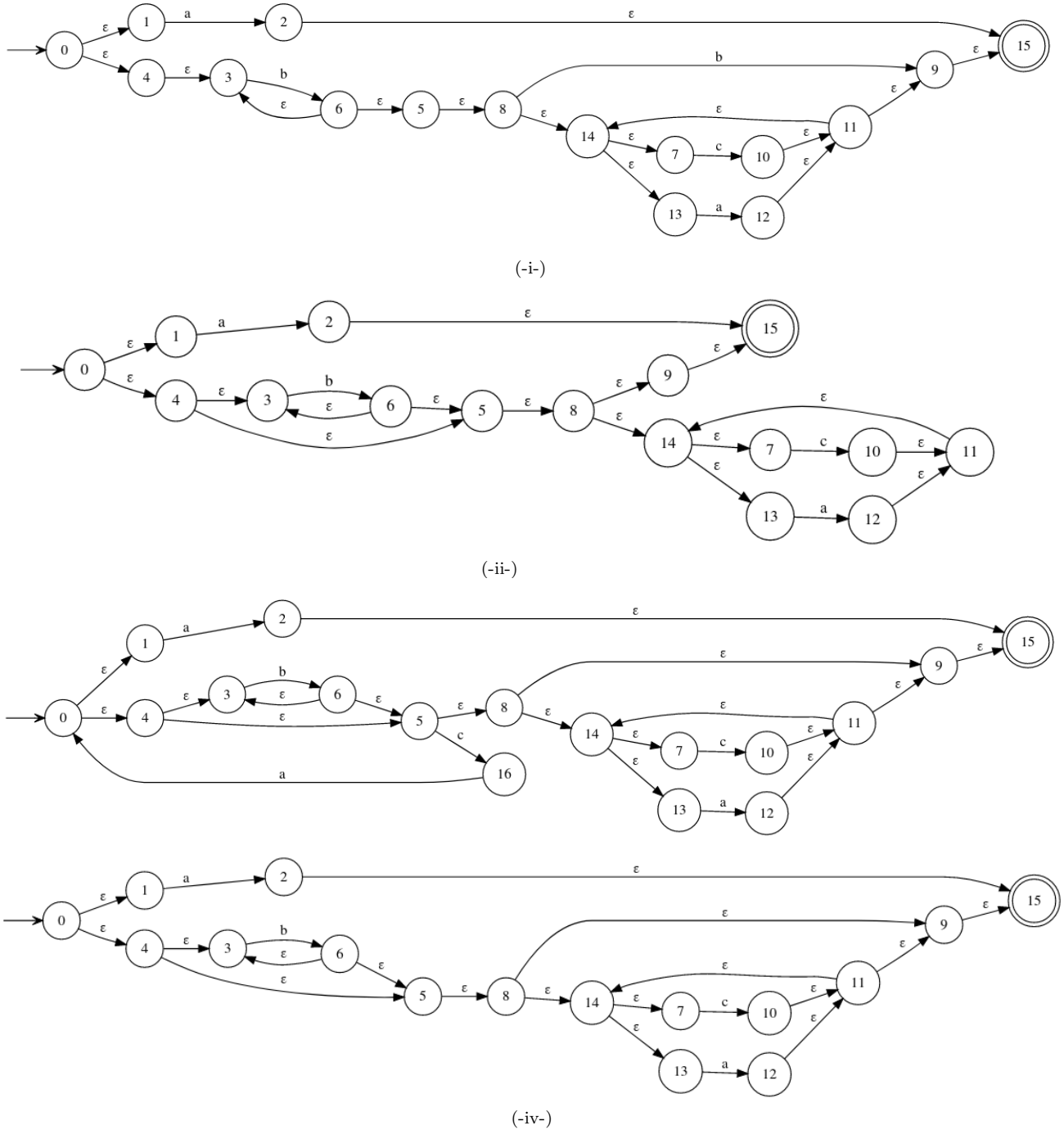


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c   g    l m n

Question 3 :   d e  g h  j k

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 :  b  d e f g h i

Question 6 : a b c d 

Question 7 :   c  e f g  i j

Question 8 :  b  d e

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b c 

Question 11 :   c d e  g  i j k l m

Question 12 : a b  d e f g h

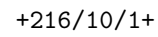
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ f Σ est fermé par facteur.

☐ g Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ e A accepte le langage universel. ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.

☐ g A possède un état puits

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b u est accepté par A . ☐ c Les états de A sont tous accessibles.

☐ d A est complet. ☐ e A a des états accepteurs.

☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u n'est pas accepté par A . ☐ b A a au moins un état non co-accessible.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.

☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ h A a au moins un état co-accessible.

☐ i A a au moins un état non accessible.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une application.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une fonction.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être vide.

☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ j Un mot peut être infini.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$ ☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_1 = aX_1 + b$ ☐ $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ $X_4 = a + b$ ☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$ ☐ $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ $X_4 = (a+b)^*$ ☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ $X_4 = a^* + b^*$ ☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ $X_1 = a^+bX_2$ ☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ $X_1 = a^*b$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ $X_2 = b^*aX_3$
☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

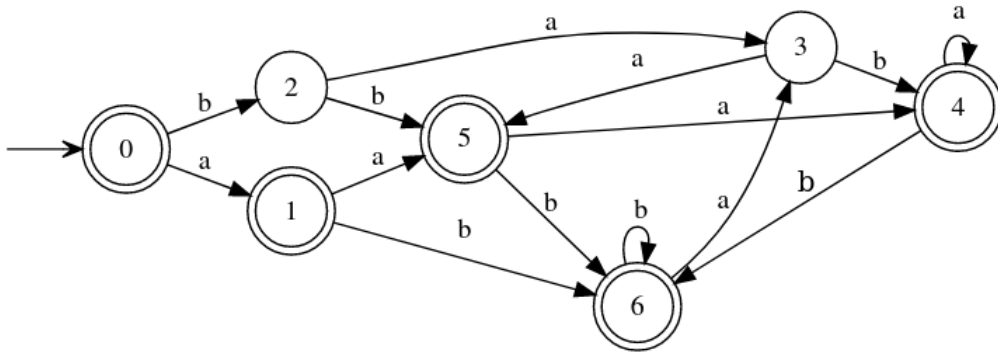
☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$ ☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a+b)^*$ ☐ Aucune des équations proposées.
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1 ☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

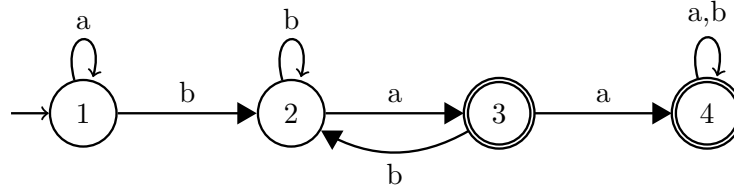
☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☐ c 2 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

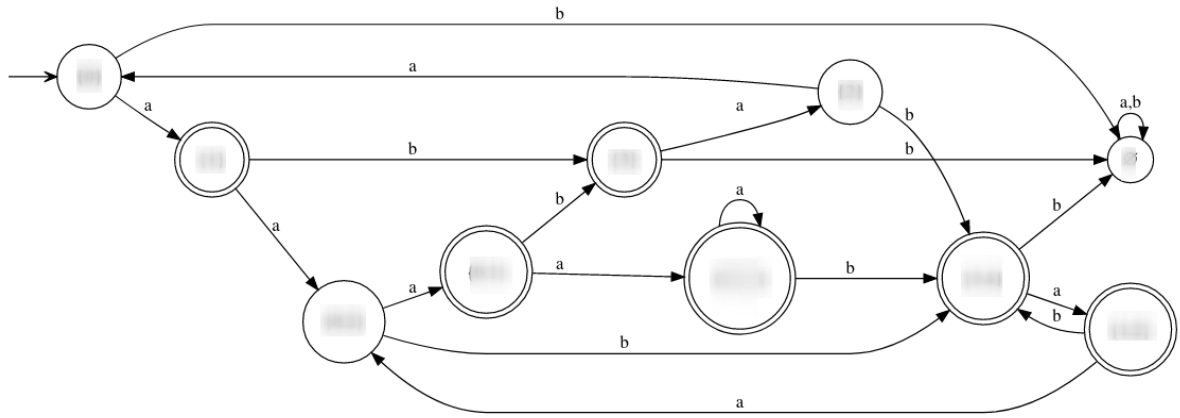


(-iii-)

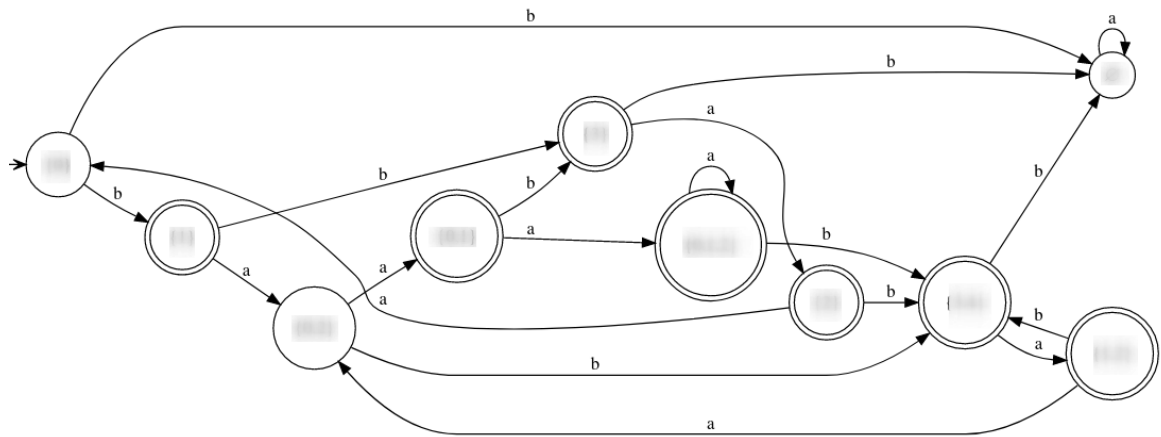


(-iv-)

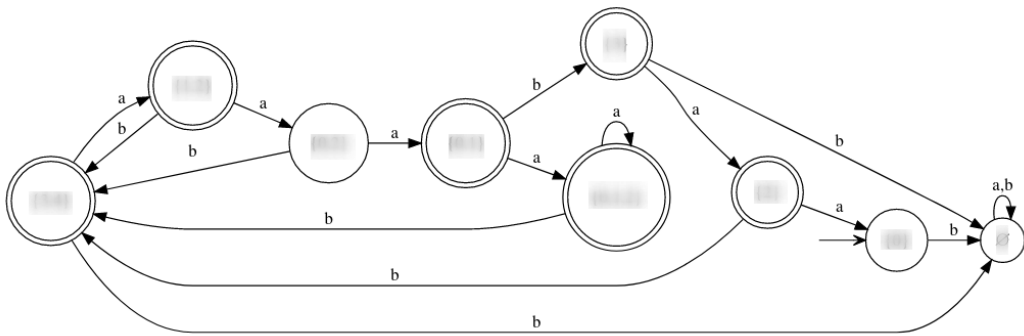
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



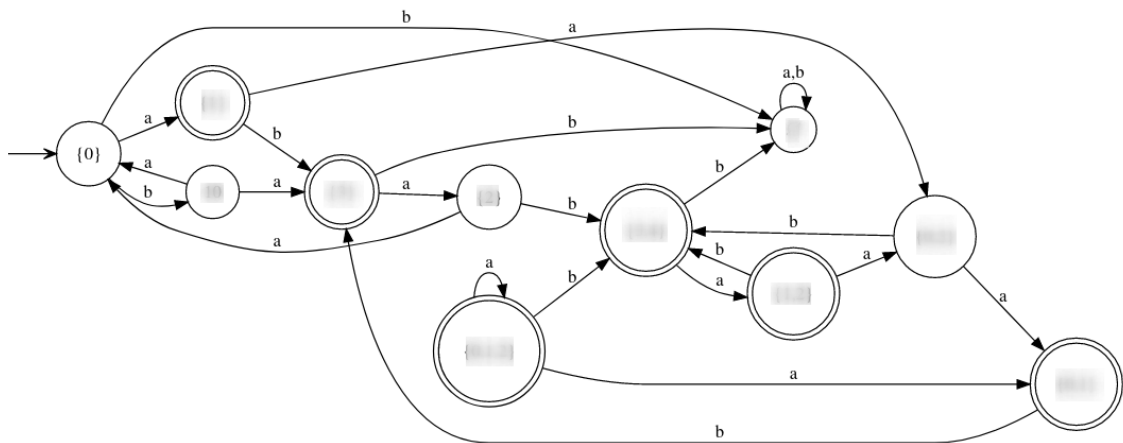
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

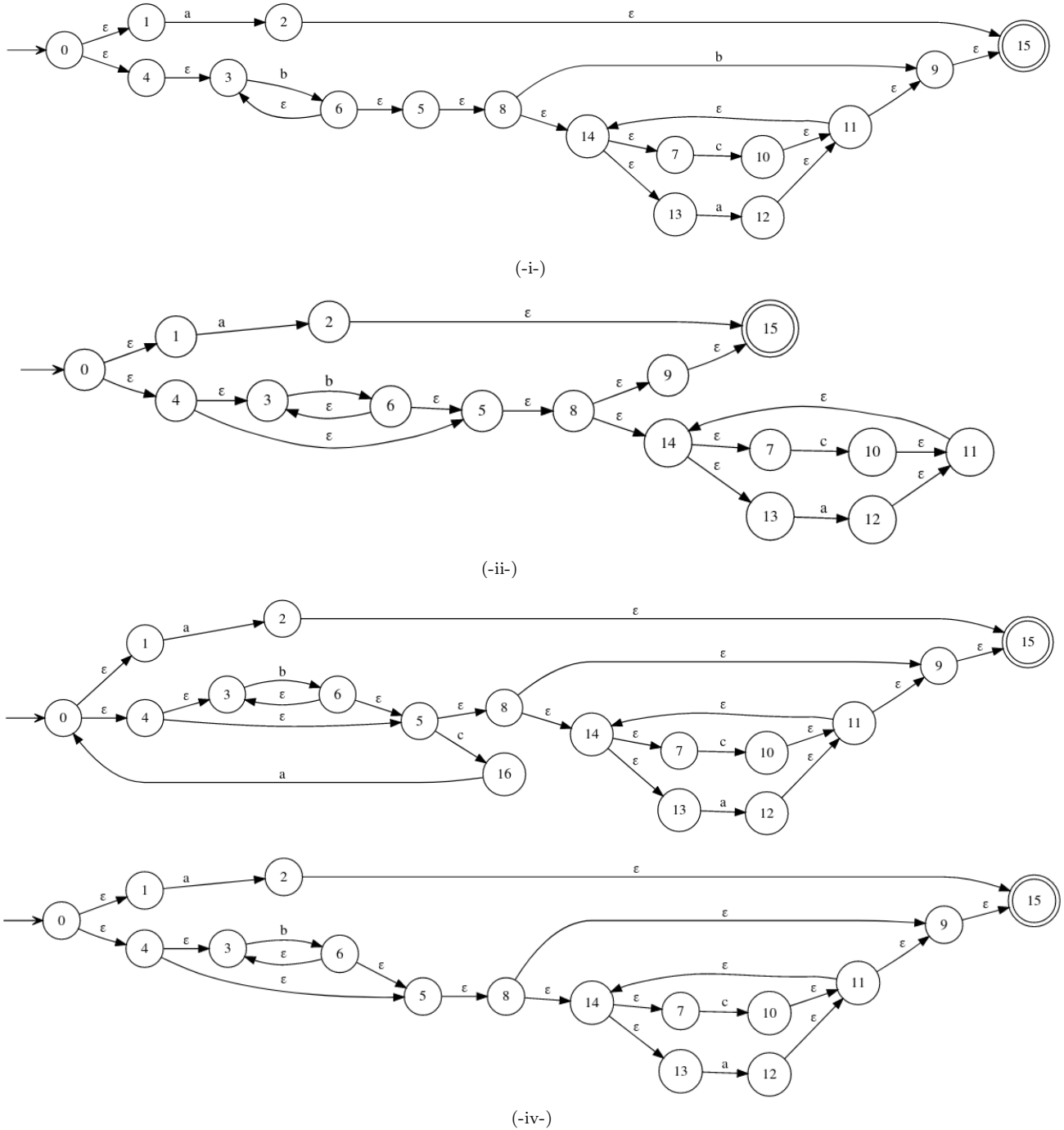


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b   f g  i j

Question 4 :  b c  e f g h i

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a b c d 

Question 7 :  b   g h i j k

Question 8 : a   g  i j   m n

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a b  d

Question 11 :  b c  g h i j k l m

Question 12 : a b  d e f g h

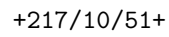
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs. ☐ A est complet.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

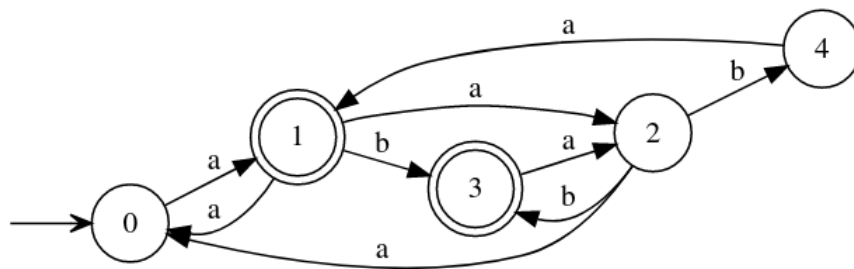
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

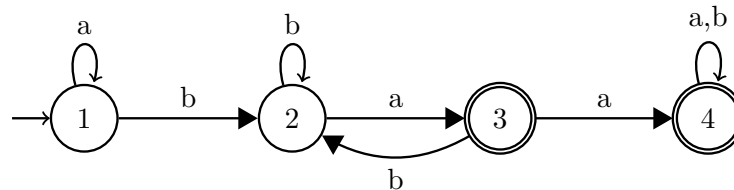
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 6 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 3 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

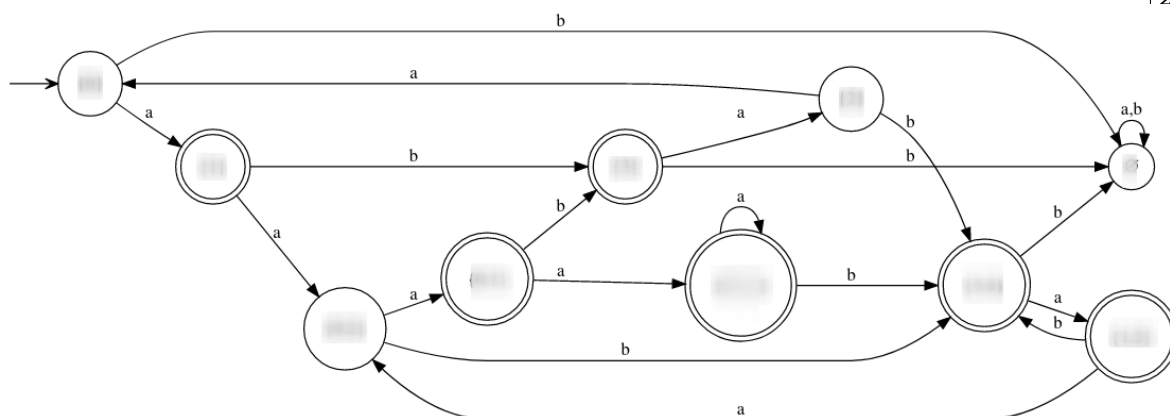


(-iii-)



(-iv-)

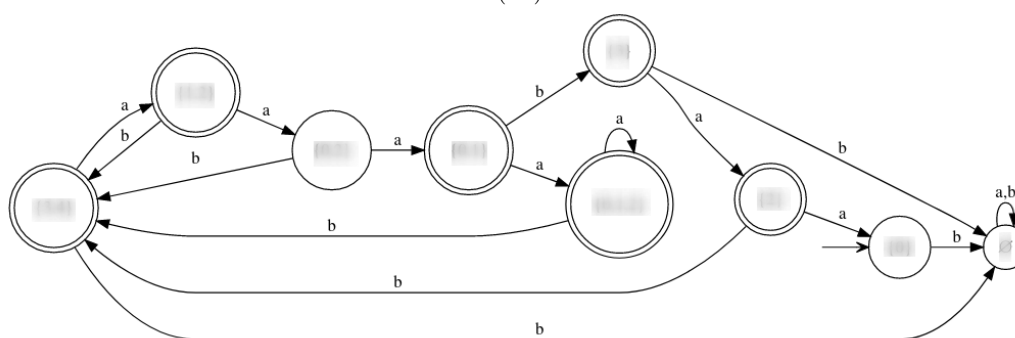
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



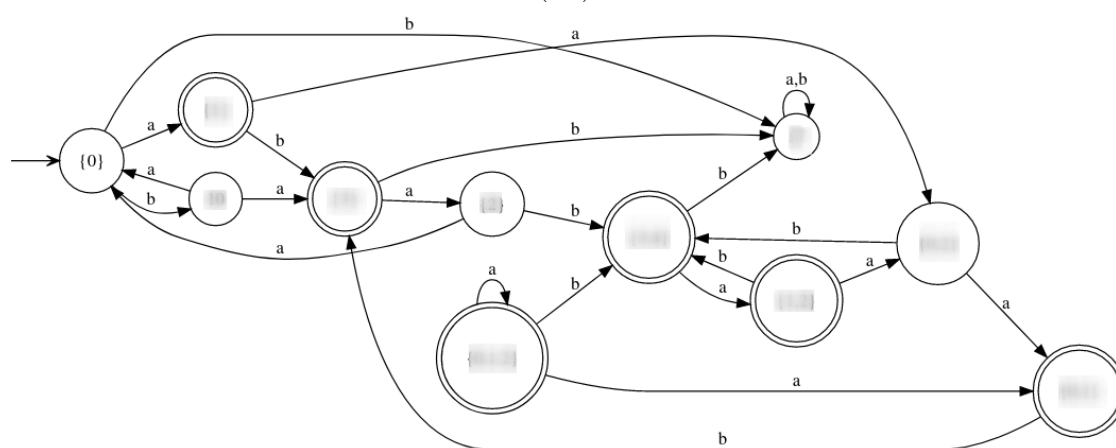
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

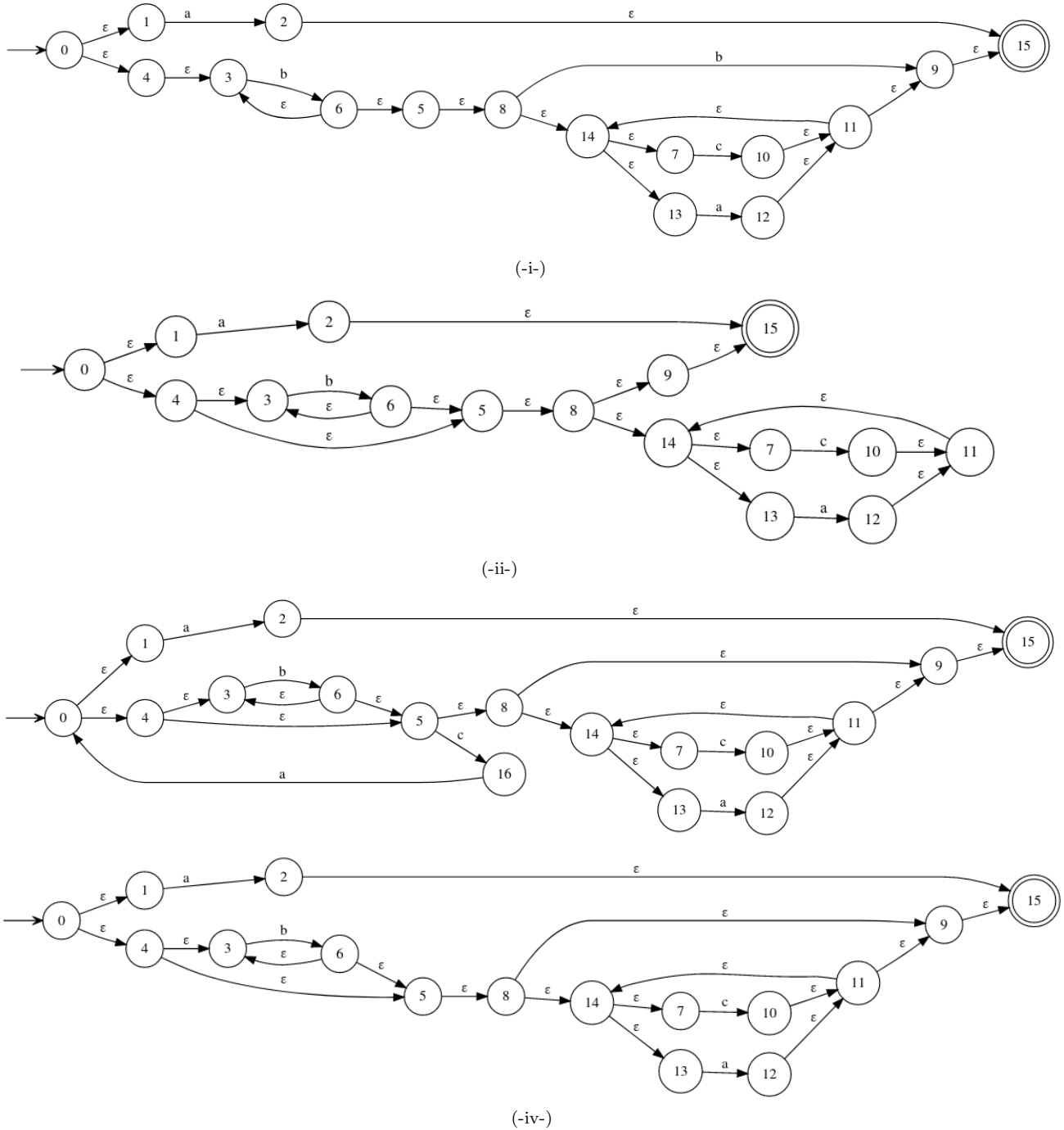


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 3 :

	b	c			f		h	i	j

Question 4 :

		c		e			h		j			m	n

Question 5 :

		c	d		f		h		j	k

Question 6 :

	b		d	e

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b			e	f	g	h	i	j	k		

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

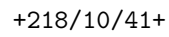
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A accepte le langage universel.
☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ d A possède un état puits ☐ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Σ^* est fermé par facteur.
☐ f Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A a au moins un état accessible.
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A n'est pas complet. ☐ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☒ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☒ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

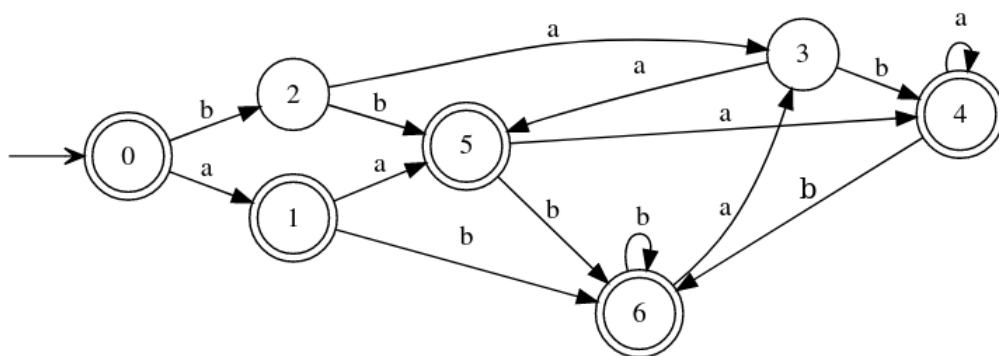
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

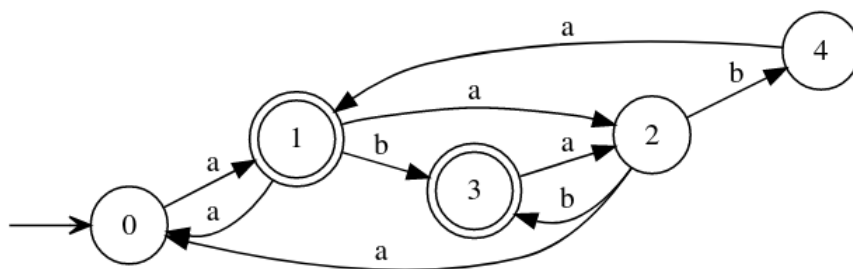
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

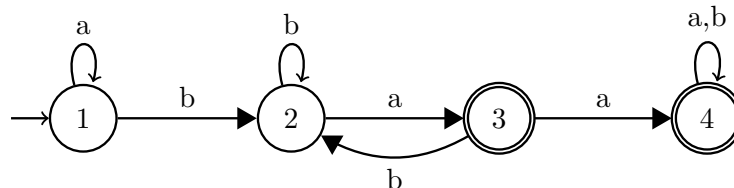
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ Aucune des expressions régulières proposées.	



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

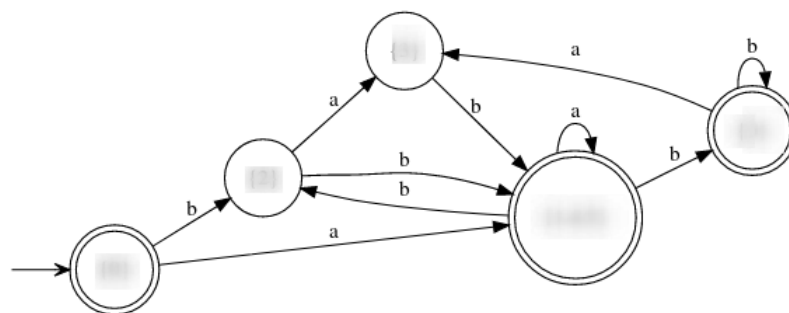
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 2 ☐ d 6 ☐ e 5 ☐ f 3 ☐ g 0

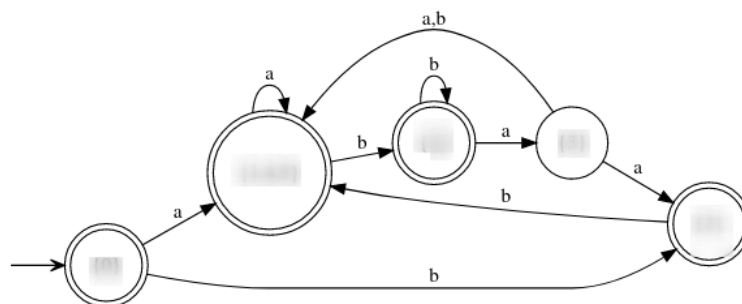
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

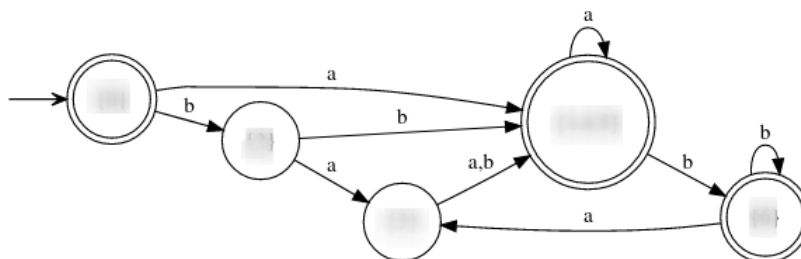
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



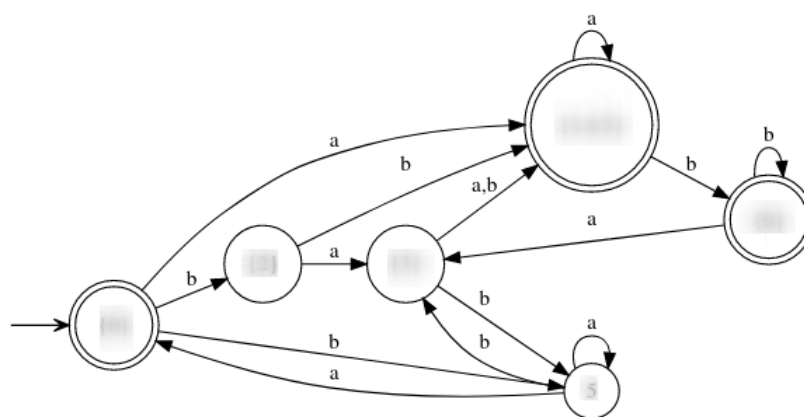
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

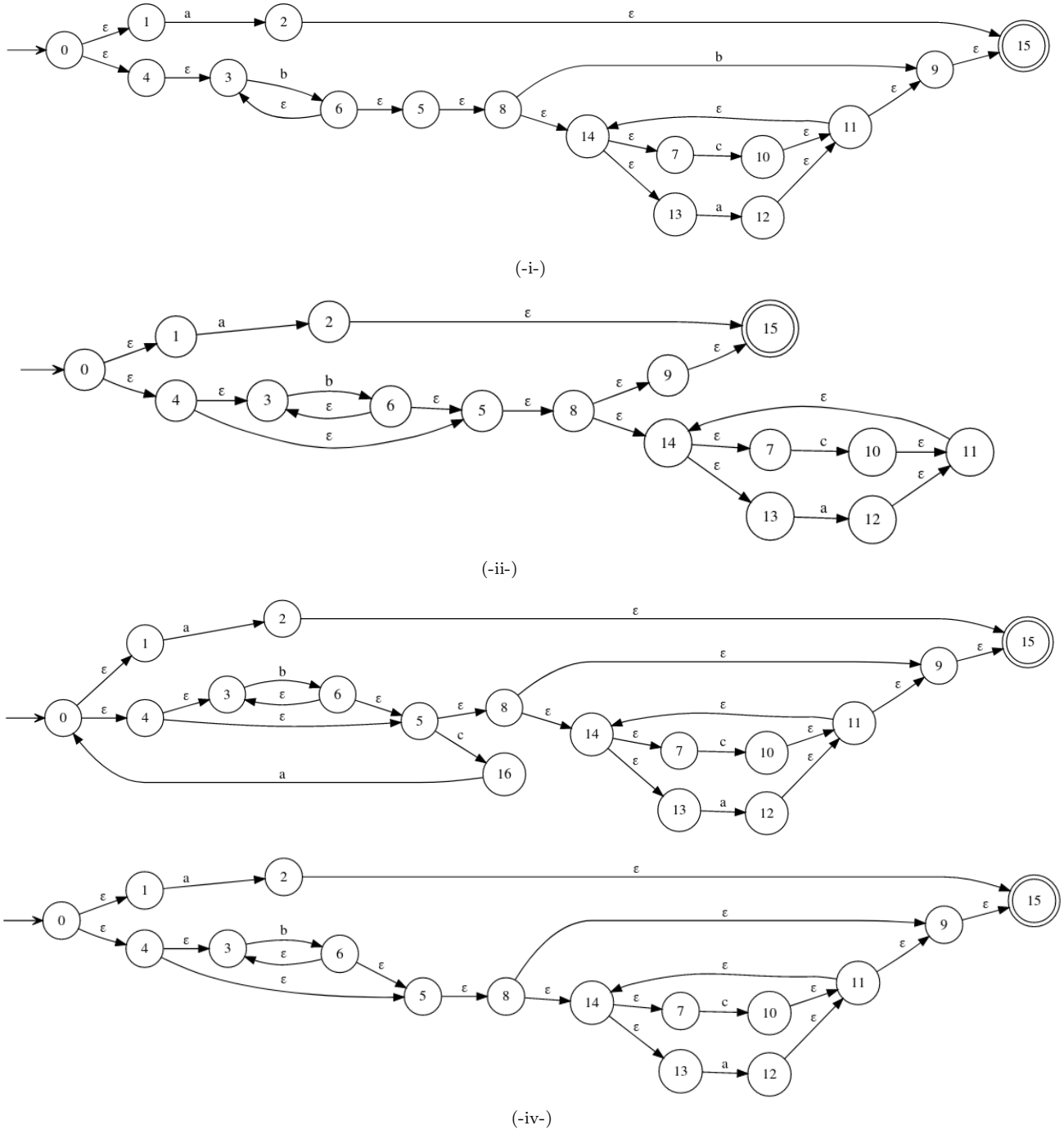


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d		f		h	i

Question 3 :

	b		d	e

Question 4 :

a	b	c	d					i	j

Question 5 :

a		c			f		h		j	k

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

			d		f					k	l	m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

			d	e	f	g	h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

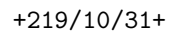
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ b P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☒ d u n'est pas accepté par A .
- ☐ e A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ g A n'est pas complet.
- ☒ h $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☒ i A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.
☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A est complet.
☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_4 = a + b$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

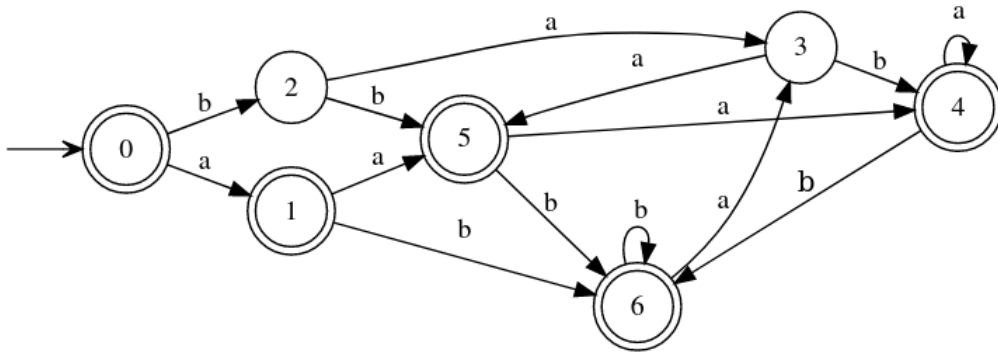
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

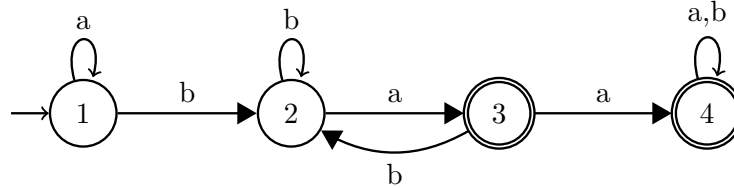
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 3 ☐ e 2 ☒ f 4 ☐ g 6

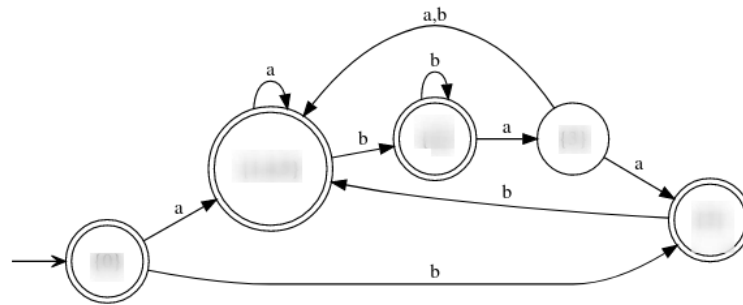
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

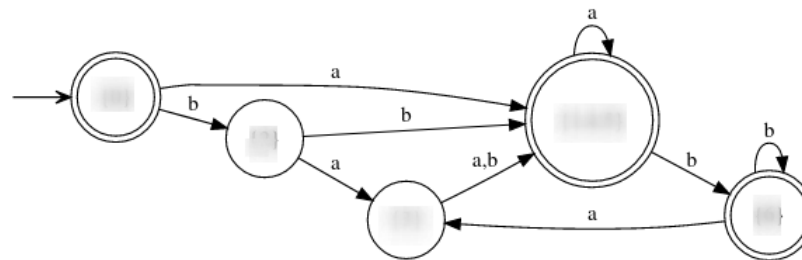
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



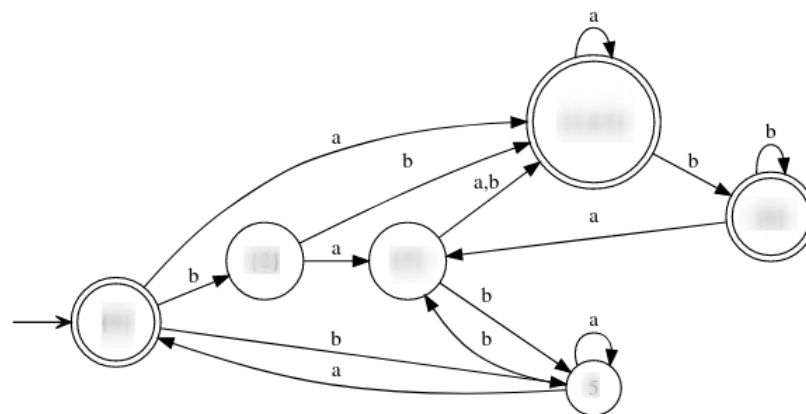
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

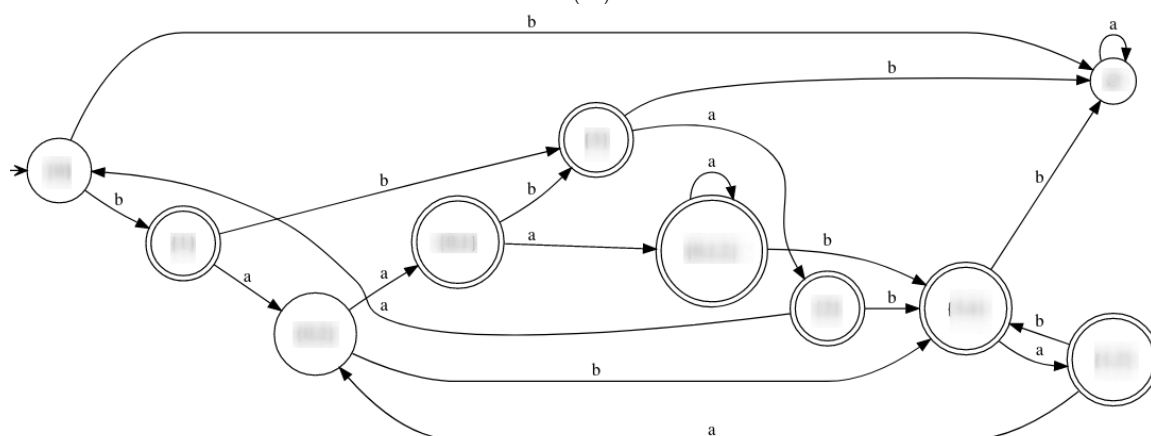


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

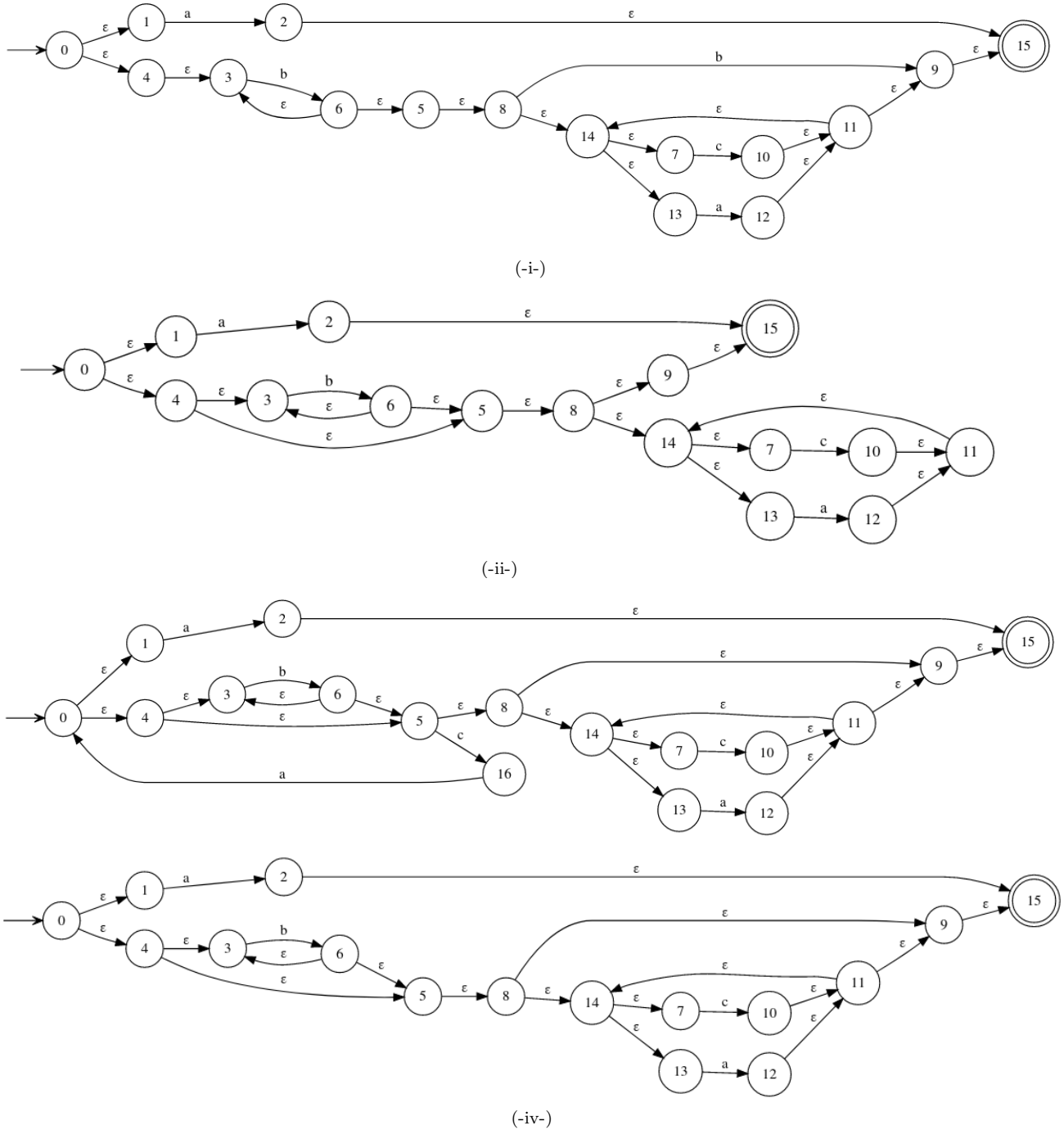


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

a	b	c		e					j	k

Question 5 :

	b	c	d	e	f		h	i

Question 6 :

a			d		f		h					m	n

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

		c	d			g	h	i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d		f	g	h		j		l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

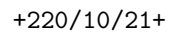
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d u est accepté par A . ☐ e Les états de A sont tous accessibles. ☐ f A est complet.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par suffixe. ☒ b Σ^* est fermé par facteur.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ est fermé par facteur.
☒ e Σ^* est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ h Σ est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☒ c A n'est pas complet. ☒ d $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
☐ f A a au moins un état non co-accessible.
☒ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ h u n'est pas accepté par A . ☒ i A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ A possède un état puits ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

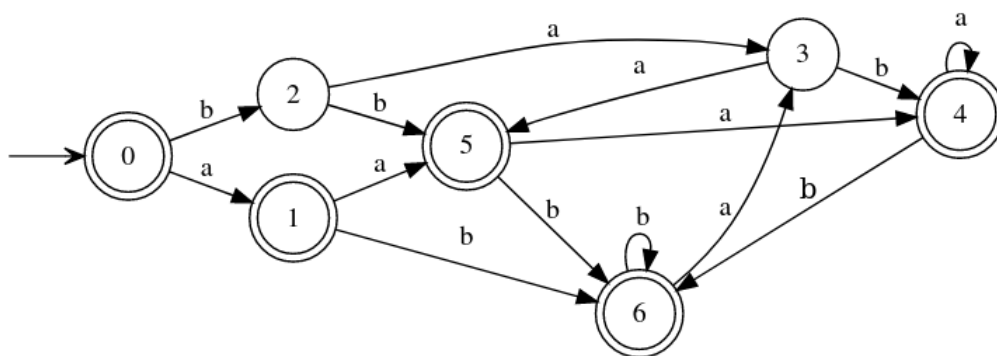
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

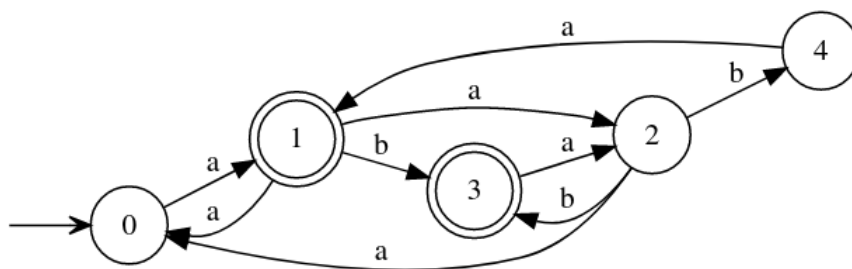
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

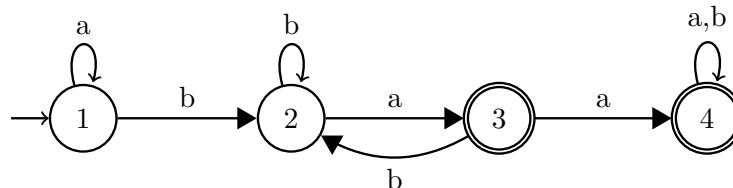
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 5 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 3 ☒ f 4 ☐ g 2

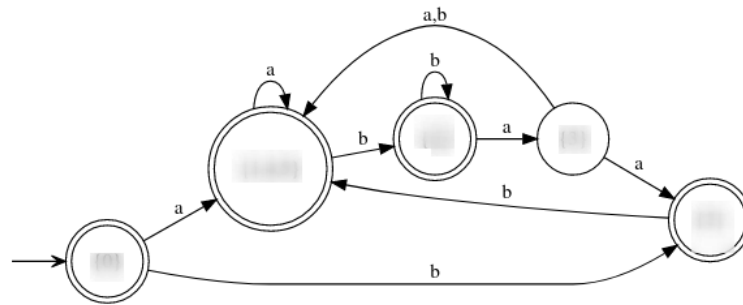
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

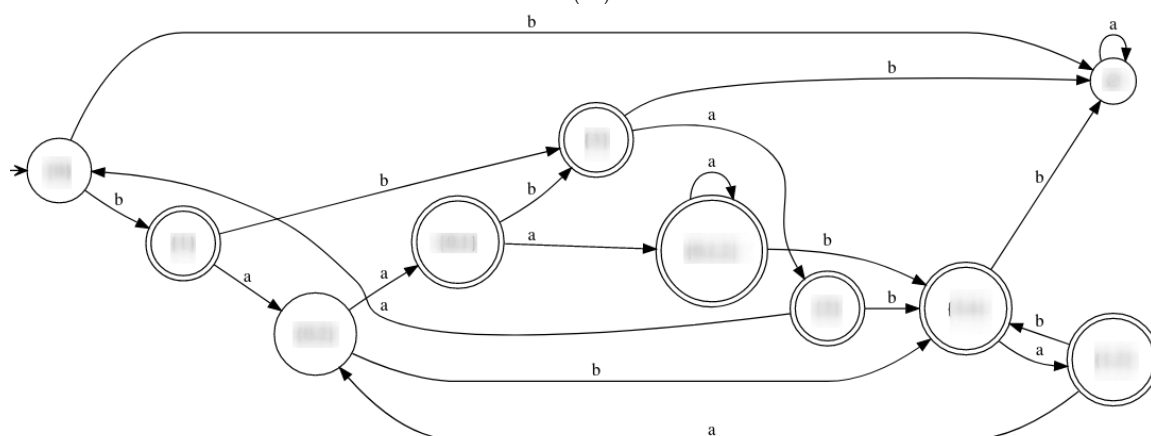


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

		c	d		f		h	i	j

Question 4 :

a	b			e	f				j	k

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

		c			f		h		j			m	n

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c	d			g	h	i		k	l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

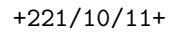
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three lines: two solid outer lines and a dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed in a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Σ est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
- ☒ f Σ^* est fermé par préfixe. ☒ g Σ^* est fermé par facteur.
- ☒ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ b Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☐ d A a au moins un état co-accessible.
- ☒ e A a au moins un état accessible. ☒ f A n'est pas complet.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot est une application. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

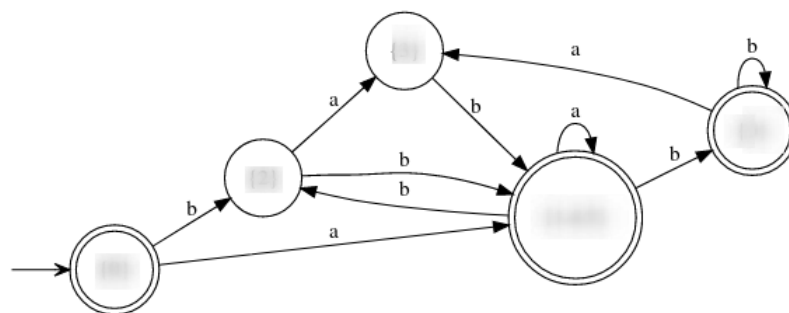
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 2

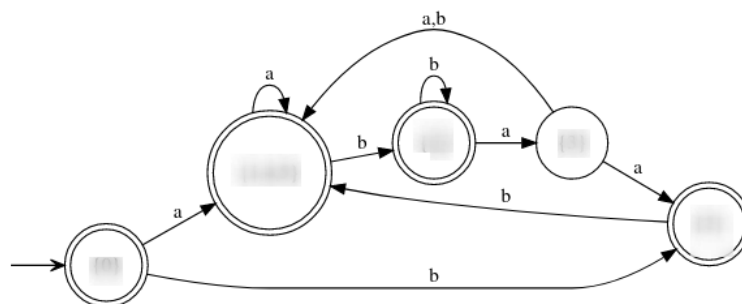
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

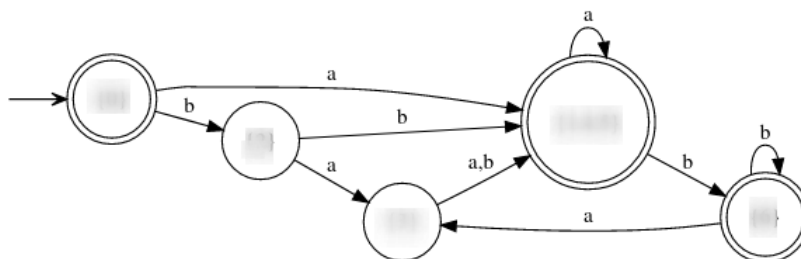
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



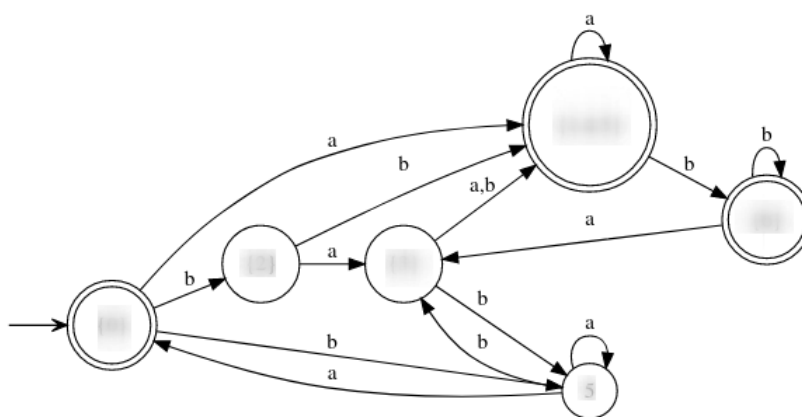
(-i-)



(-ii-)

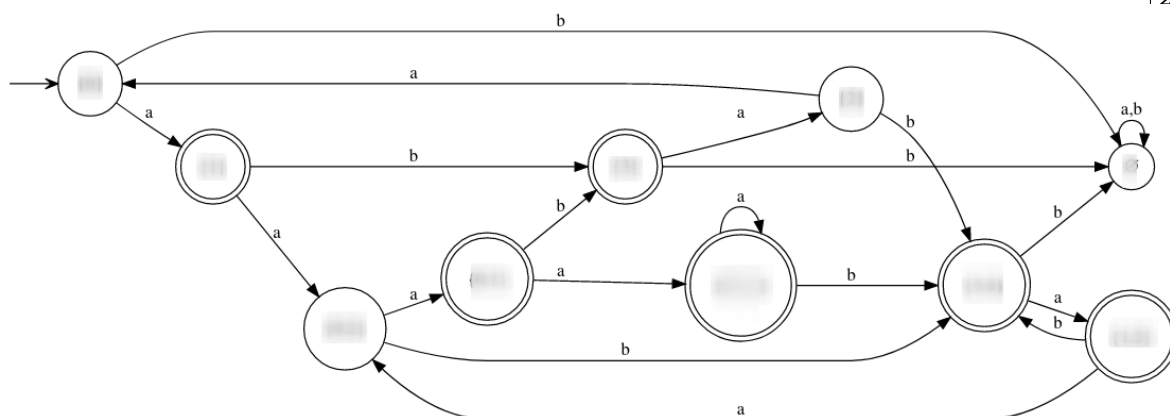


(-iii-)

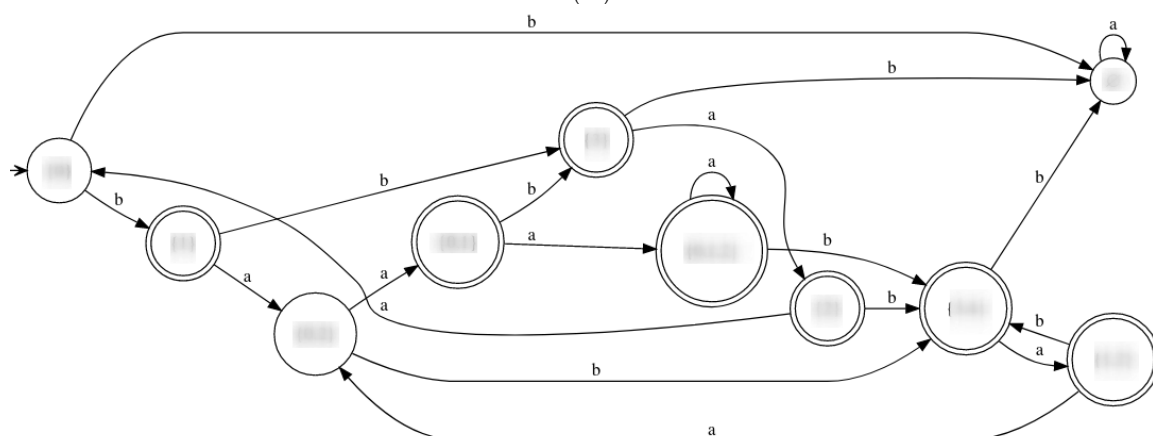


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



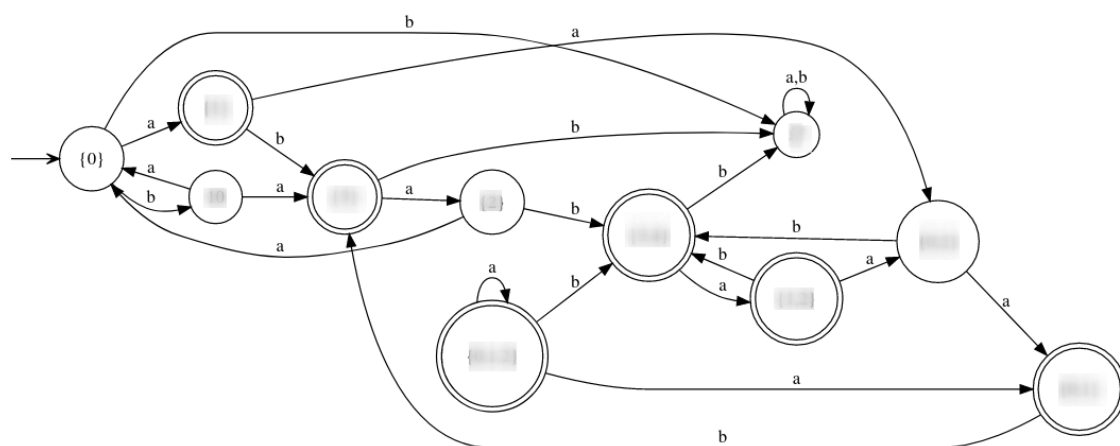
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

	b	c	d	e				i	j

Question 5 :

a		c	d					i	j	k

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

		c			f		h				l	m	n

Question 8 :

	b		d	e	f	g	h	i

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c		e	f	g		i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

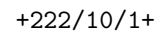
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet.
- ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ e u est accepté par A .
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini.
- ☒ b Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ c Un mot est une application.
- ☒ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ f Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ g Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☒ h Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ i Un mot est une fonction.
- ☒ j Un mot peut être vide.
- ☒ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ b Σ est fermé par suffixe.
- ☒ c Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ e Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ f Σ est fermé par préfixe.
- ☐ g Σ est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par préfixe.

- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f A accepte le langage universel.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ b A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ e A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

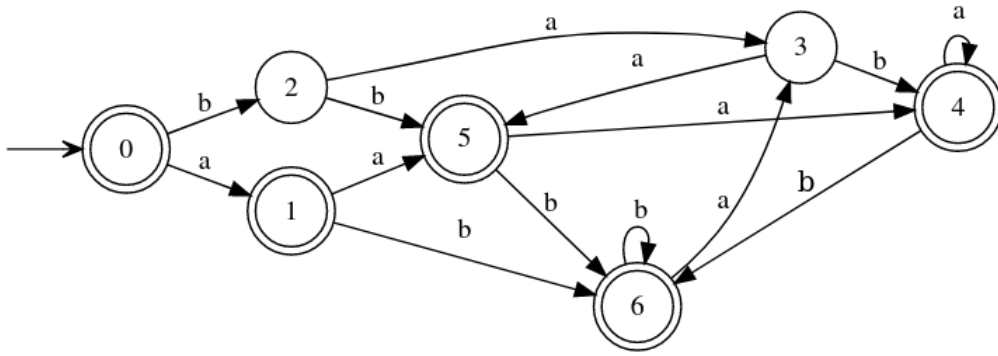
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

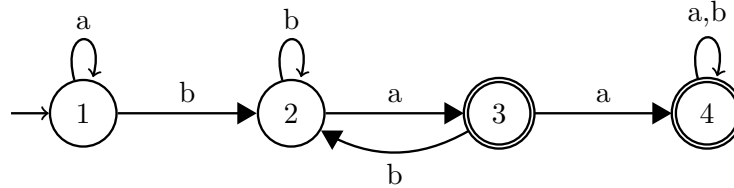
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

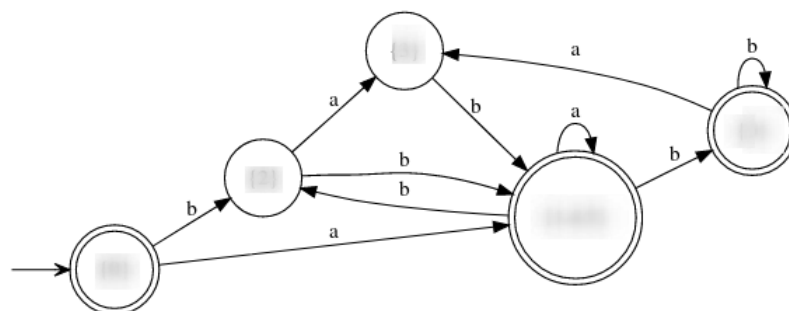
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 6 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 3 ☐ f 5 ☒ 4

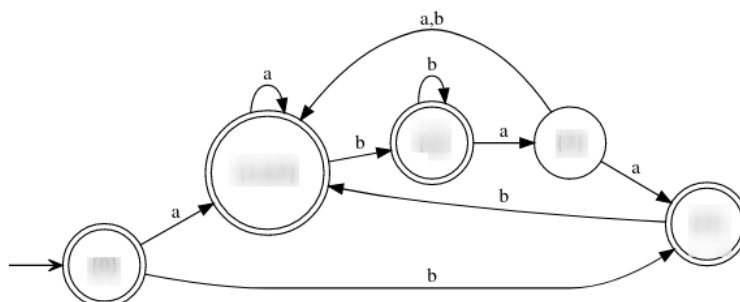
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

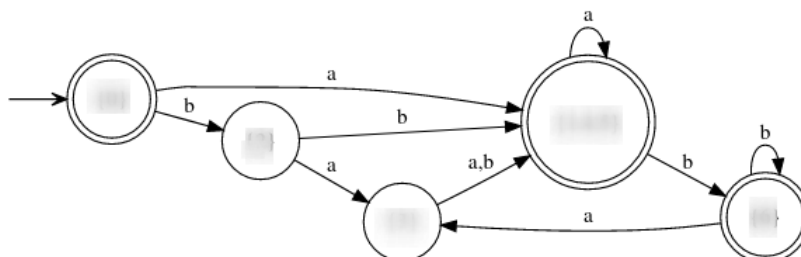
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



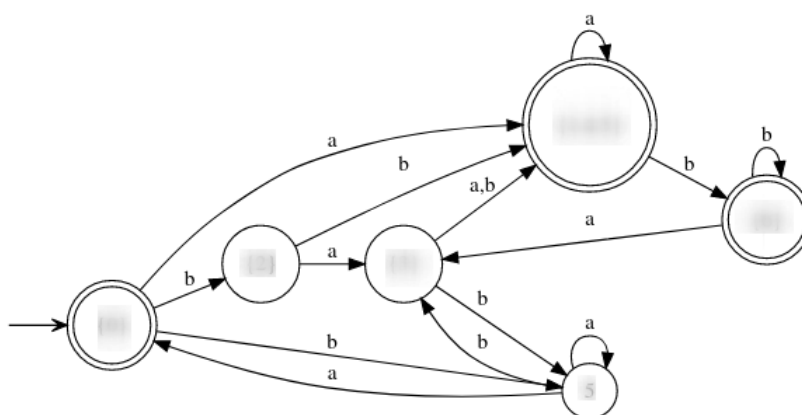
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

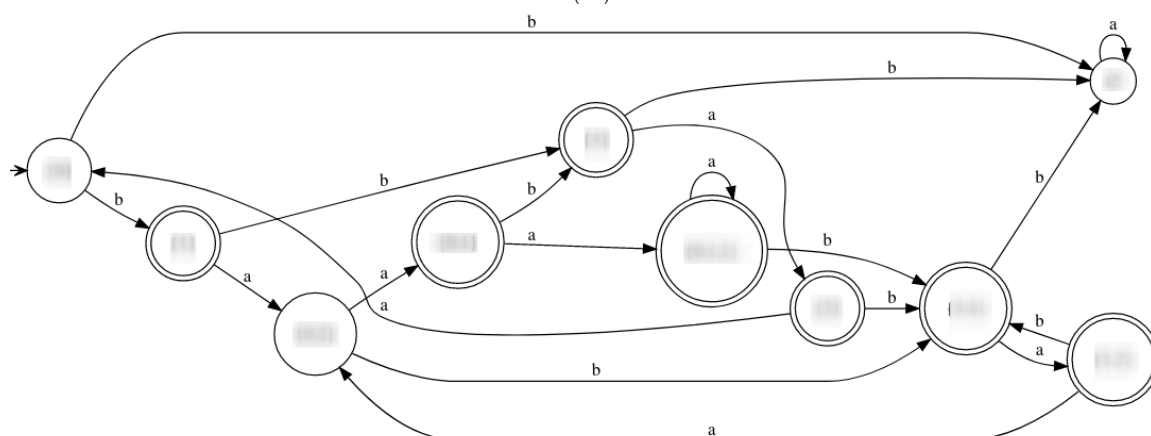


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



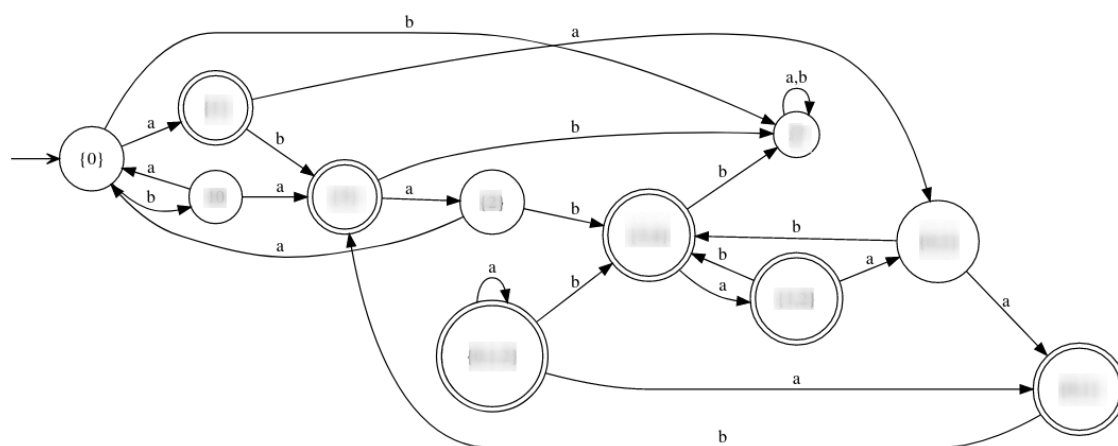
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

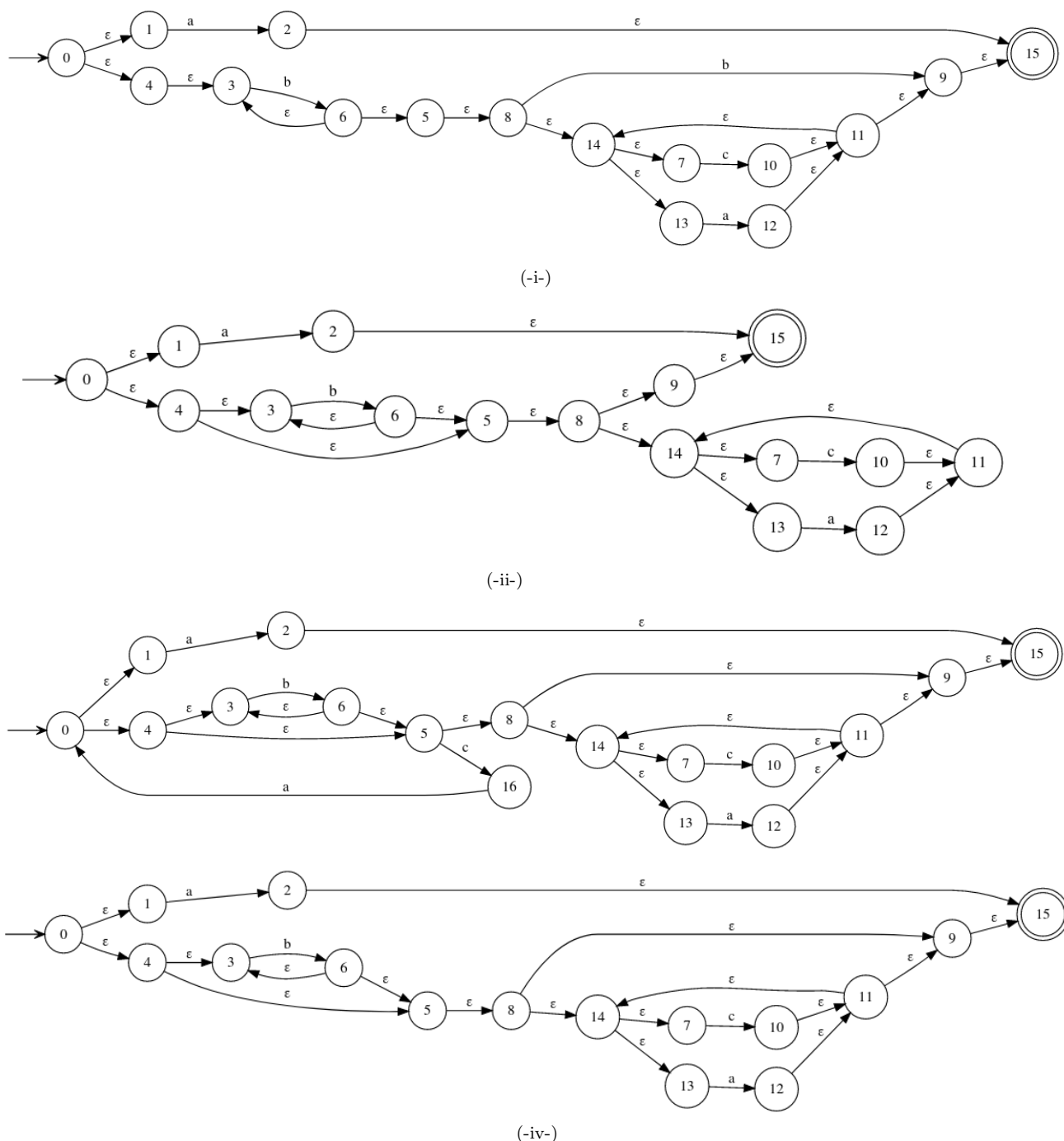


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a				e		g						l	m	n

Question 5 :

	b		d		f	g		i	j

Question 6 :

		c	d	e	f	g	h	i

Question 7 :

	b			e		g	h		j	k

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d		f	g	h	i	j		l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

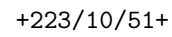
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.

☐ A a au moins un état accessible.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A est complet. ☐ A a des états accepteurs.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A .

☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une application. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ Un mot est une fonction. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot peut être infini.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ f A possède un état puits ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

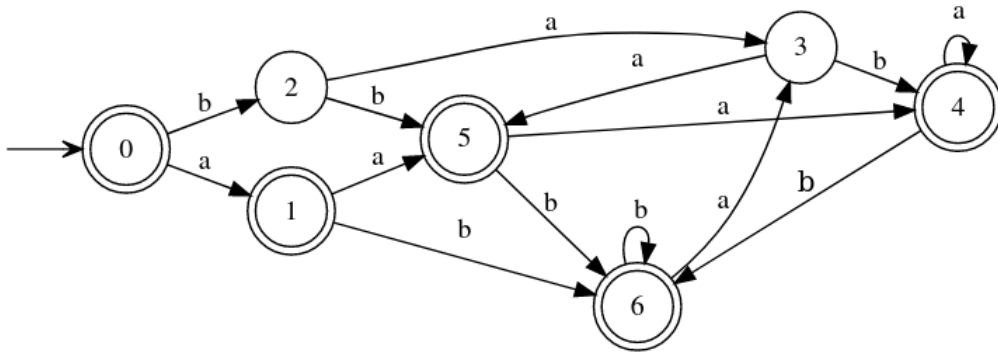
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

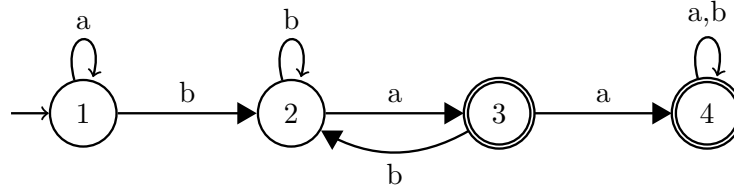
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

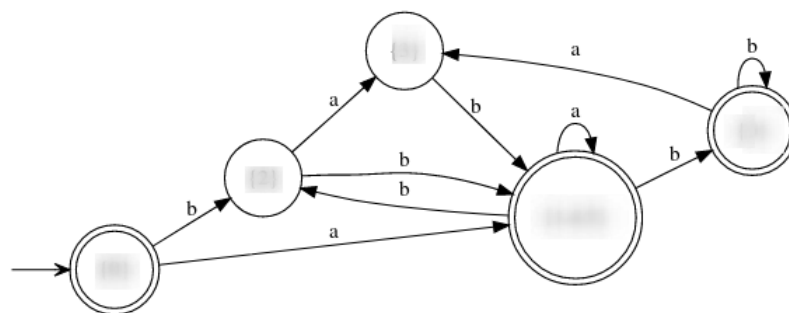
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 5 ☒ c 4 ☐ d 6 ☐ e 3 ☐ f 1 ☐ g 2

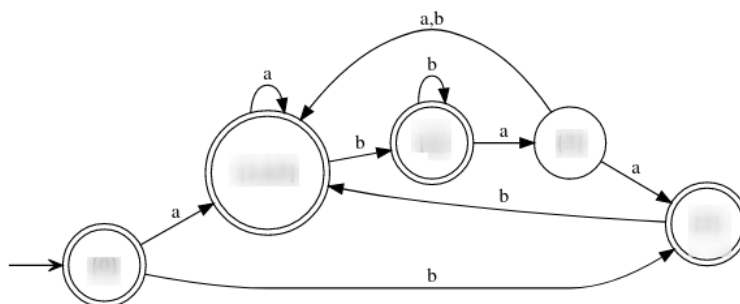
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

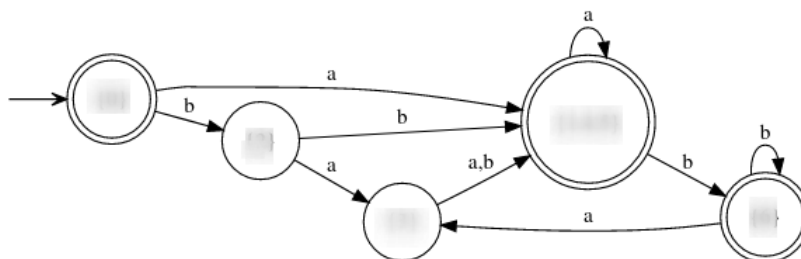
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



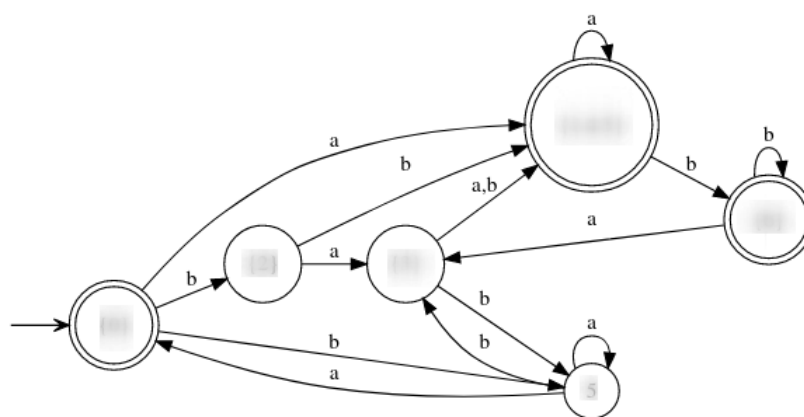
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



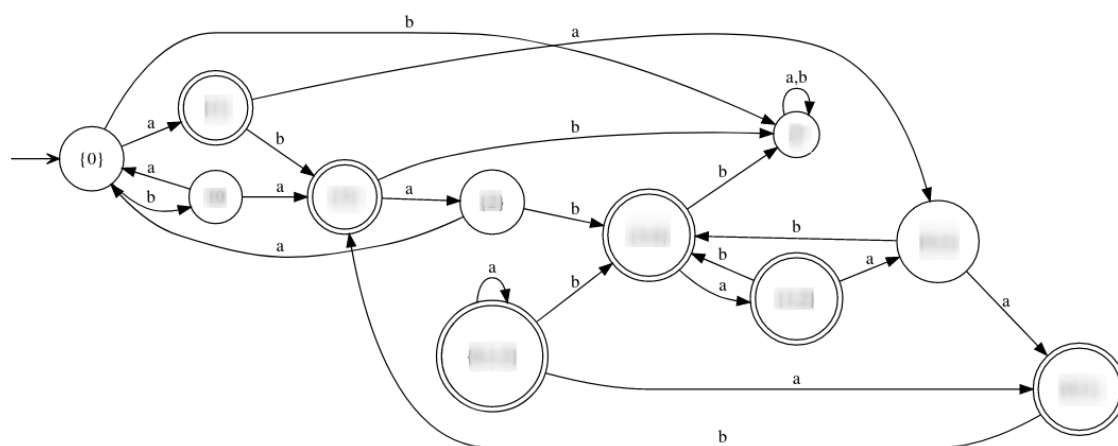
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 :  ☐ b  ☐ d  ☐ f ☐ g   ☐ j ☐ k

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g 

Question 5 :   ☐ c ☐ d  ☐ f  ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d 

Question 7 :   ☐ c   ☐ f     ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a  ☐ c ☐ d  ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b  ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c  ☐ e ☐ f ☐ g   ☐ j ☐ k ☐ l 

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f ☐ g ☐ h

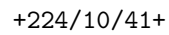
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f

Question 14 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 :  ☐ b

Question 17 : ☐ a ☐ b  ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ u n'est pas accepté par A . ☐ d A a au moins un état non accessible.
☒ A n'est pas complet. ☒ A a au moins un état accessible.
☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ h A a au moins un état co-accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
☐ c u est accepté par A . ☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ P est forcément déterministe.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Σ est fermé par facteur. ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.
☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii- ☐ la Figure 3-i- ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii- ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii- ☐ la Figure 4-ii- ☐ la Figure 4-iv- ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

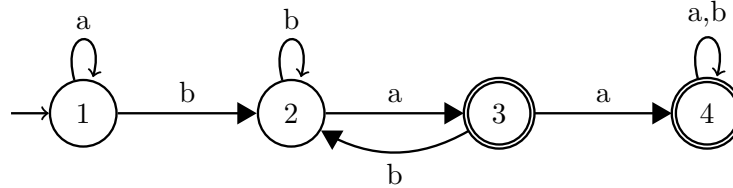
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

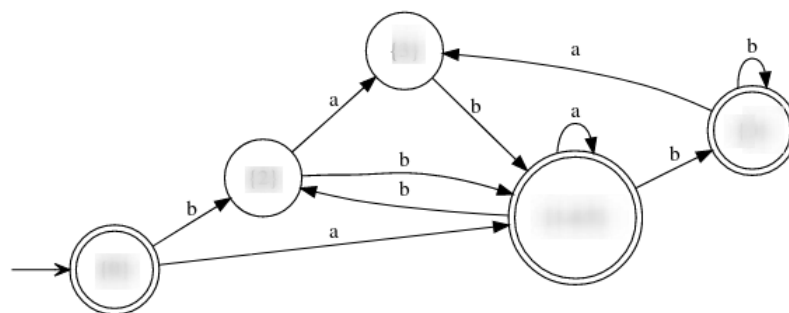
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 2 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 5

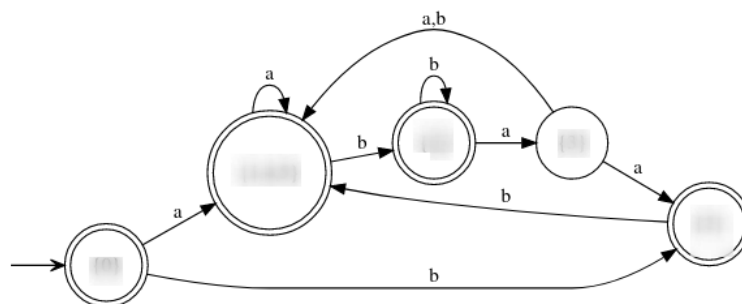
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

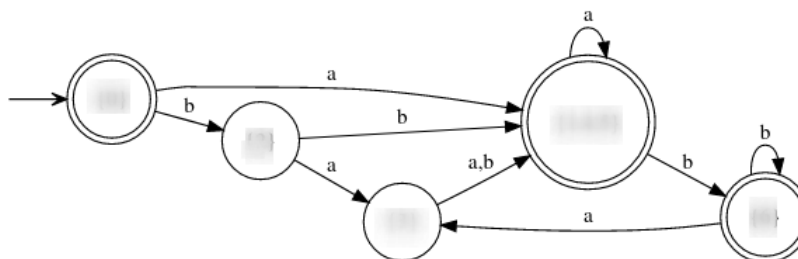
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



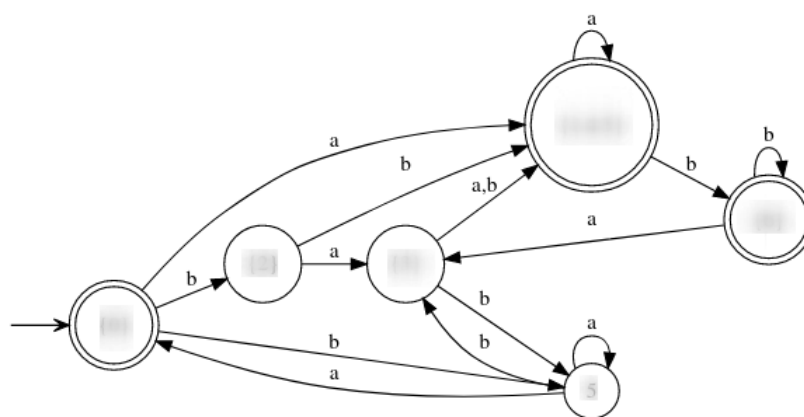
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

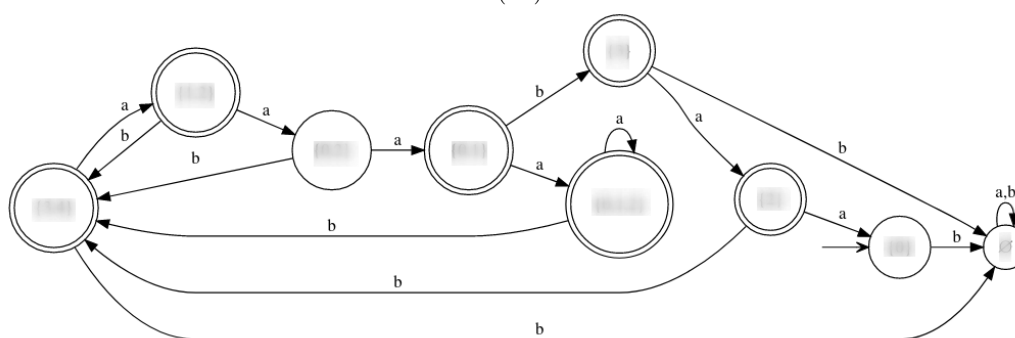
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d			g	h		j	k

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

a			d	e

Question 5 :

		c	d			g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

	b					g	h				l	m	n

Question 8 :

	b	c	d		f	g	h	i

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a		c	d	e			h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

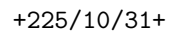
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.

☐ Un mot est une application. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot est une fonction. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ k Un mot peut être infini. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☒ A n'est pas complet.
☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☒ A a au moins un état accessible.
☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ g A a au moins un état non accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d u est accepté par A . ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e A possède un état puits
☐ f A accepte le langage universel.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_4 = a + b$ ☐ b $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ c $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☐ d $X_2 = bX_3 + aX_2$
☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ g $X_3 = aX_3 + cX_4$
☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$ ☐ i $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ j $X_1 = aX_1 + b$
☐ k $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ m $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ b $X_4 = a + b$ ☐ c $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ d $X_4 = a^* + b^*$
☐ e $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☒ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2$ ☐ d $X_1 = a^*b$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☒ $X_2 = b^*aX_3$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ b $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$ ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

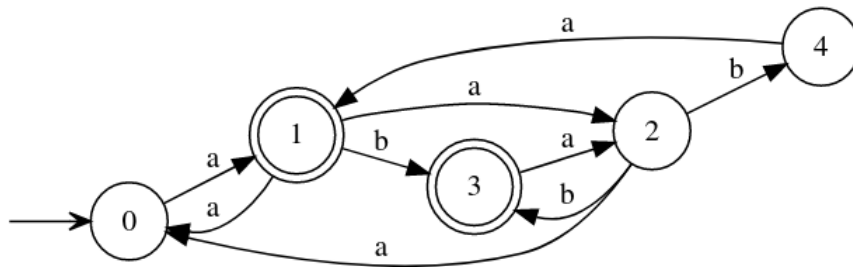
- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

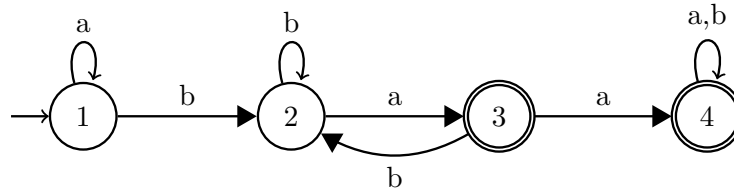
- ☐ a $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$ ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 1 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 5 ☐ f 6 ☐ g 2

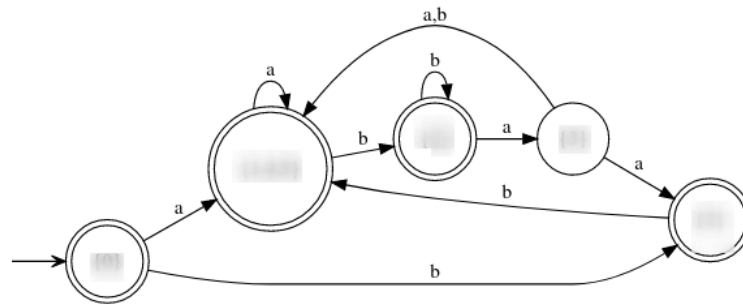
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

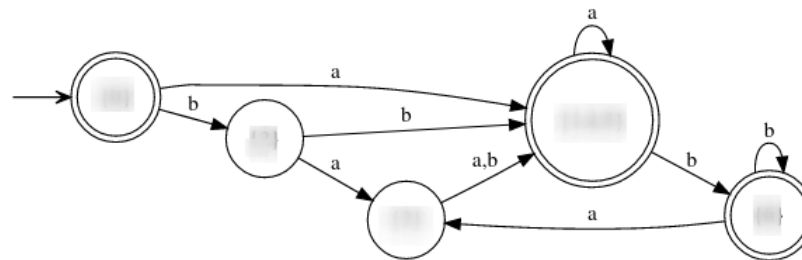
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



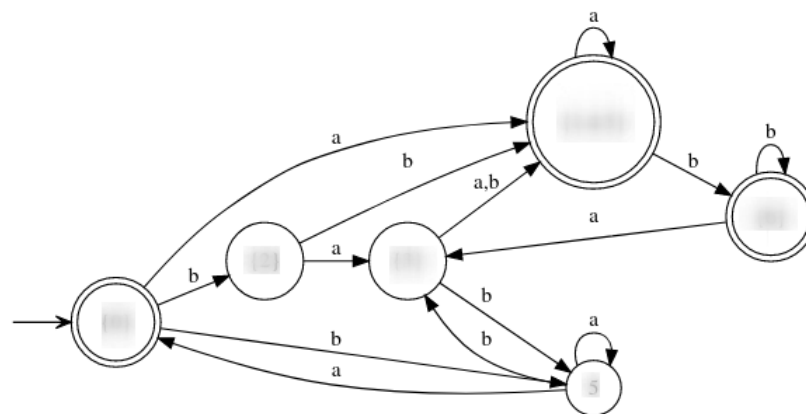
(-i-)



(-ii-)

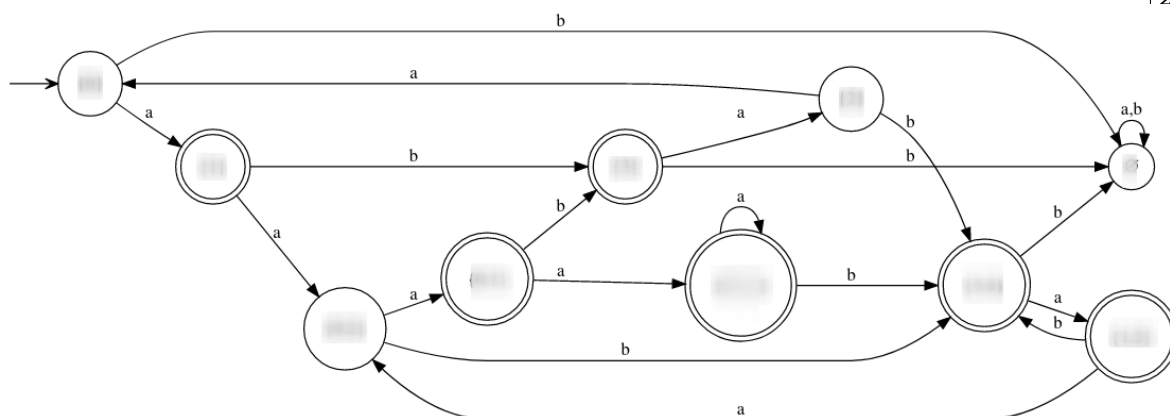


(-iii-)

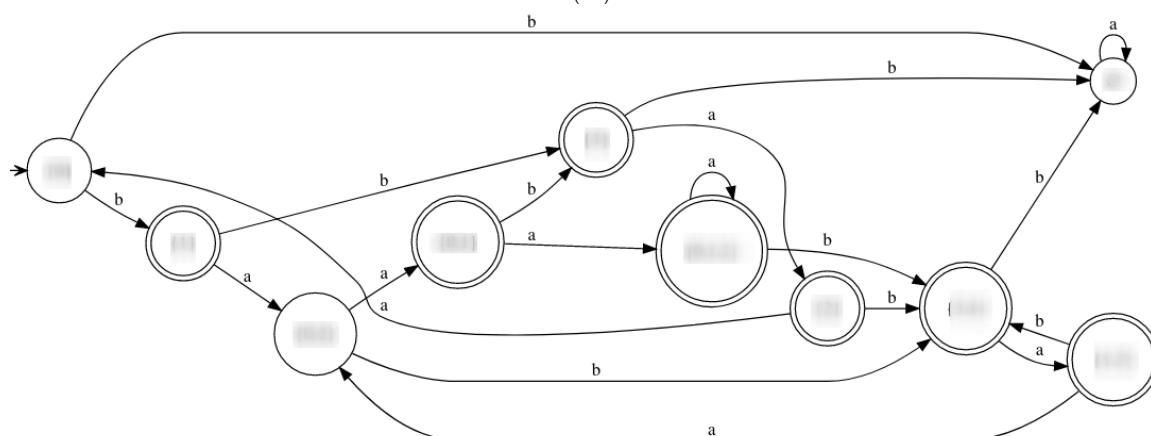


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

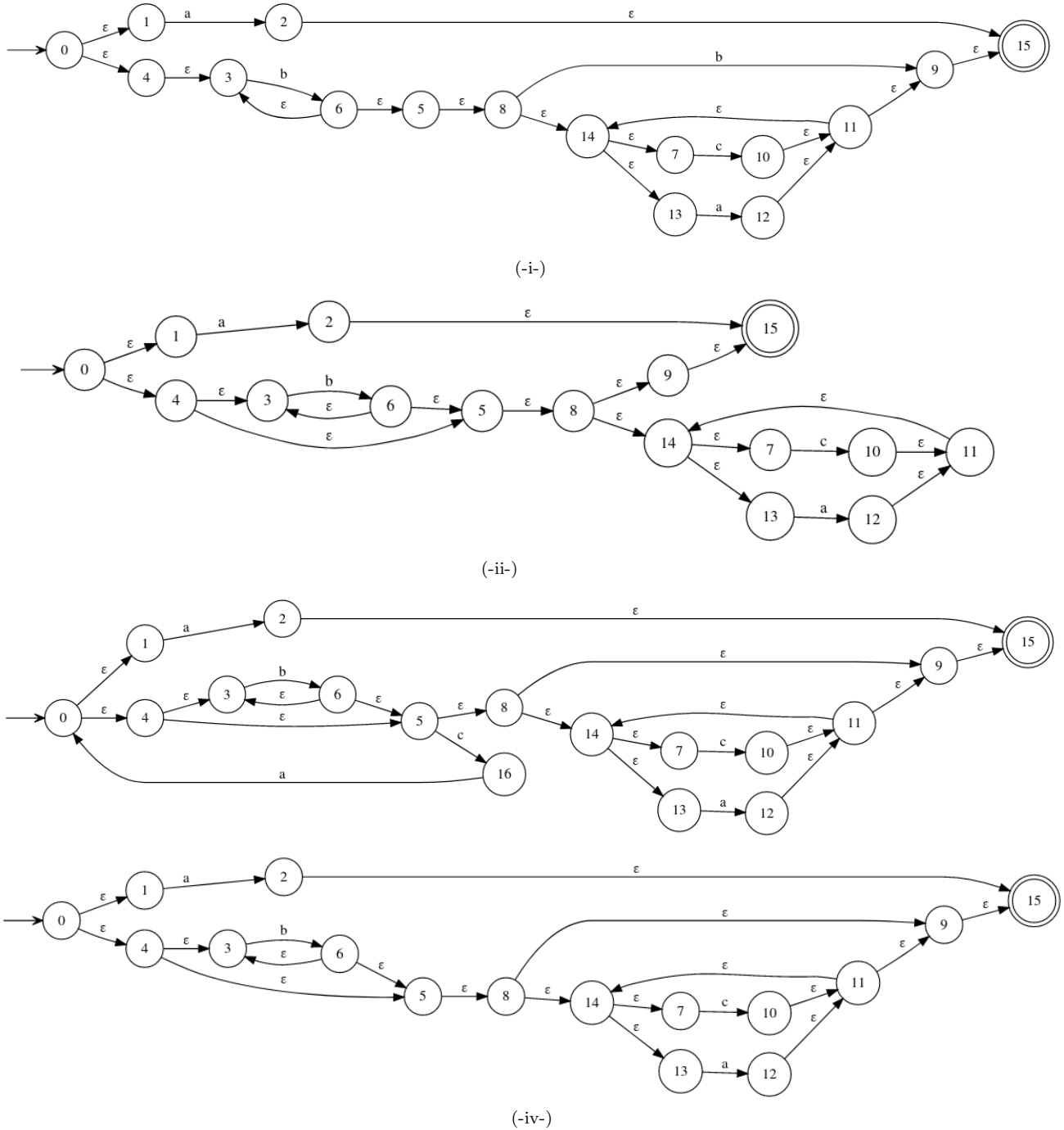


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a    f g   k  m n

Question 5 : a  c  e g  j k

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a   d  f  h i j

Question 8 : a b  d e f  h i

Question 9 : a  c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d   g  i j k  m

Question 12 : a b c d e  g h

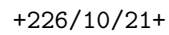
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une application. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ c Un mot peut être infini. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot est une fonction.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A est complet.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.

☐ e u est accepté par A . ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ b A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☐ f A a au moins un état co-accessible.
☒ u n'est pas accepté par A . ☒ A a au moins un état accessible.
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b A accepte le langage universel. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e A possède un état puits
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

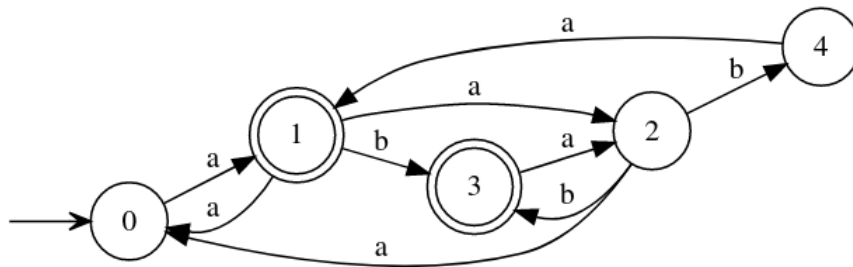
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

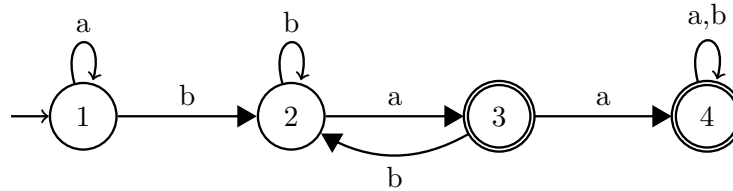
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☒ c 4 ☐ d 0 ☐ e 6 ☐ f 3 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d	e				i	j

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

	b	c	d			g						m	n

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

	b			e	f			i	j	k

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

	b	c	d	e	f		h	i

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d	e		g		i		k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

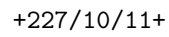
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	
☐	Un mot est une application.	☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	
☐ e	Un mot peut être infini.	☐ Un mot est une fonction.	
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐ Un mot peut être vide.	
☐ k	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ l	Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a	A possède un état puits	☐ b	nécessairement $ Q \geq 2$.
☐	L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.		
☐	$ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.	☐ e	Tous les états de A sont accepteurs.
☐	$ \delta = Q \times \Sigma $.	☐ f	
☐	A accepte le langage universel.	☐ g	
☐ h	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.		
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.		

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐	Σ^* est fermé par facteur.	☐	Σ^* est fermé par préfixe.	☐ c	Σ est fermé par préfixe.
☐ d	Σ est fermé par suffixe.	☐	Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.		
☐	Σ^* est fermé par suffixe.	☐ g	Σ est fermé par facteur.		
☐ h	Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.				
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.				
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.				

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ c A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.
☒ A a au moins un état accessible. ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

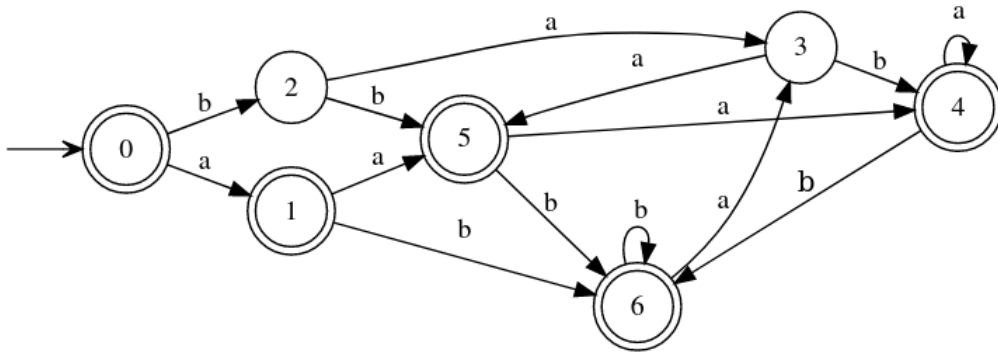
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

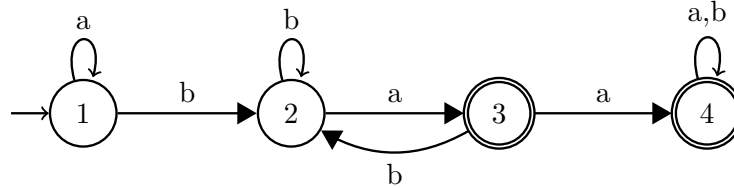
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

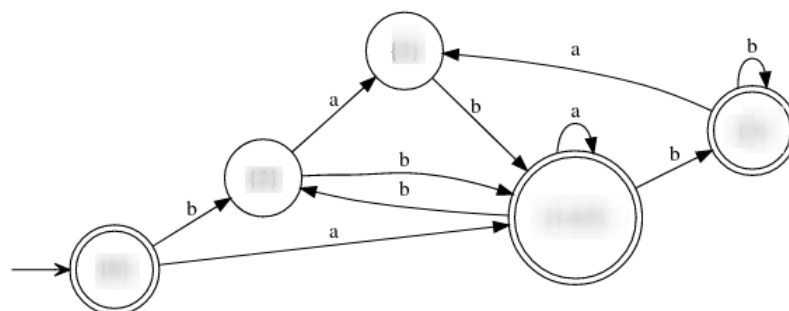
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 1 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 6 ☒ 4 ☐ g 5

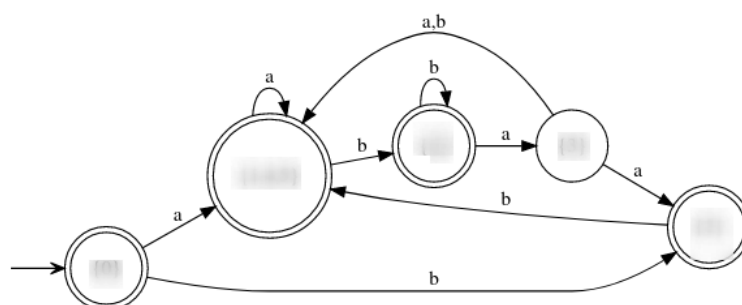
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

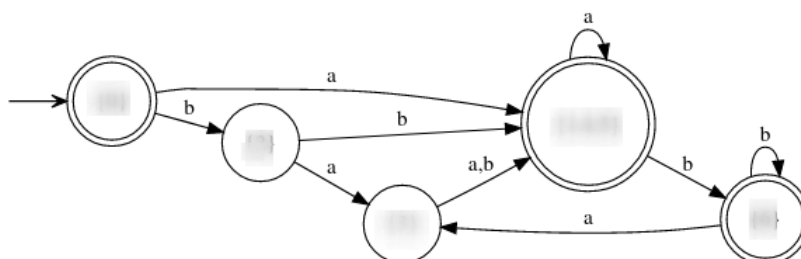
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



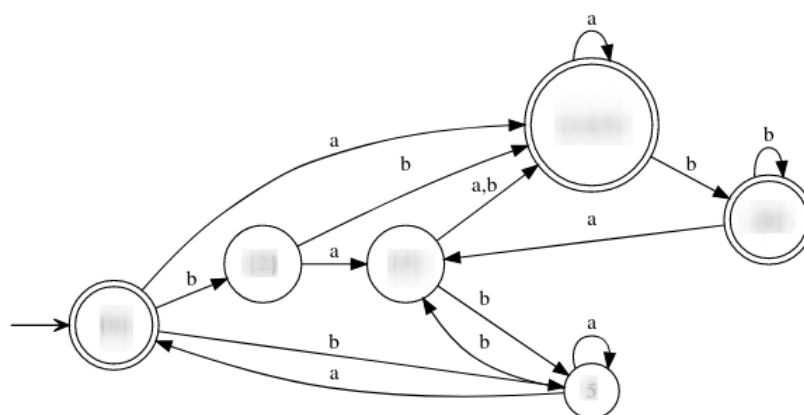
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

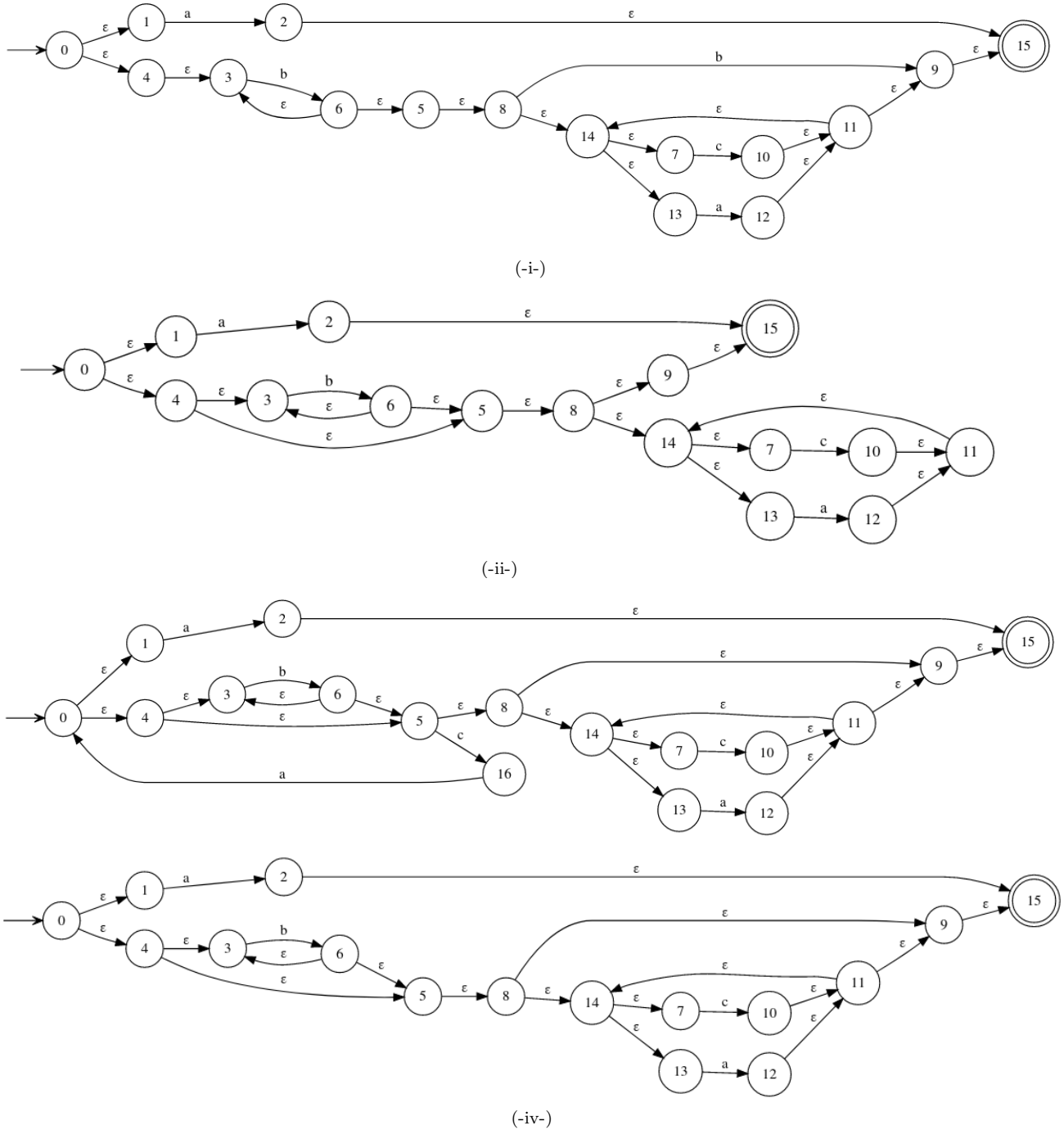


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a				e						k	l	m	n

Question 3 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 4 :

		c	d			g	h	i	j

Question 5 :

a		c			f			i	j	k

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

			d	e	f		h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

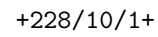
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot est une application.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ g	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐	Un mot est une fonction.	☐ j	Un mot peut être infini.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐ l	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a	A a au moins un état non accessible.	☐	A a au moins un état accessible.
☐	Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .	☐ d	A n'a pas d'état accepteur.
☐	u n'est pas accepté par A .	☐	$u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐	A a au moins un état non co-accessible.	☐	A n'est pas complet.
☐ i	A a au moins un état co-accessible.	☐	
☐ j	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.		
☐ k	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.		

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b u est accepté par A .
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A est complet.
☐ e A a des états accepteurs. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☒ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c A possède un état puits
☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par préfixe. ☒ b Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ est fermé par préfixe.
☐ e Σ est fermé par suffixe. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☒ g Σ^* est fermé par suffixe.
☒ h Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

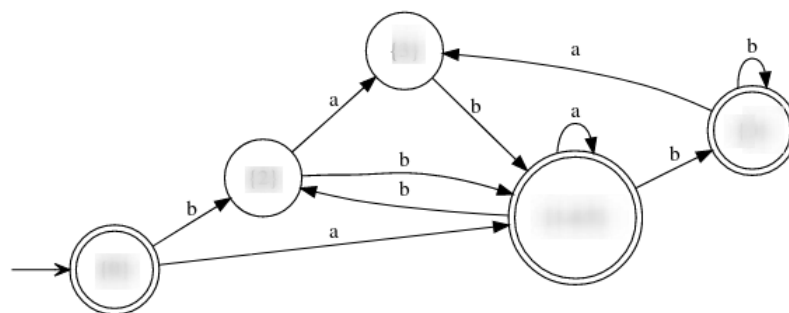
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 6 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 3

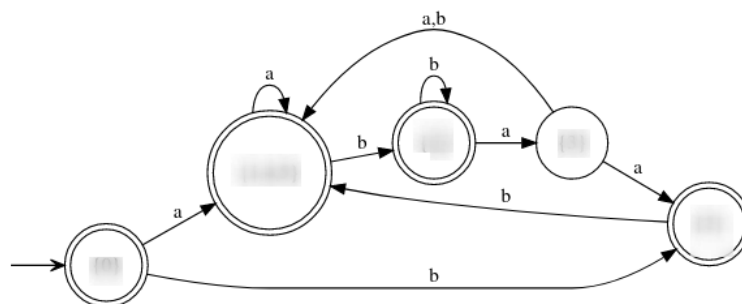
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

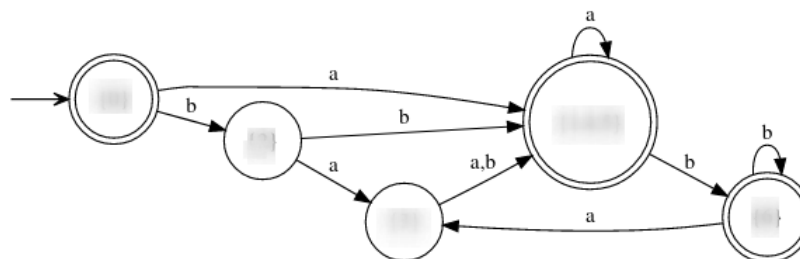
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



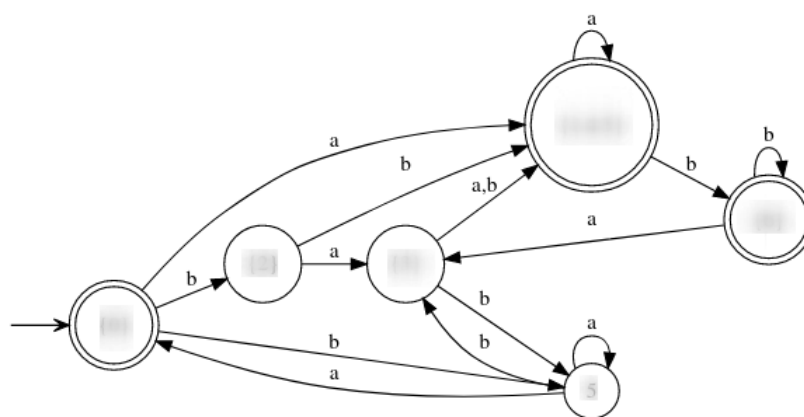
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

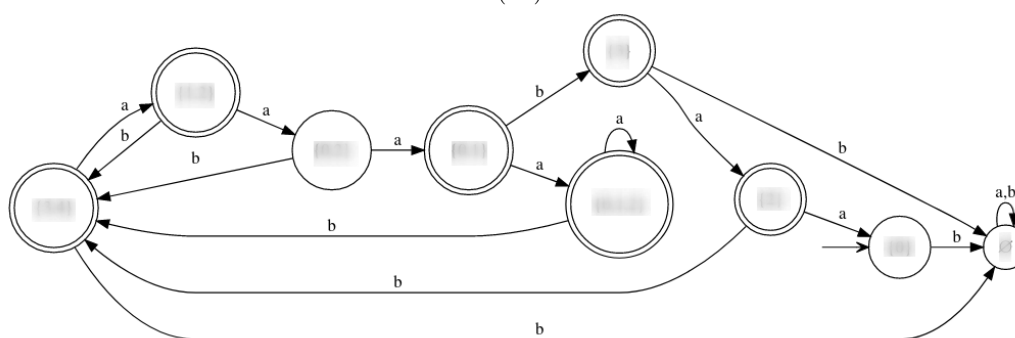
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

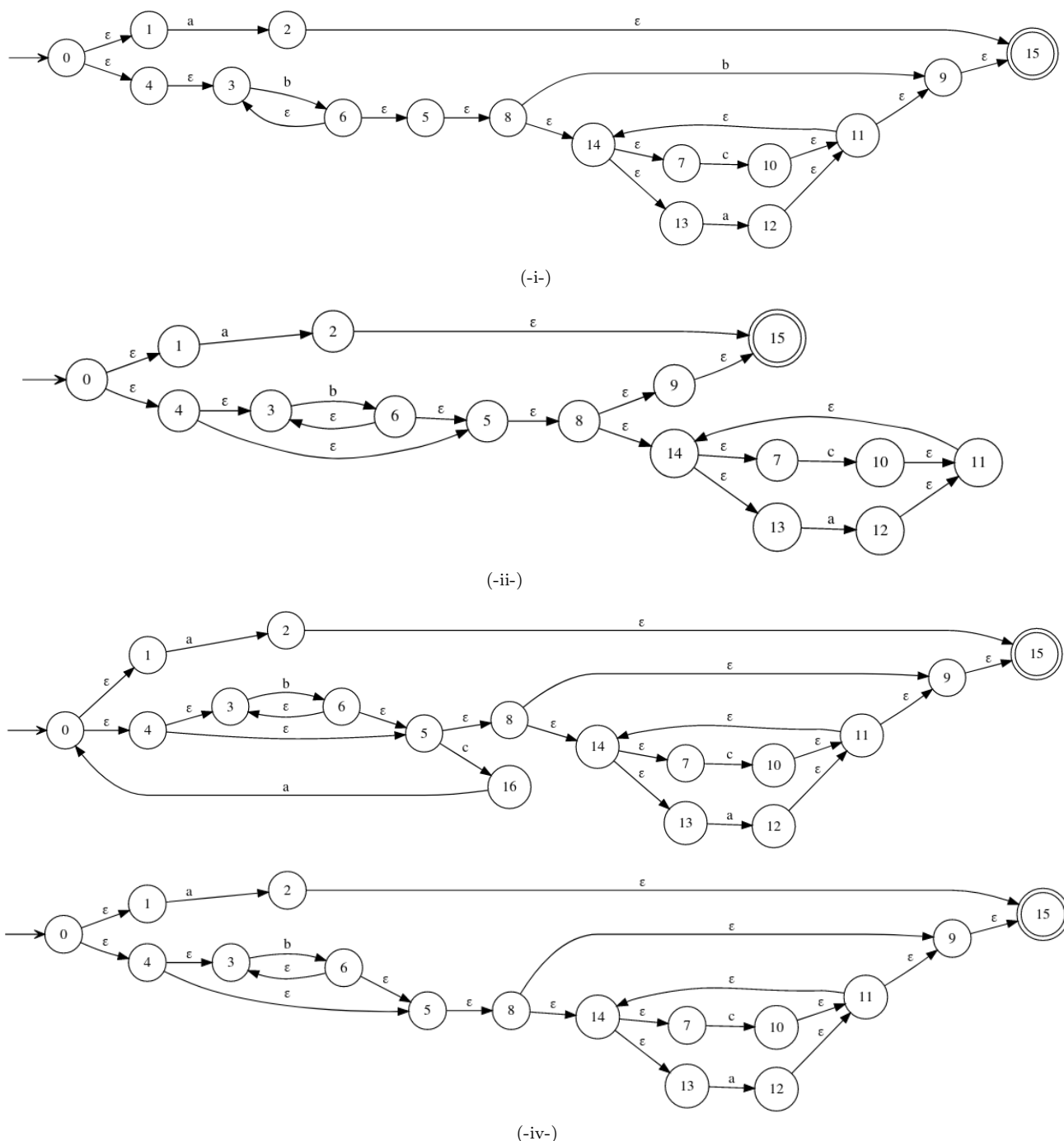


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a						g			j		l	m	n

Question 3 :

		c	d	e

Question 4 :

a			d				h	i	j	k

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a		c	d	e		g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

		c	d	e	f			i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e		g	h		j		l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

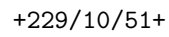
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐	Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.	☐	Σ^* est fermé par facteur.
☐	Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.	☐	Σ est fermé par préfixe.
☐	Σ est fermé par facteur.	☐	Σ^* est fermé par suffixe.
	☐	☐	Σ est fermé par suffixe.
☐	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐	Tous les états de A sont accepteurs.		
☐	L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.		
☐	A possède un état puits	☐	A accepte le langage universel.
	☐	☐	$ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.
	☐	☐	$ \delta = Q \times \Sigma $.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.		

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.

- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A est complet.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d u est accepté par A . ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f A a des états accepteurs.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a A n'est pas complet. ☒ b u n'est pas accepté par A . ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ e A a au moins un état co-accessible. ☒ f $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g A a au moins un état non accessible. ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ i A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii- ☒ b la Figure 3-iii- ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-i- ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii- ☐ b la Figure 4-ii- ☐ c la Figure 4-iv- ☒ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

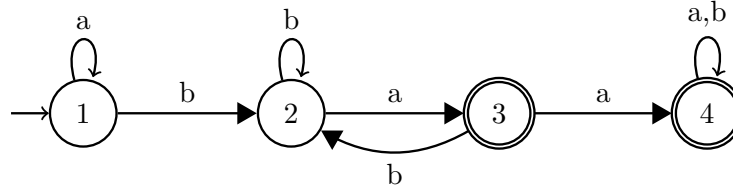
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 2 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

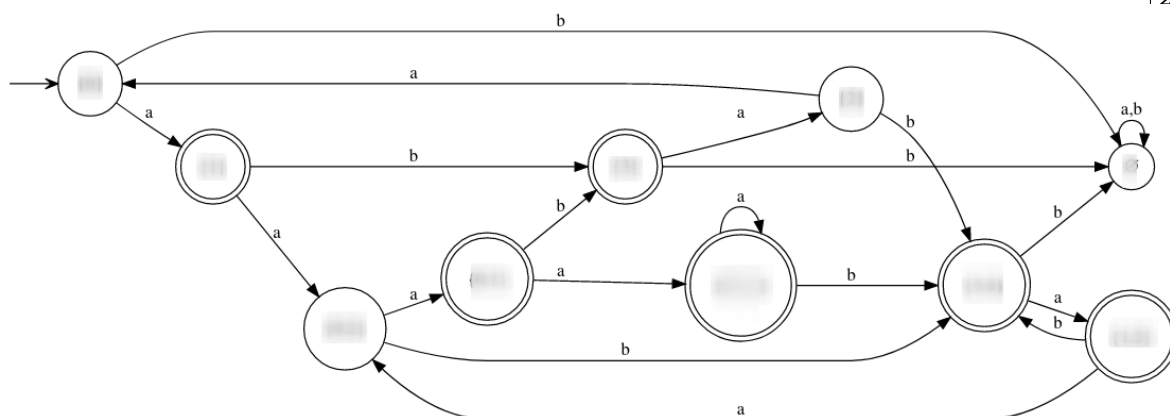


(-iii-)



(-iv-)

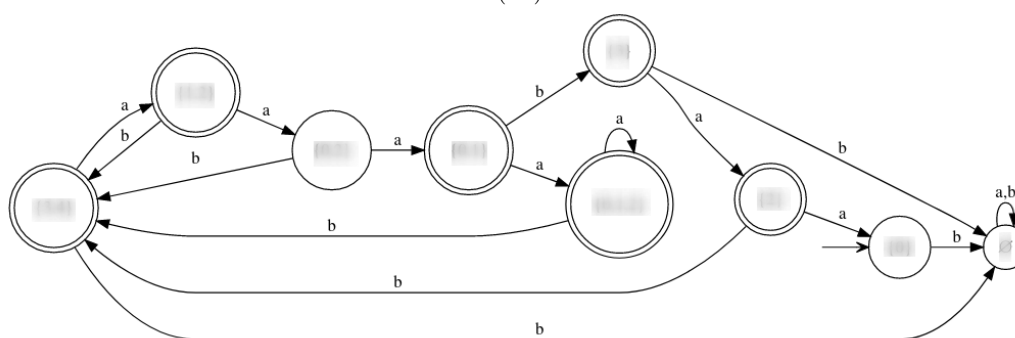
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



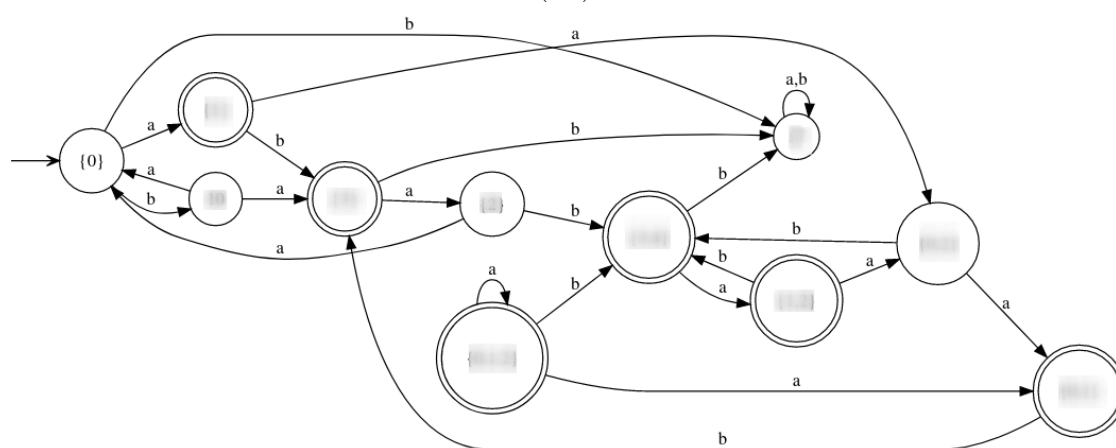
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

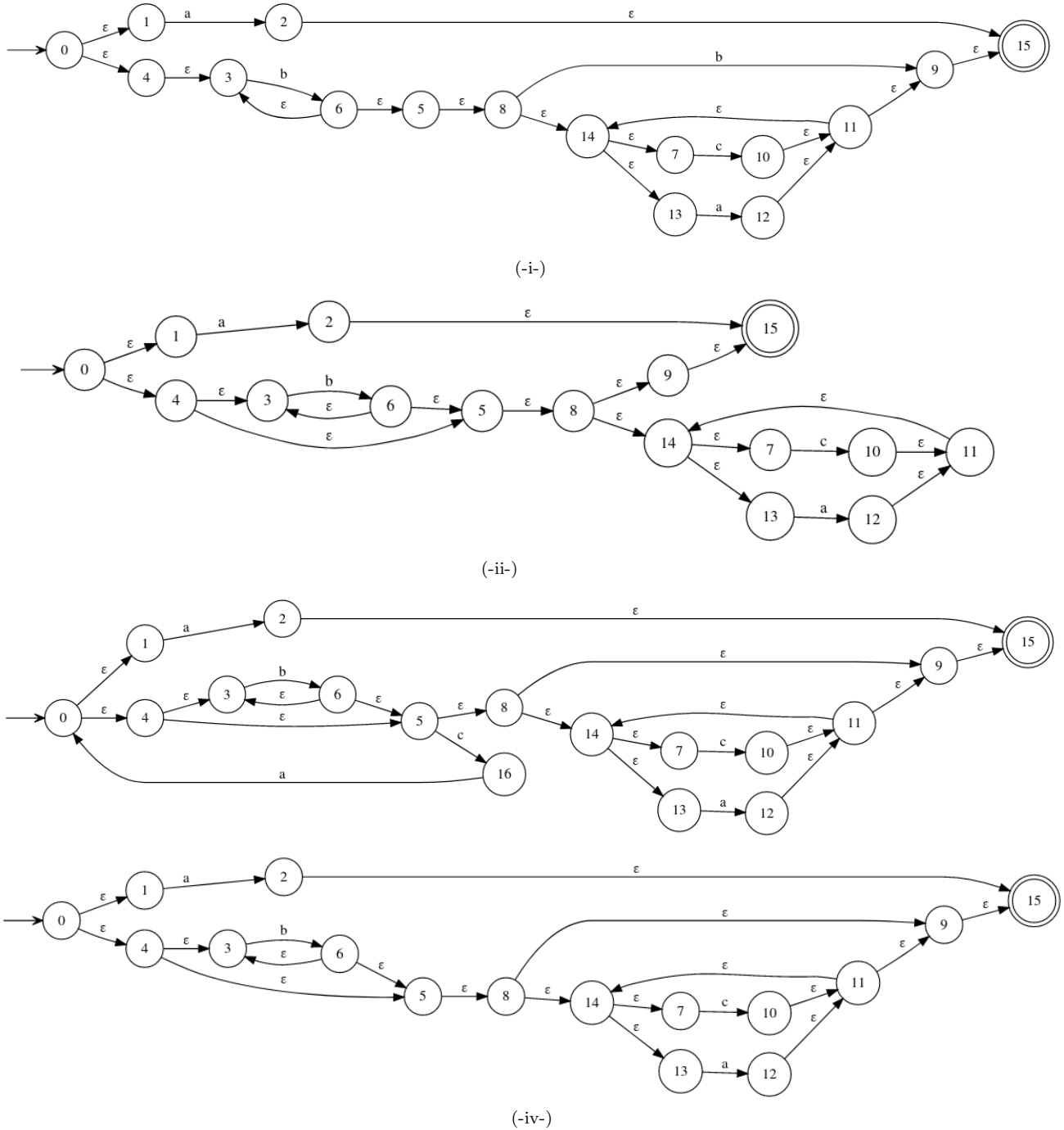


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ e ☐ g h ☐ j ☐ ☐ m n

Question 3 : a ☐ ☐ d e ☐ ☐ h i j

Question 4 : a ☐ c d ☐ f g h i

Question 5 : ☐ b ☐ d e

Question 6 : a b c d e f g ☐

Question 7 : ☐ ☐ c ☐ e ☐ g h ☐ j k

Question 8 : a b c d ☐

Question 9 : a ☐ c d e

Question 10 : a b c ☐

Question 11 : a ☐ c d ☐ ☐ g h i ☐ k l m

Question 12 : a b c d e ☐ g h

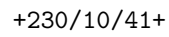
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : a b ☐ d e f

Question 15 : a b c ☐ e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : ☐ b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ f A possède un état puits
☐ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
☐ e Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ f Σ^* est fermé par préfixe.
☐ g Σ^* est fermé par facteur. ☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet.
☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ b A n'a pas d'état accepteur. ☐ c A n'est pas complet.
☐ d A a au moins un état co-accessible. ☐ e A a au moins un état non accessible.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

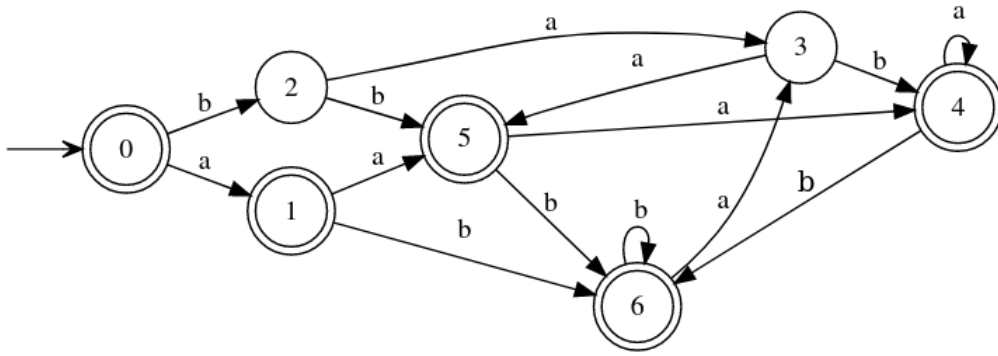
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

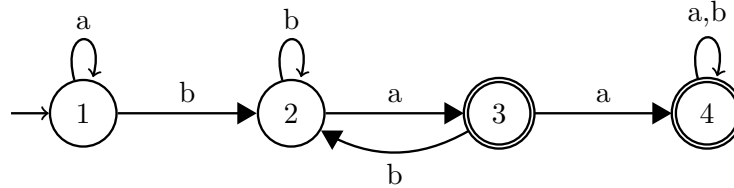
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☐ c 2 ☐ d 6 ☐ e 3 ☐ f 0 ☒ 4

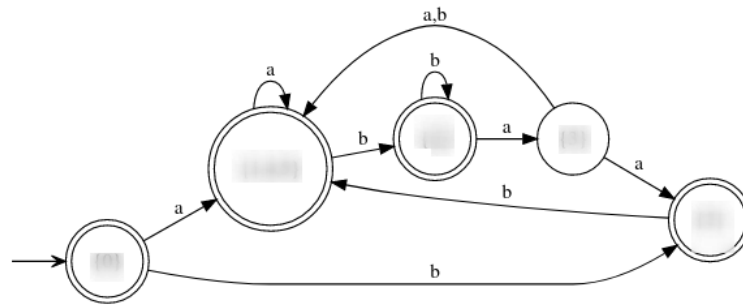
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



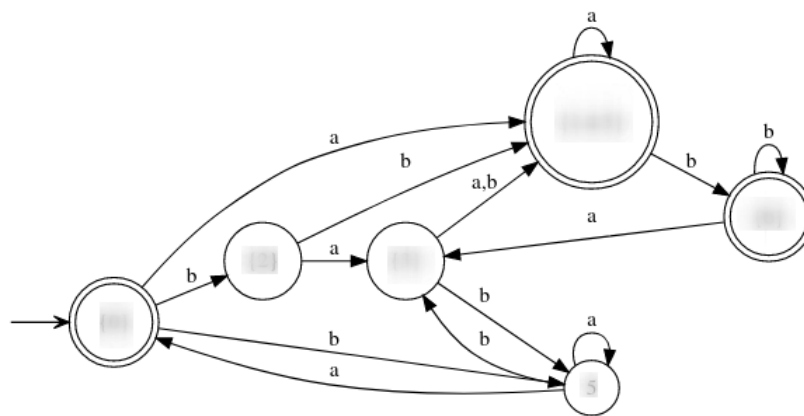
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

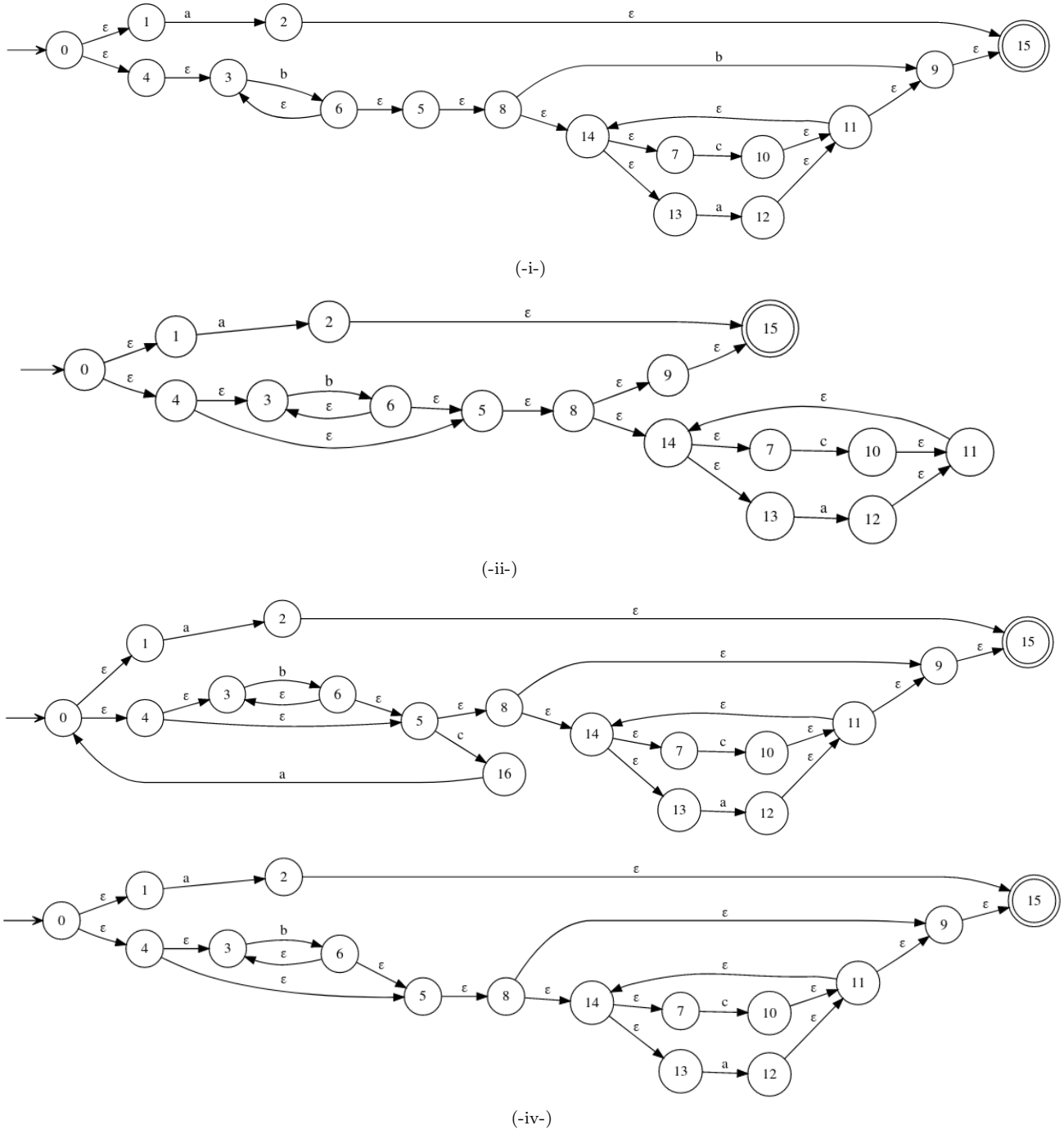


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 3 :

	b	c	d				h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

	b		d	e			h		j	k

Question 6 :

a	b			e					j			m	n

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d	e			h	i	j	k		m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

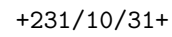
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
- ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ d A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs.
- ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c A est complet.
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ d Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une application.

- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ j Un mot peut être infini.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état accessible. ☐ e A a au moins un état non accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

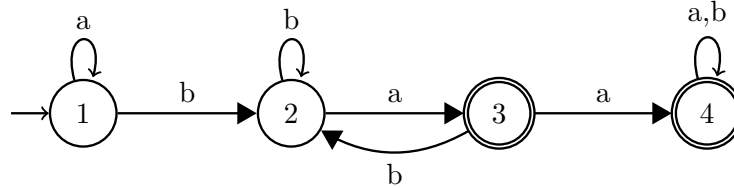
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ 1 ☐ 3 ☐ 6 ☐ 0 ☐ 5 ☐ 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

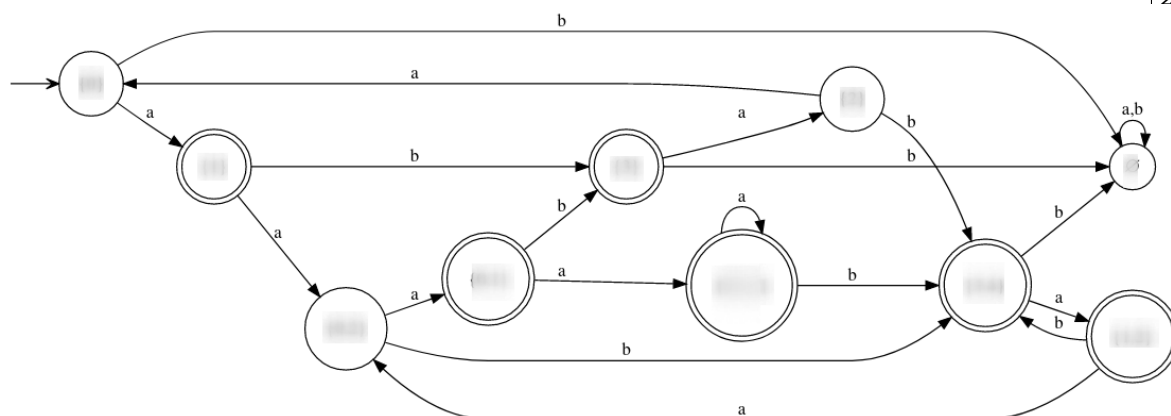


(-iii-)

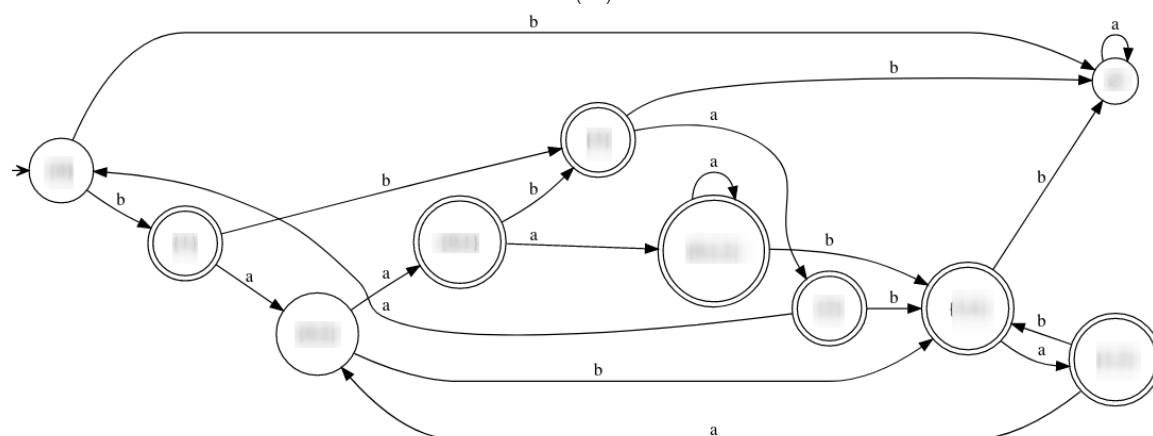


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



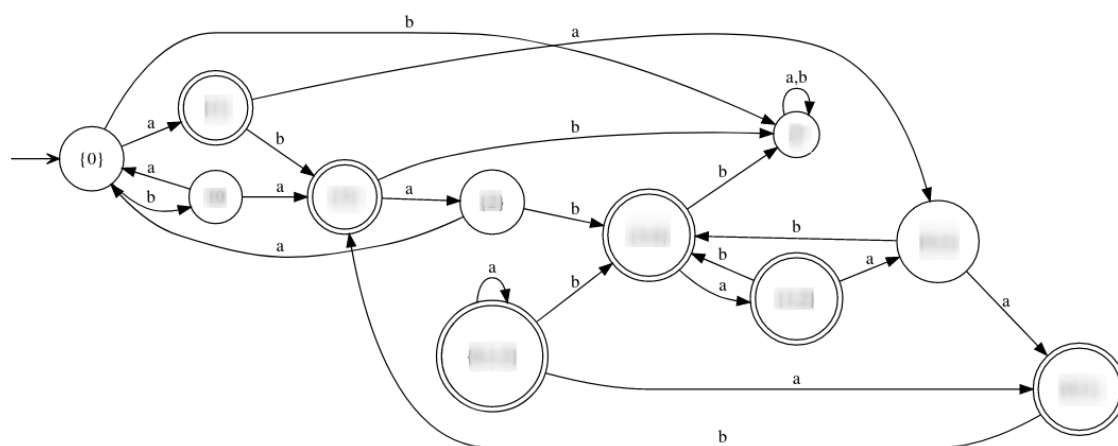
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

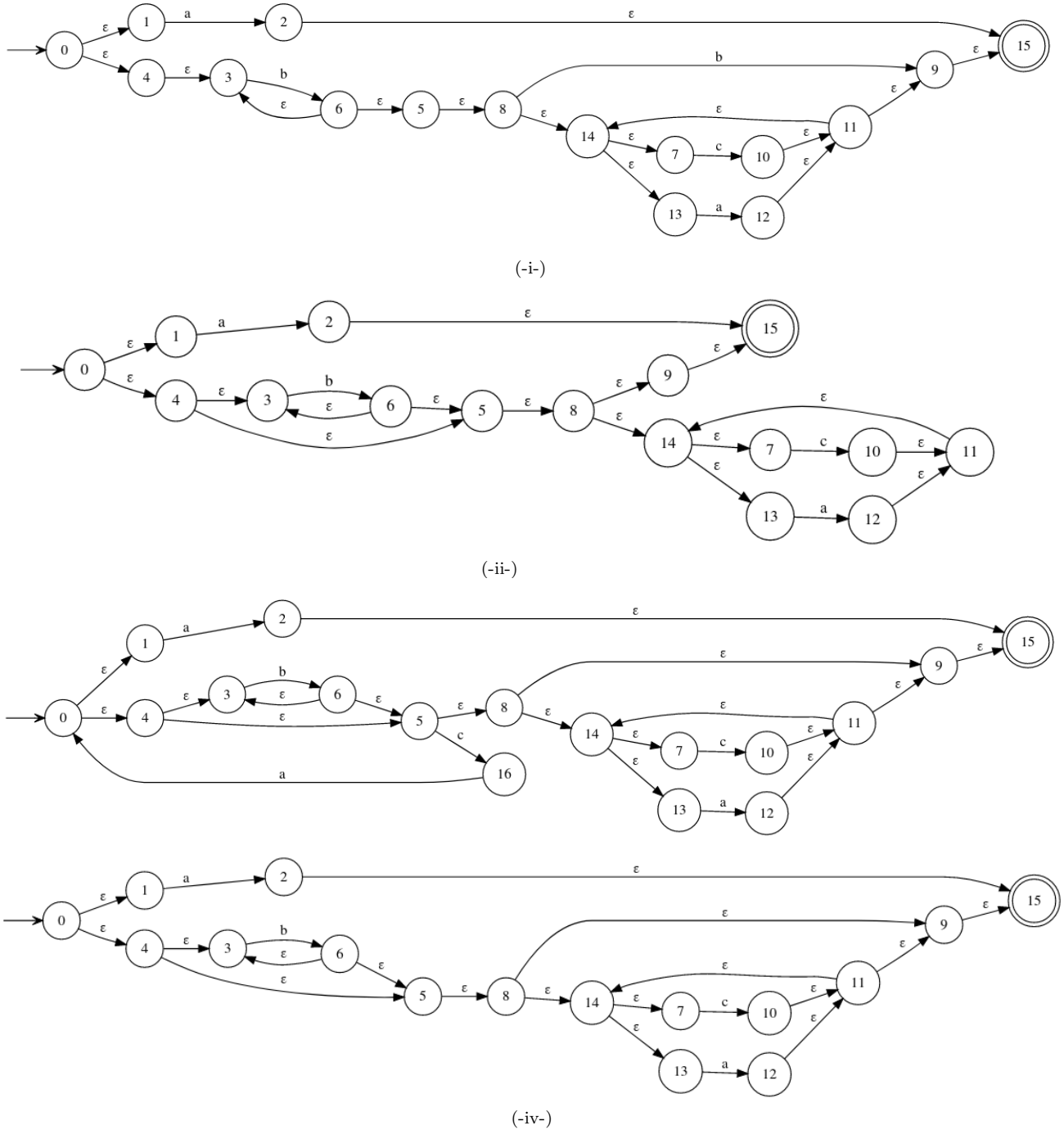


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

		c	d					i	j			m	n

Question 6 :

a	b			e				i	j	k

Question 7 :

	b	c		e	f			i	j

Question 8 :

		c	d	e

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c		e	f		h			k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

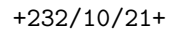
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f A accepte le langage universel. ☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
☐ c A est complet. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ A a au moins un état accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état non accessible. ☒ A n'est pas complet.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut être vide.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Un mot est une application. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐	$X_4 = a + b$	☐	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = a^* + b^*$	☐	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐	$X_4 = a + b$	☐	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐	$X_1 = a^+bX_2$	☐	$X_1 = a^*b$	☐	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐	$X_3 = a(a + b)^*$	☐	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

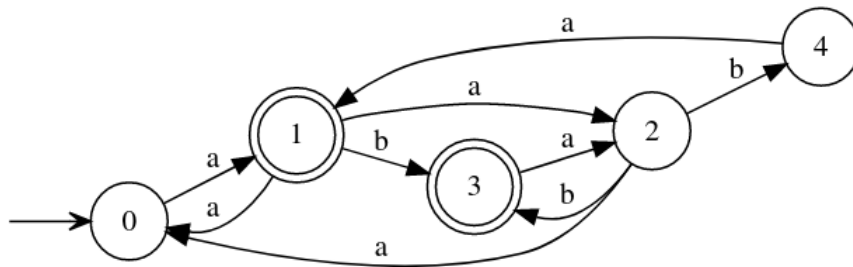
☐	celle trouvée pour X_1	☐	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

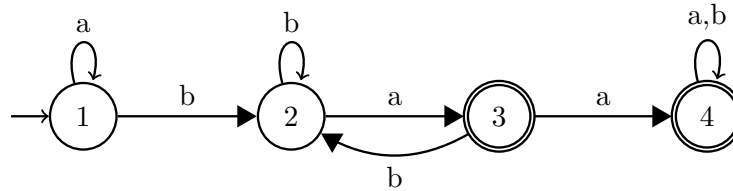
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
		☐	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 5 ☐ c 0 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

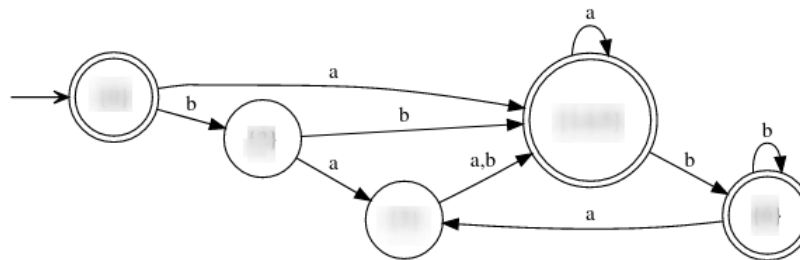
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



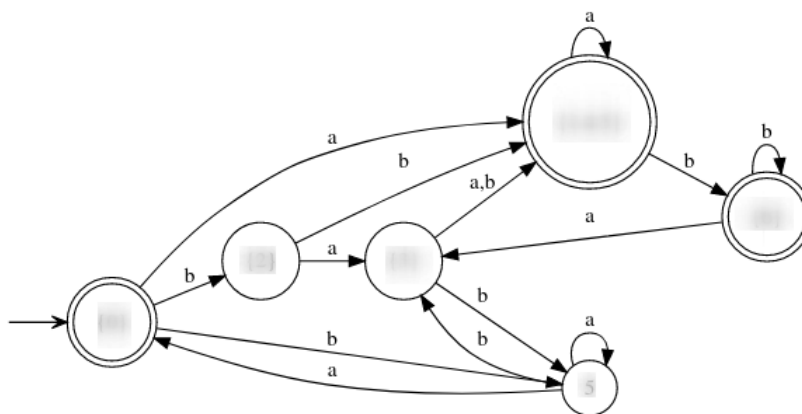
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

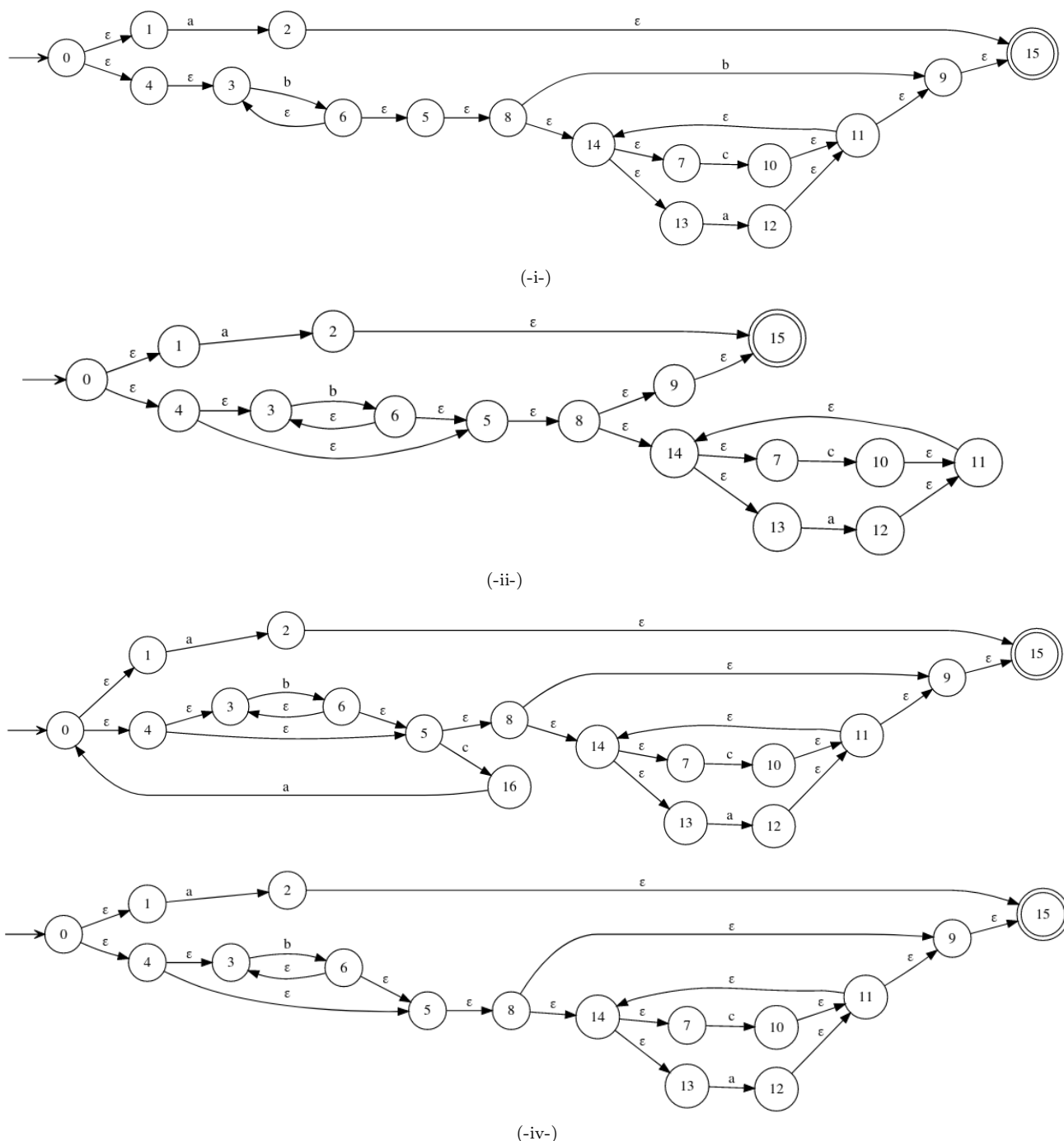


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c					h	i	j

Question 3 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

	b			e	f			i	j	k

Question 7 :

a			d	e

Question 8 :

a	b			e	f							m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

	b	c	d	e		g	h	i	j			m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

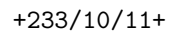
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A a des états accepteurs.
☐ d A est complet. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☒ c Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par facteur.
☒ e Σ^* est fermé par suffixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ h Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b A accepte le langage universel.
☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

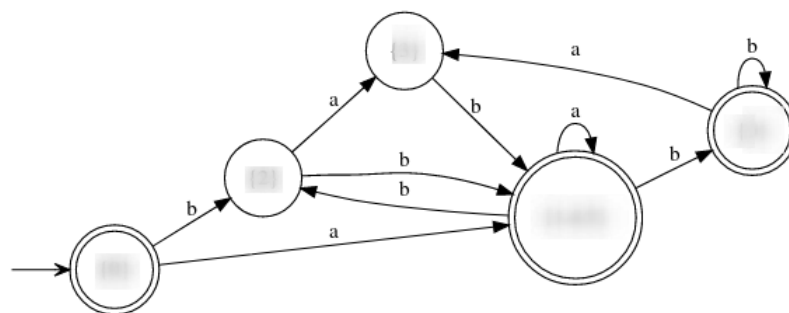
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 5 ☐ c 1 ☐ d 6 ☐ e 3 ☐ f 0 ☒ 4

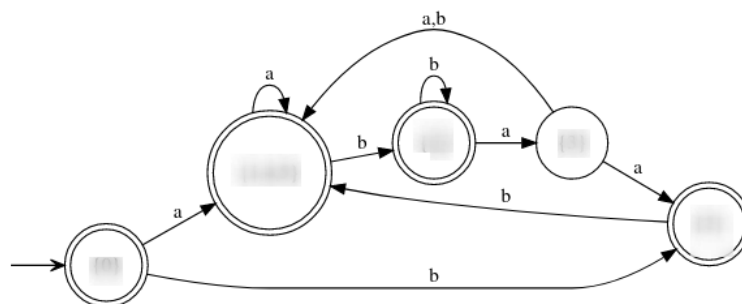
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

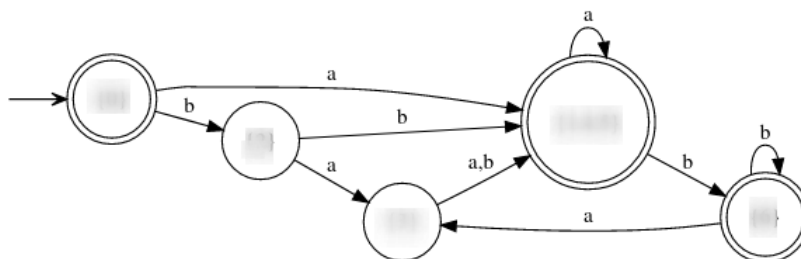
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



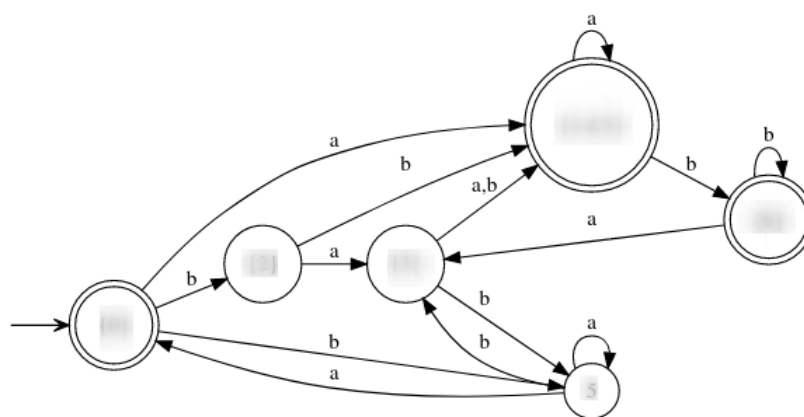
(-i-)



(-ii-)

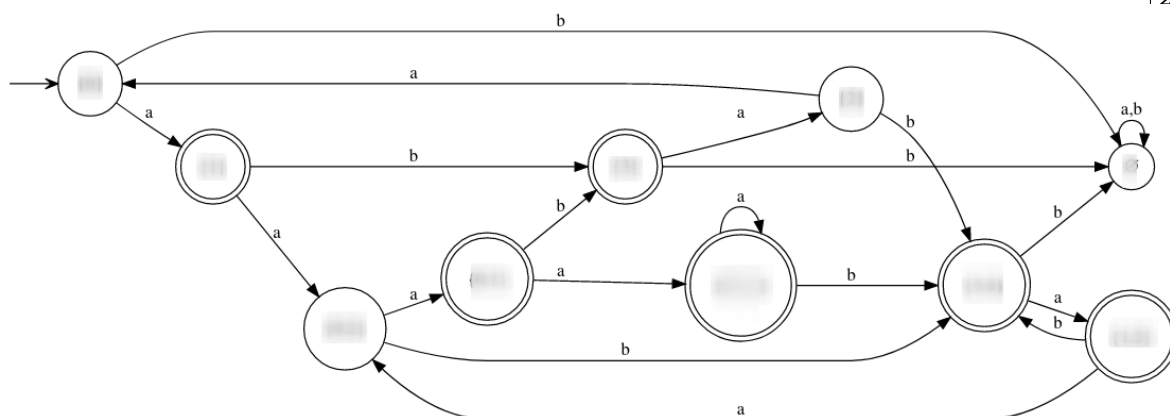


(-iii-)

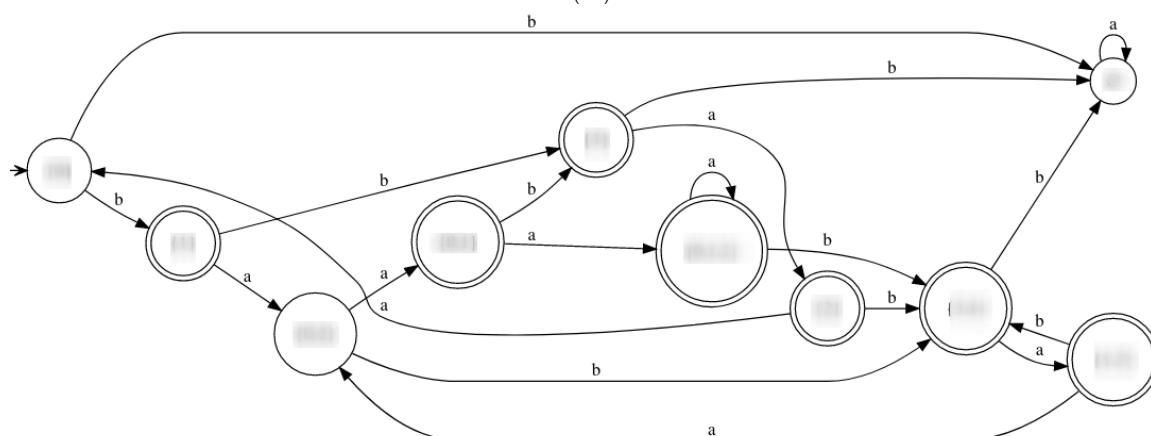


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

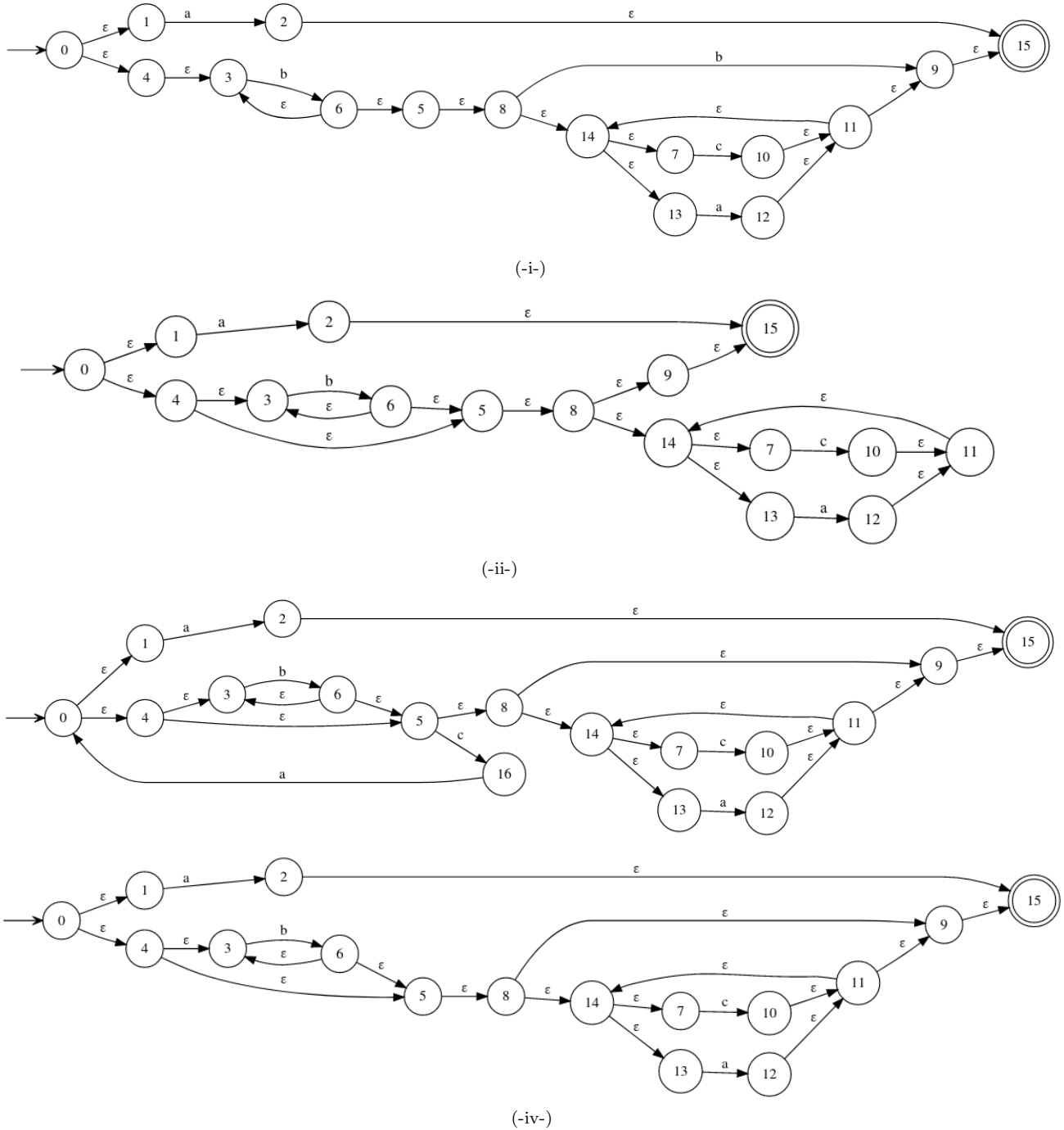


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b		d		f	g		i	j

Question 4 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

			d	e	f			i				m	n

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

	b		d		f		h		j	k

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

	b	c	d	e	f		h		j		l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

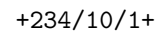
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut être vide.

☐ Un mot est une fonction.

☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Un mot peut être infini.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Un mot est une application.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A possède un état puits
☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs. ☐ A est complet.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A .
☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

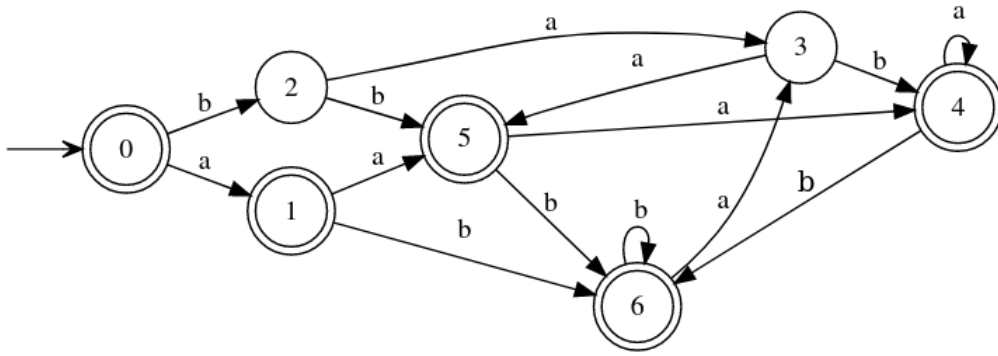
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

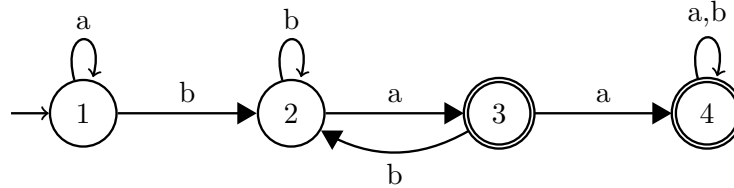
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

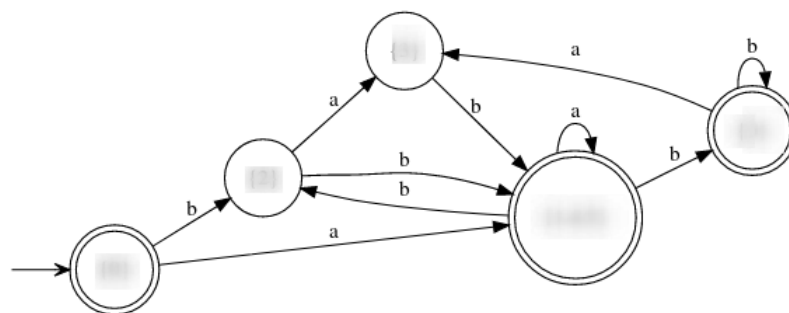
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☒ b 4 ☐ c 5 ☐ d 2 ☐ e 0 ☐ f 3 ☐ g 1

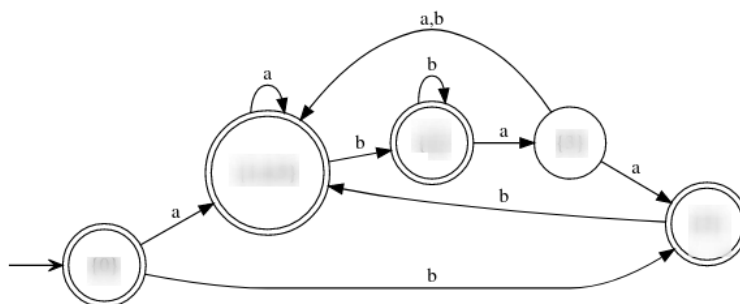
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

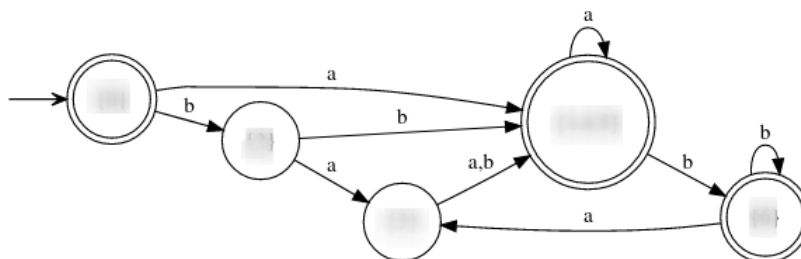
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



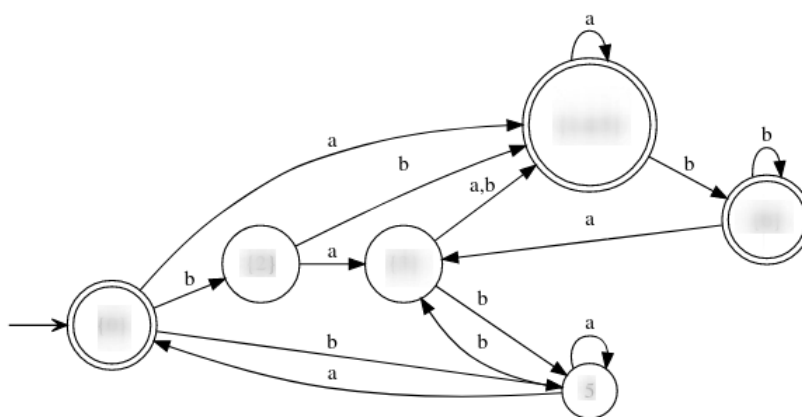
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)

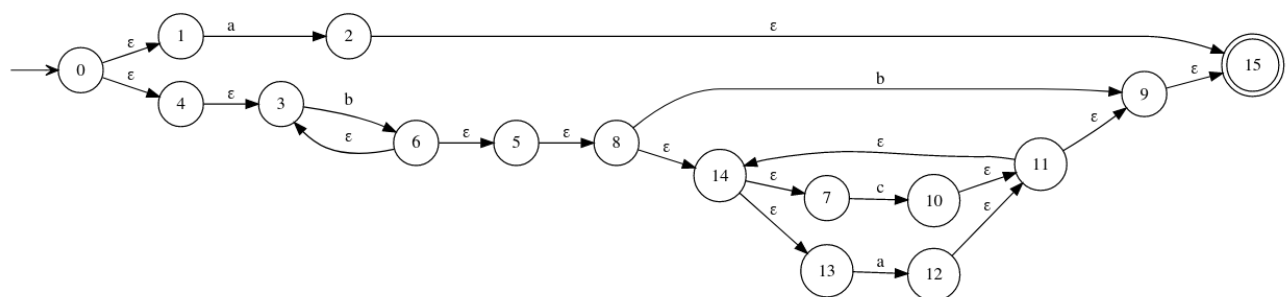


(-iii-)

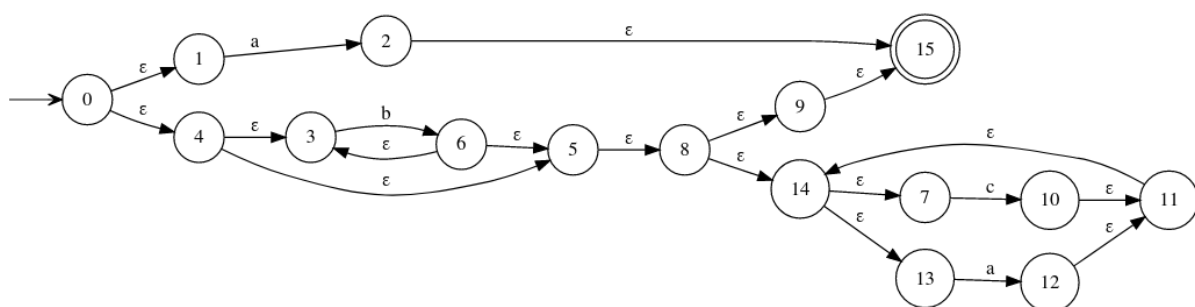


(-iv-)

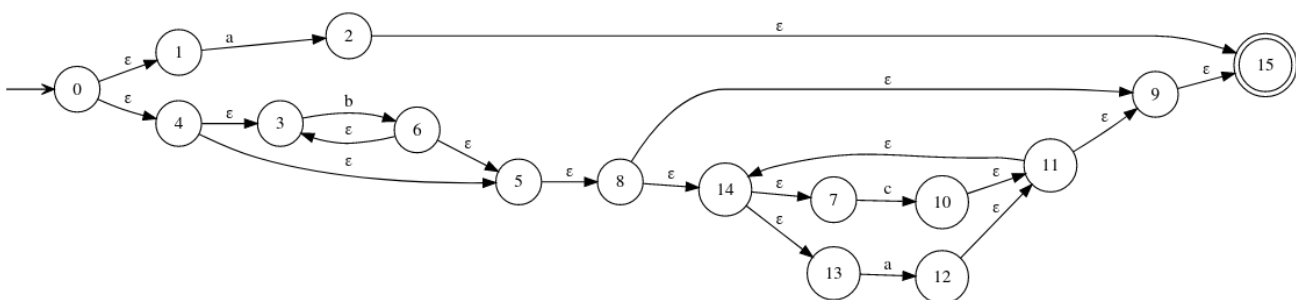
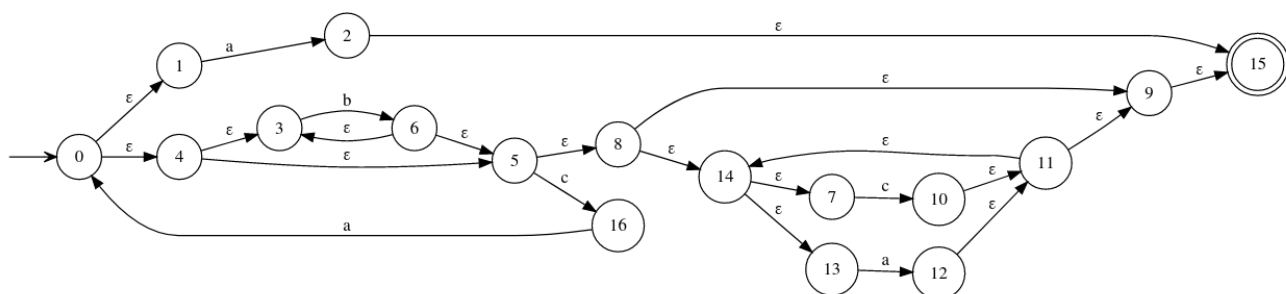
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



(-i-)



(-ii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b c d 

Question 4 :   c d    h i    m n

Question 5 :  b c d  f g h i

Question 6 : a  c   f  h  j k

Question 7 :  b   e f g  i j

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b    f g h  j k l m

Question 12 : a  c d e f g h

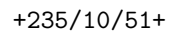
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. A solid black line runs horizontally across the top of the page, approximately one-fifth of the way from the top edge. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A est complet. ☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par préfixe. ☒ c Σ^* est fermé par facteur.
☐ d Σ est fermé par facteur. ☒ e Σ^* est fermé par suffixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ g Σ^* est fermé par préfixe.
☒ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot est une fonction. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot peut être infini. ☒ f Un mot est une application.
☒ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ i Un mot peut être vide. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ k Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☒ d u n'est pas accepté par A .
☒ e $u \notin \mathcal{L}(A)$.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ j	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

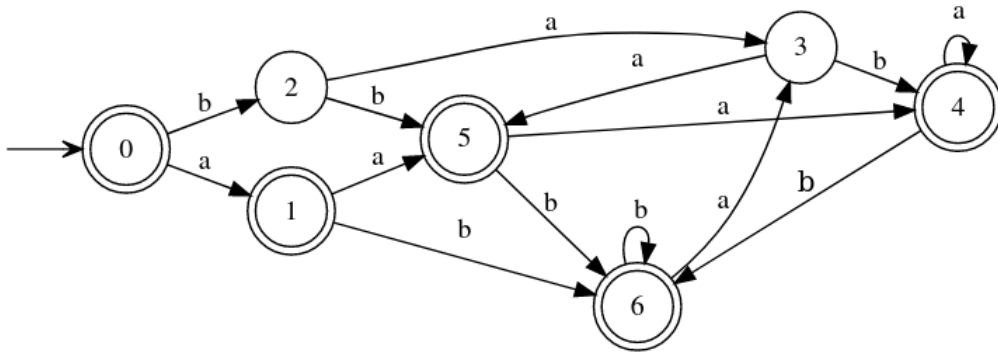
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a+b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

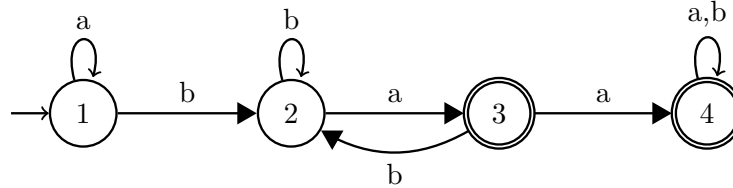
☐ a	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 6 ☐ c 0 ☐ d 3 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

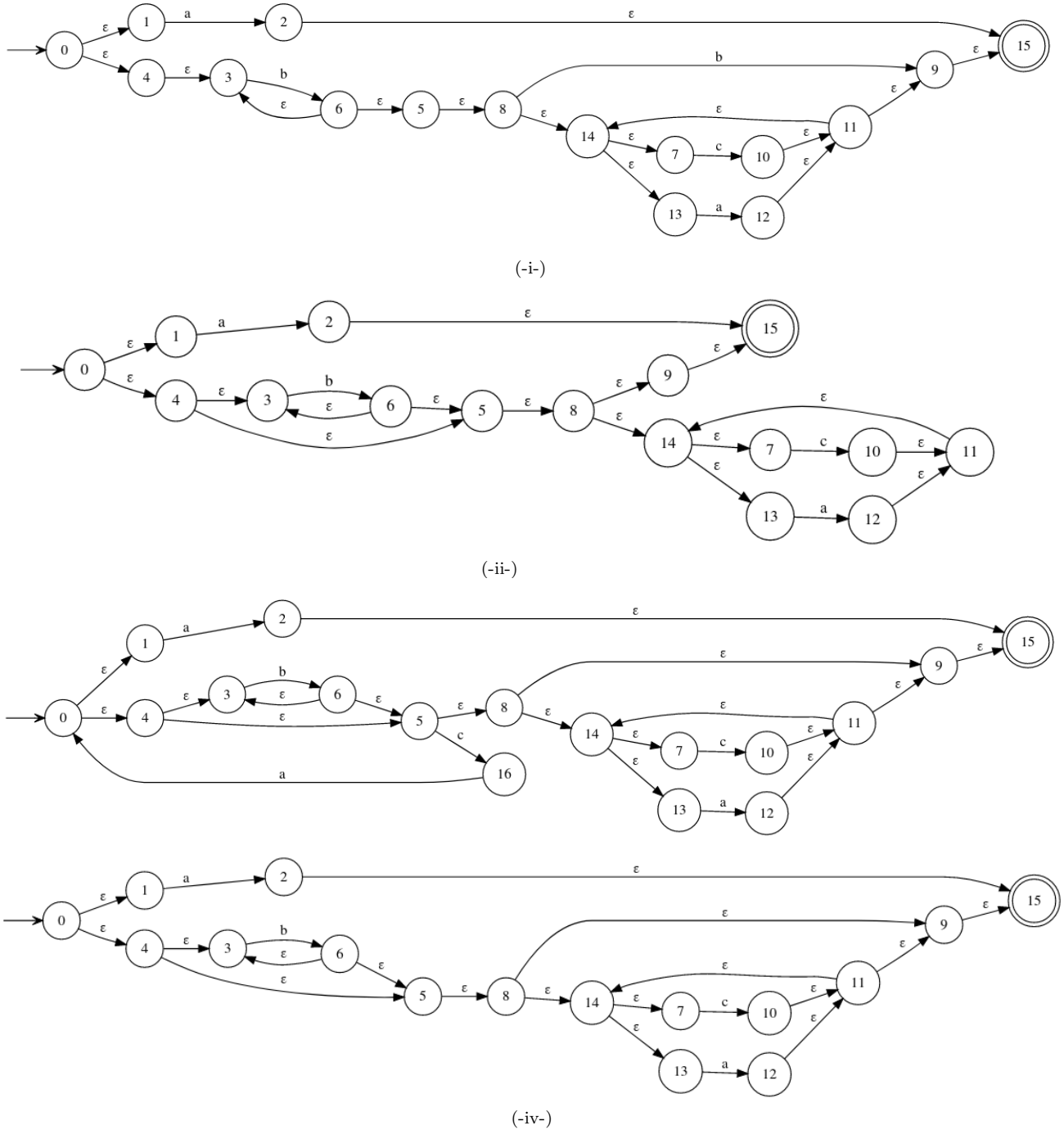


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b		d		f			i	j

Question 4 :

	b			e			h		j			m	n

Question 5 :

a	b	c					i	j	k

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b			e	f	g	h	i	j		l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

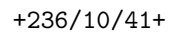
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe.
- ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ d Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ e Σ est fermé par facteur.
- ☐ f Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ g Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ c A possède un état puits
- ☐ d A accepte le langage universel.
- ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c u est accepté par A . ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A est complet.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état accessible. ☐ b A n'est pas complet.
- ☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ e u n'est pas accepté par A . ☐ f A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ g A a au moins un état non accessible. ☐ h $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut être vide. ☐ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ h Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ i Un mot est une application. ☐ j Un mot peut être infini.
- ☐ k Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☐ m	$X_4 = a + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

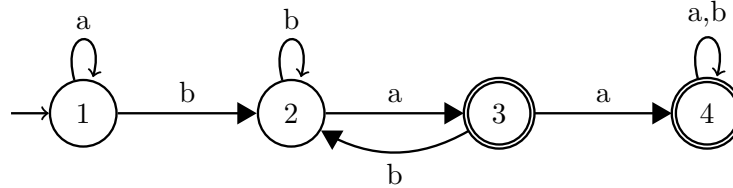
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^* a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

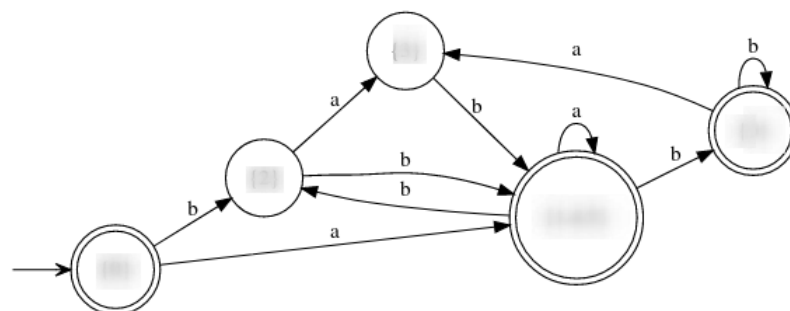
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 1 ☐ d 3 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 5

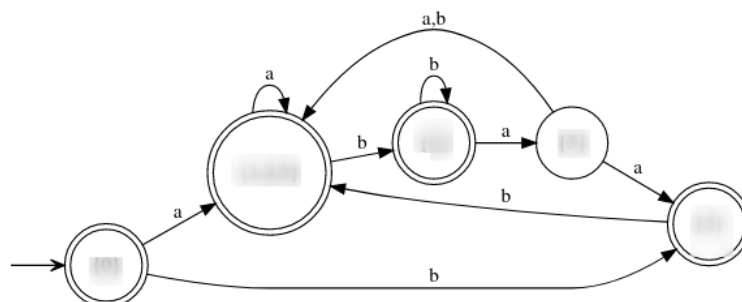
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

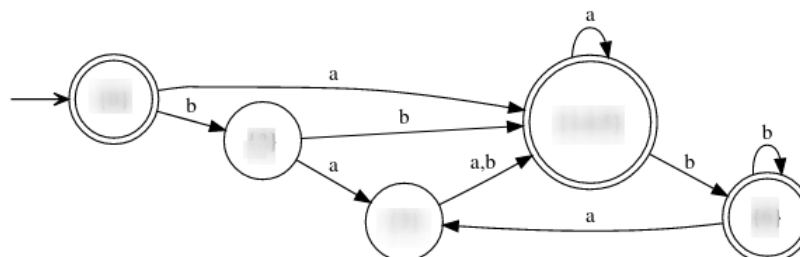
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



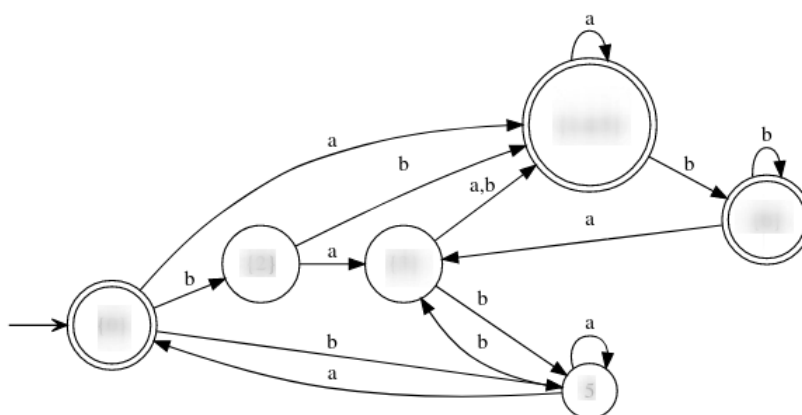
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

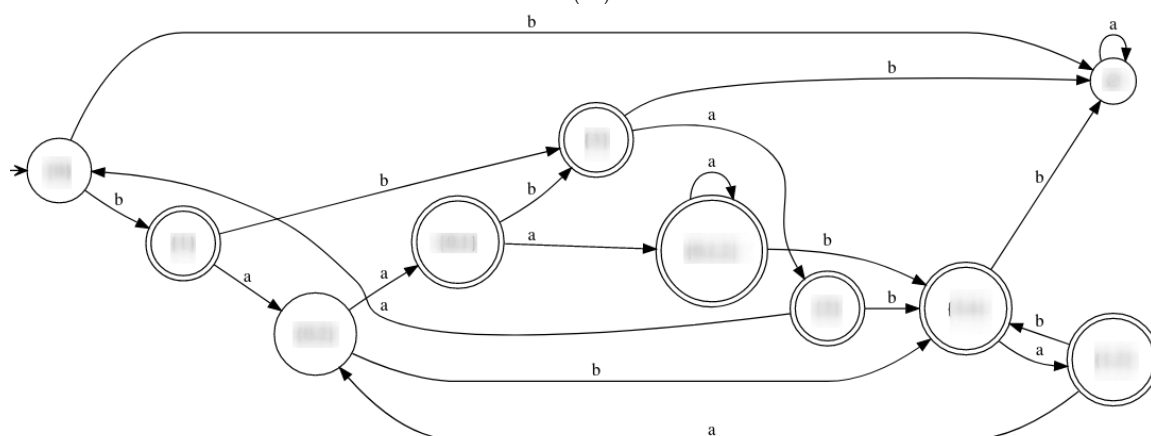


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

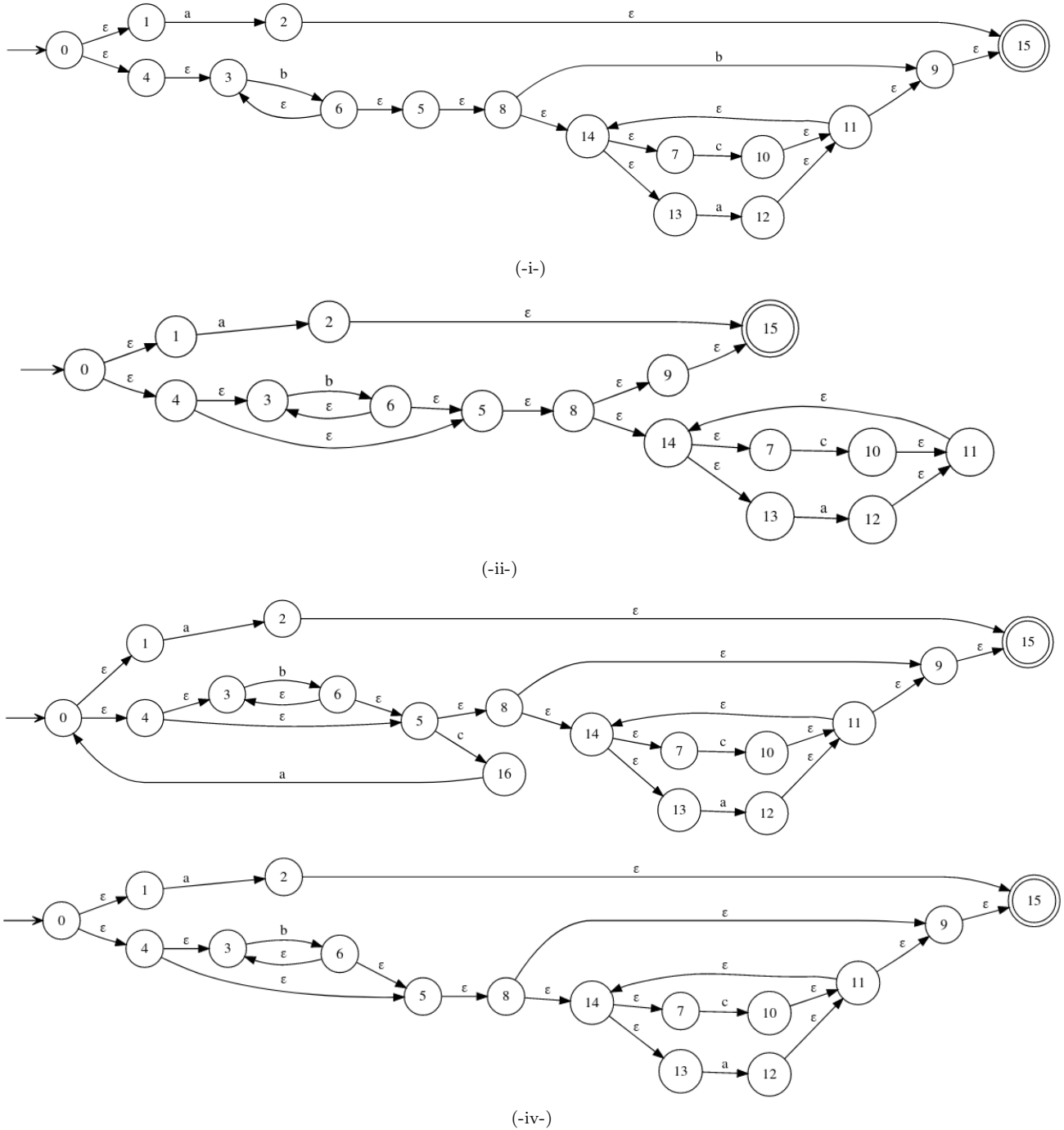


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a	b			e			h	i	j

Question 4 :

	b		d	e

Question 5 :

	b	c	d	e	f		h	i

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

		c	d		f	g			j	k

Question 8 :

			d			g			j		l	m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c			f	g	h	i	j		l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

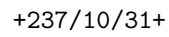
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A accepte le langage universel.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c A est complet.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A n'est pas complet. ☐ e A a au moins un état non accessible.
☐ f A a au moins un état co-accessible. ☐ g A a au moins un état non co-accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

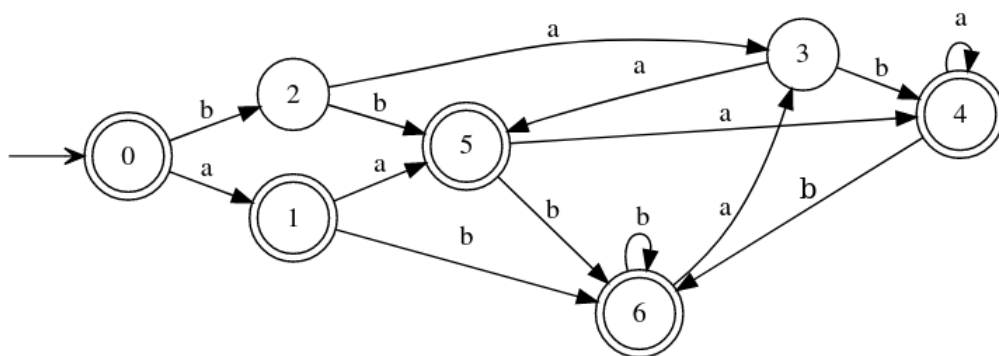
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

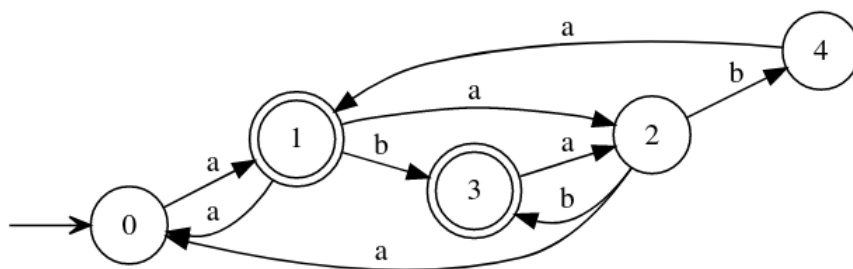
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

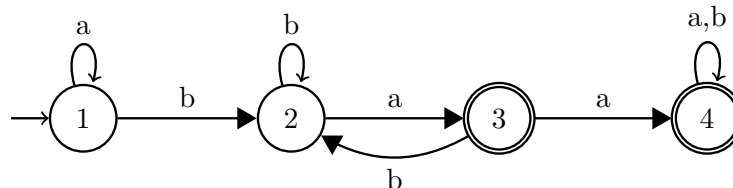
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 1 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 2 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

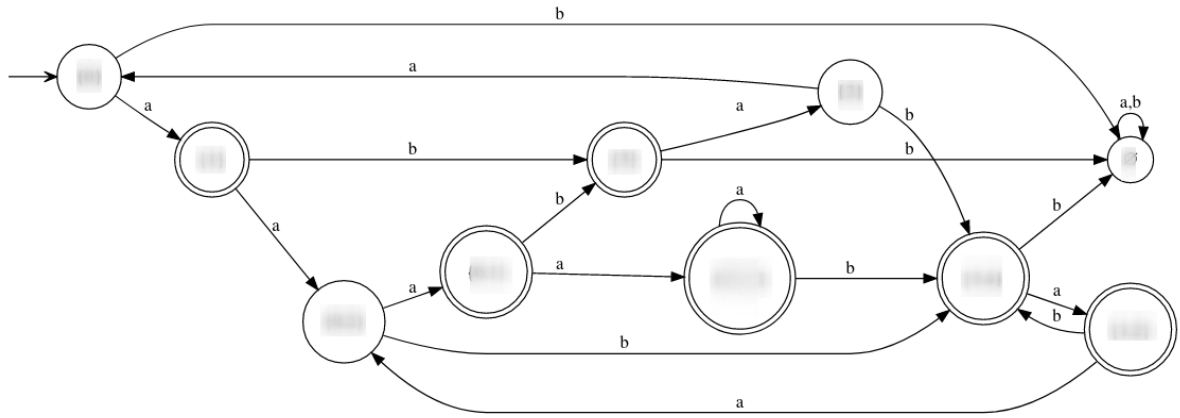


(-iii-)

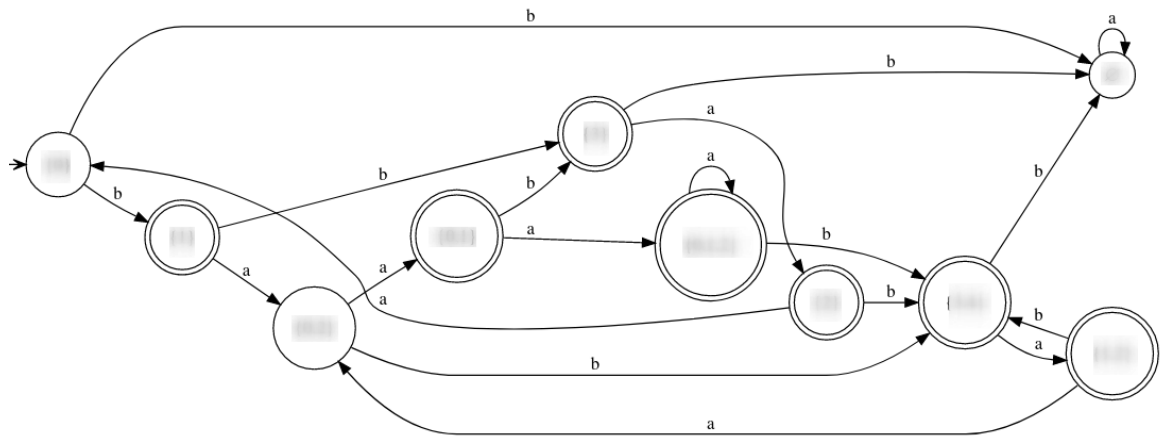


(-iv-)

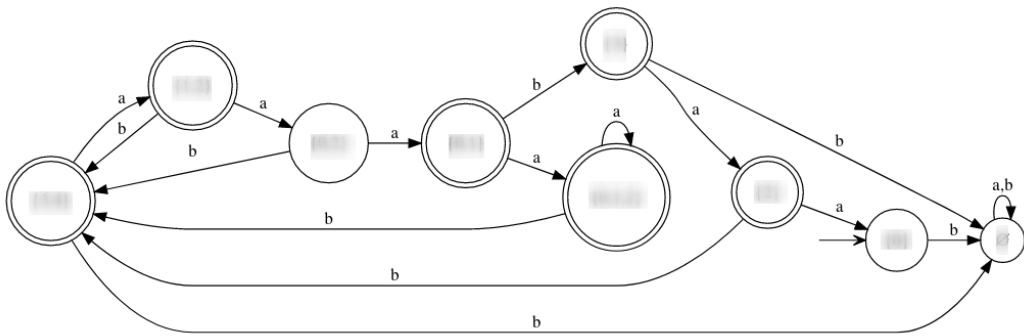
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



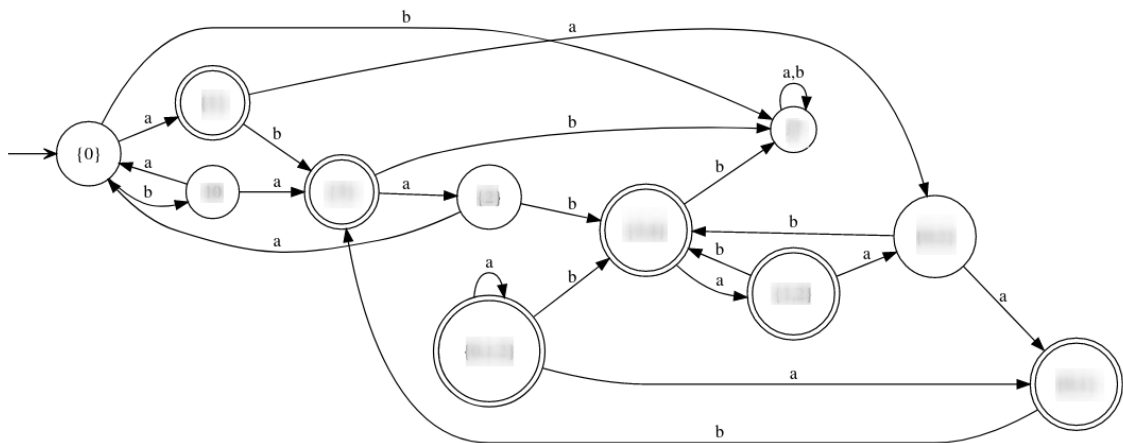
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

				e		g	h				l	m	n

Question 7 :

a				e	f		h	i	j

Question 8 :

a				e	f	g			j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c		e	f		h	i	j	k	l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

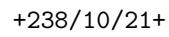
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e A possède un état puits ☐ f $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une fonction. ☐ b Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ e Un mot est une application. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ g Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ h Un mot peut être infini.
☐ i Un mot peut être vide. ☐ j Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ e Σ^* est fermé par facteur.

- ☐ f Σ est fermé par facteur. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ h Σ est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ d A a au moins un état co-accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ f A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ A n'est pas complet. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-.
- ☐ b la Figure 3-iv-.
- ☐ c la Figure 3-i-.
- ☒ la Figure 3-iii-.
- ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-.
- ☐ b la Figure 4-iii-.
- ☒ la Figure 4-i-.
- ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐	☐ Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐	☐ e Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

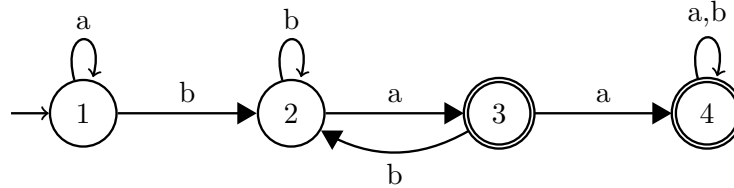
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^* a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☒ 4 ☐ c 1 ☐ d 5 ☐ e 6 ☐ f 2 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

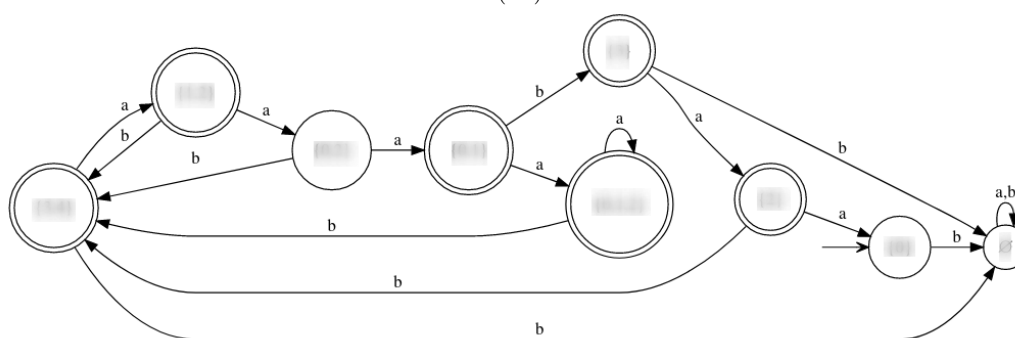
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



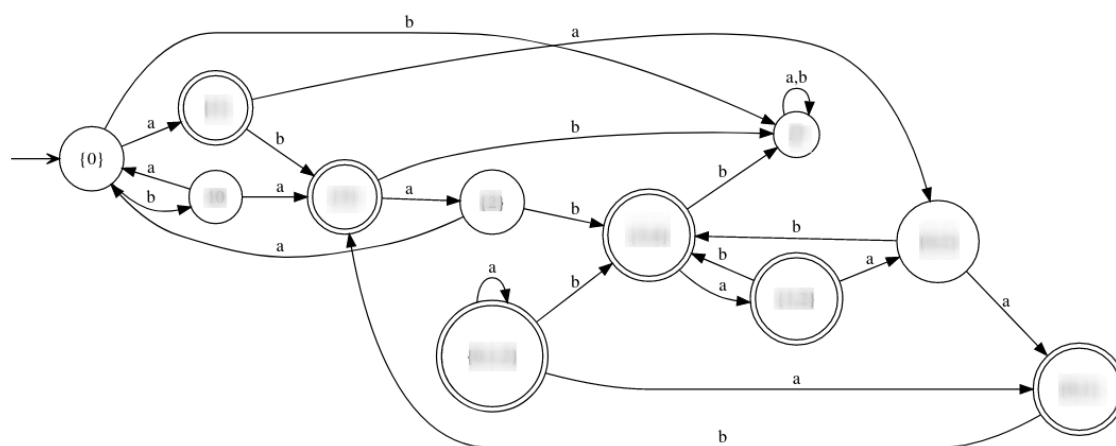
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

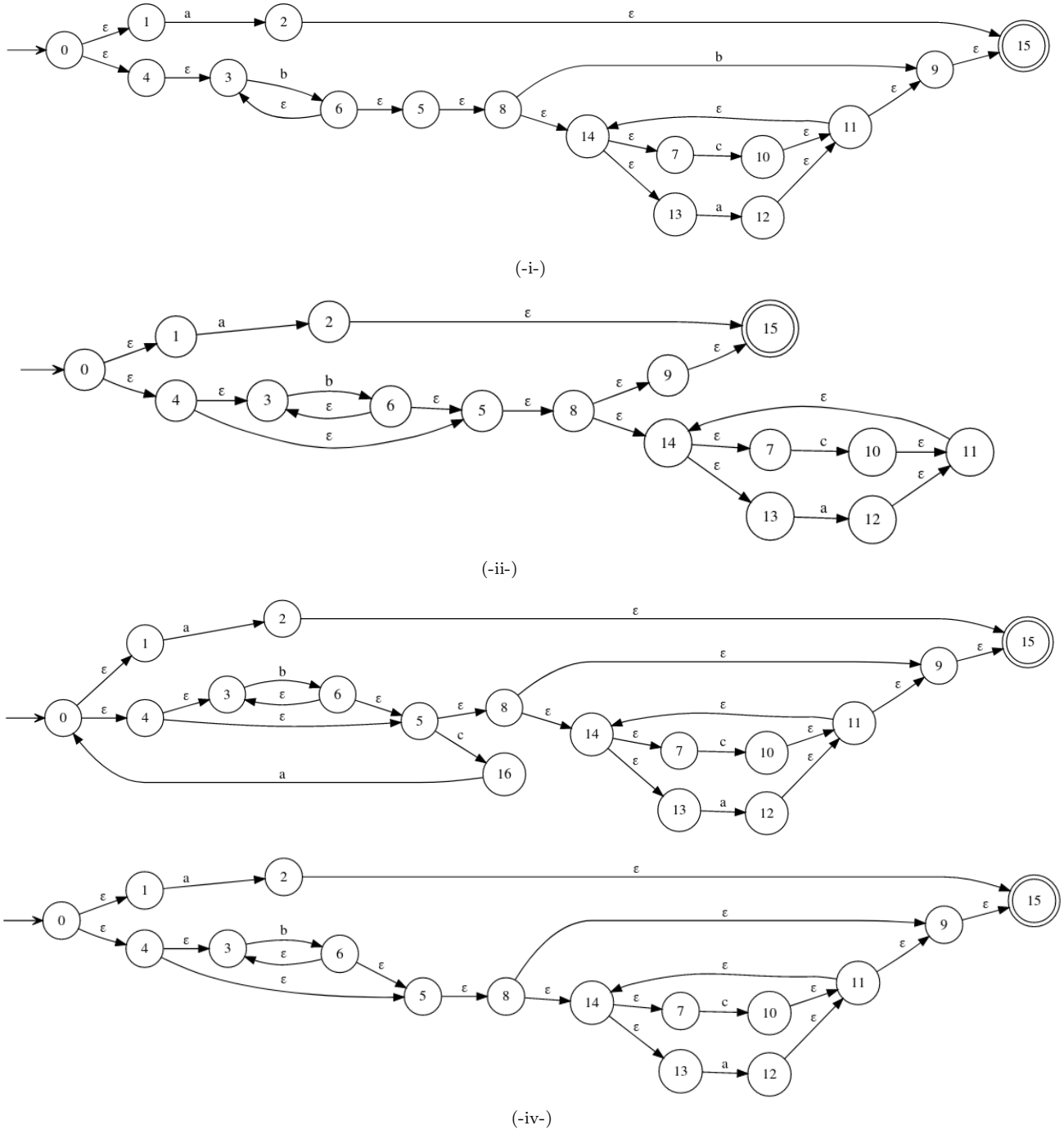


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

		c			f		h			k		m	n

Question 5 :

		c	d		f		h	i	j

Question 6 :

		c	d	e

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a		c	d		f				j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d			g	h	i			l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

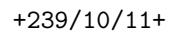
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ désigne l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A accepte le langage universel.

☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ f A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A a au moins un état non co-accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☐ d A a au moins un état non accessible.

☐ u n'est pas accepté par A . ☐ f A a au moins un état co-accessible.

☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot est une application. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet. ☐ A a des états accepteurs.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ u est accepté par A .
☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

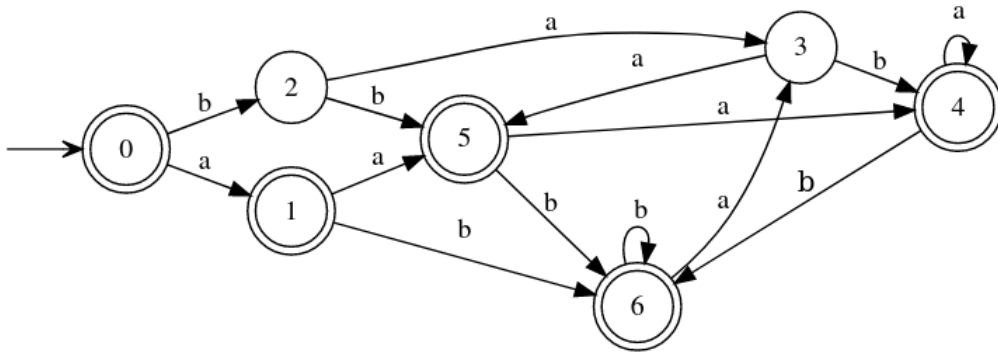
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

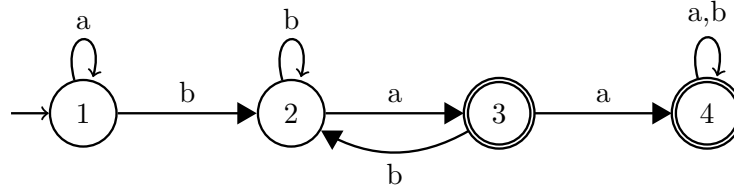
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

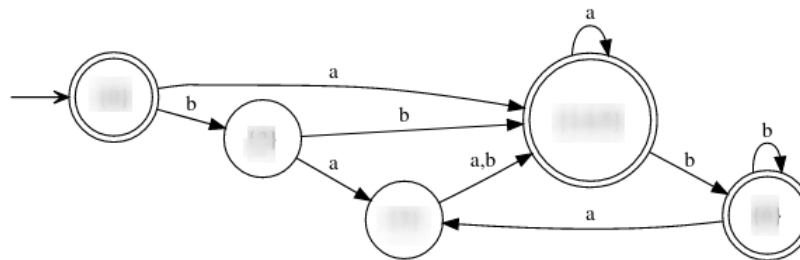
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



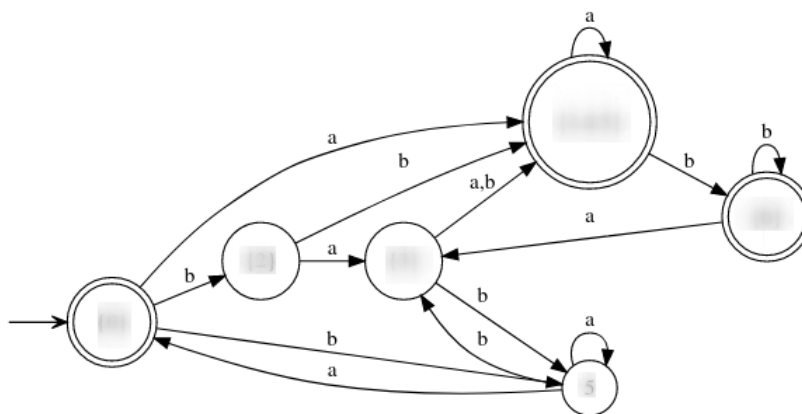
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

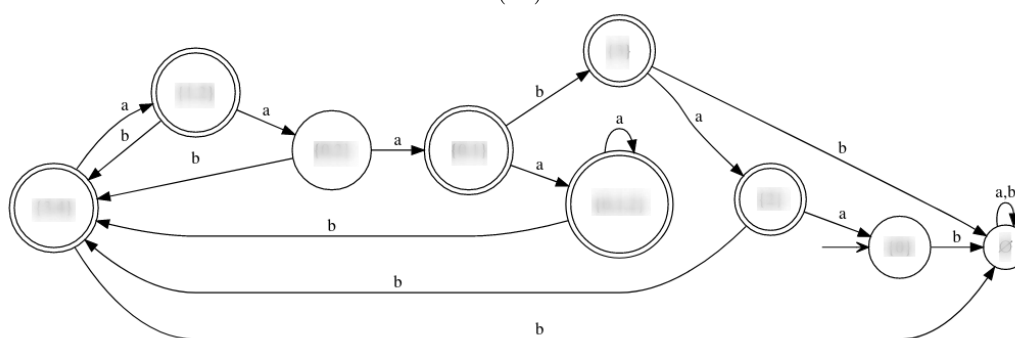
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



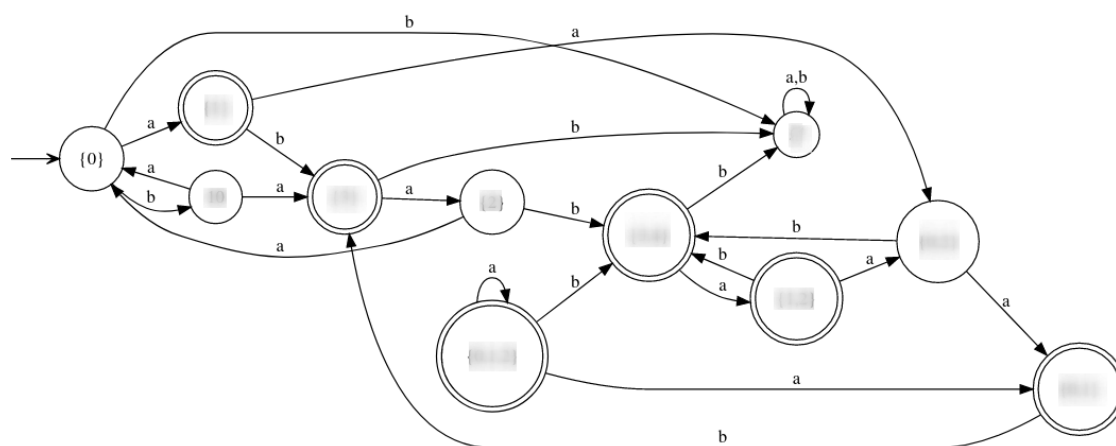
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

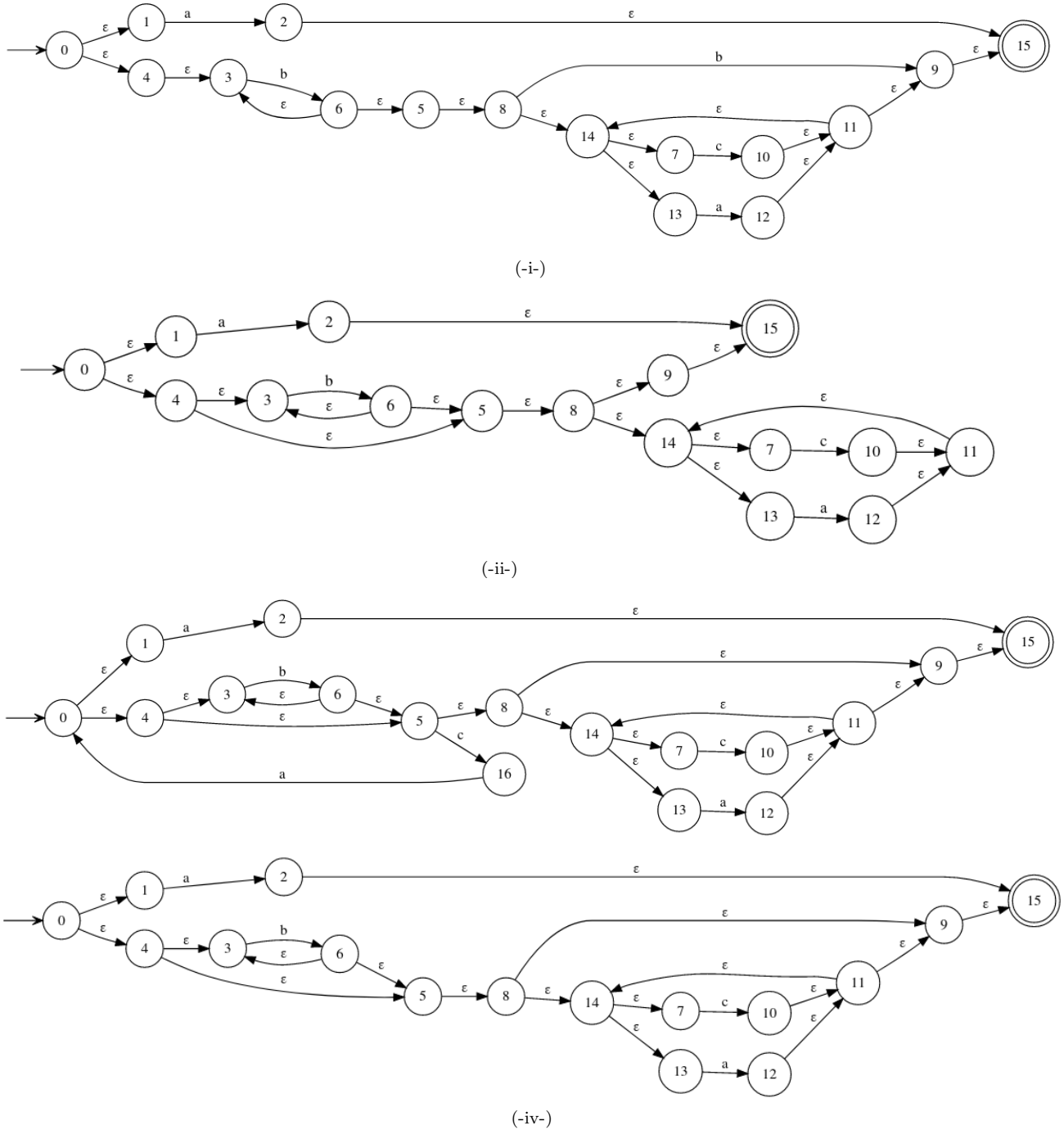


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 : a b c d  f  h i

Question 4 : a  c d  f    j k

Question 5 :  b c   f g  i j

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a      h i   l m n

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b  d  f g h i j  l 

Question 12 : a  c d e f g h

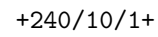
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. A single solid line runs horizontally across the top of the writing area, just below the header section. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ u est accepté par A .
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ A est complet.

- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une application.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ c A accepte le langage universel.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f A possède un état puits
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
	☐ $X_4 = a + b$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

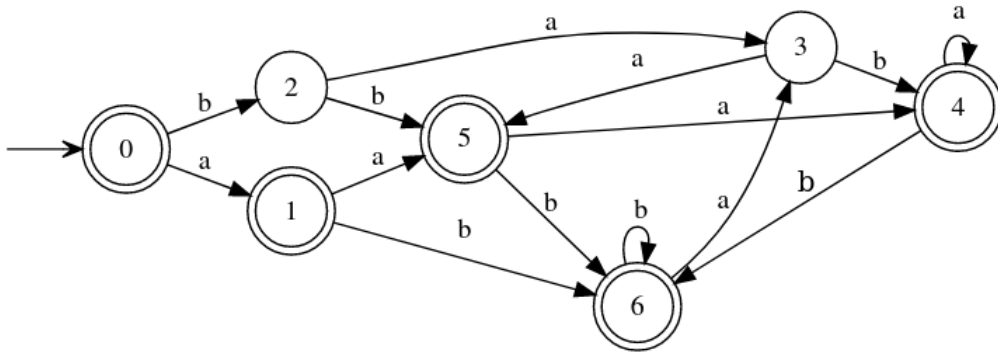
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

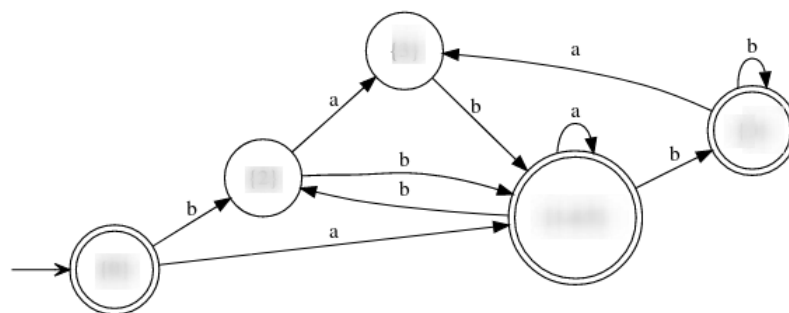
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 5 ☐ e 0 ☐ f 3 ☐ g 6

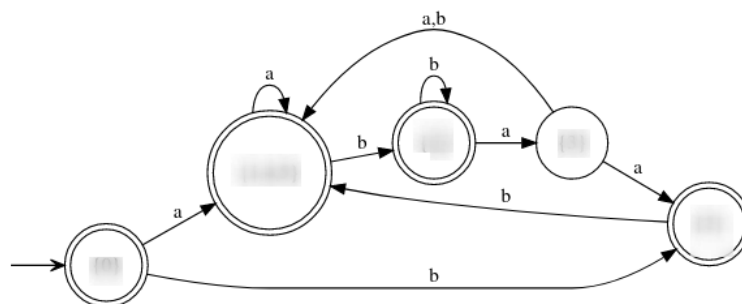
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

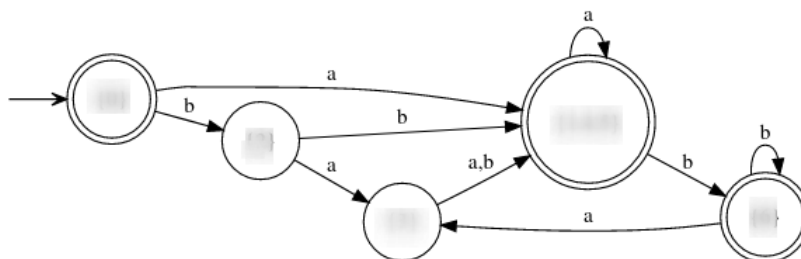
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



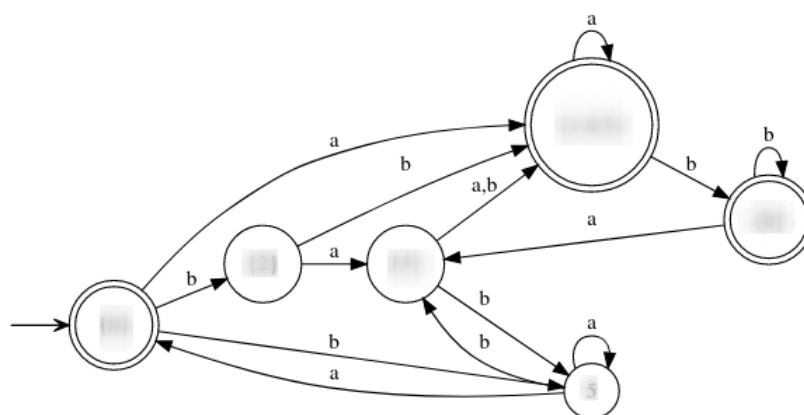
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

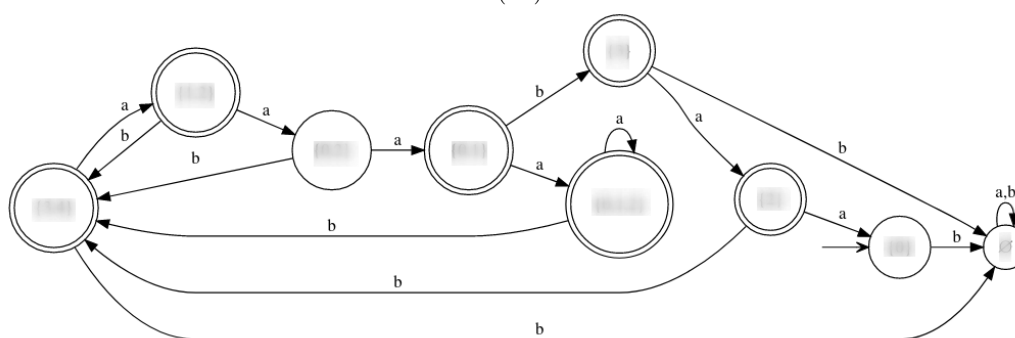
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



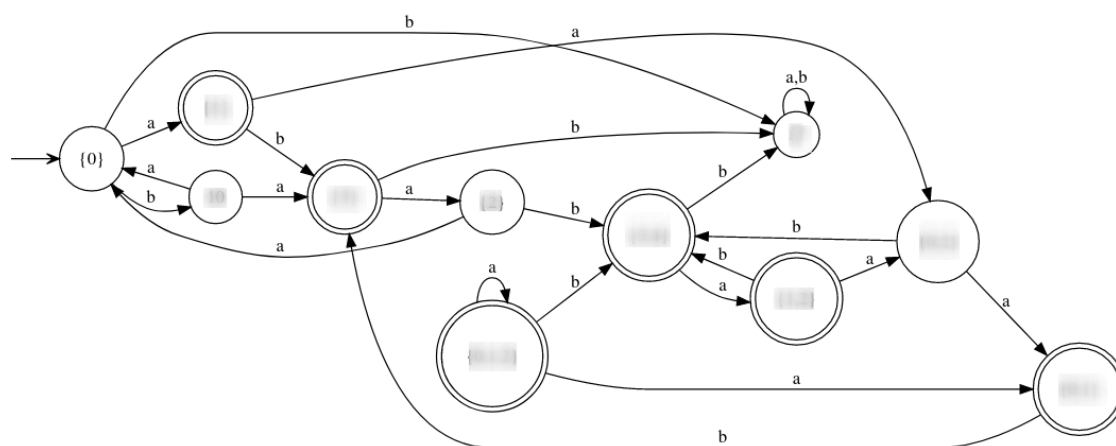
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

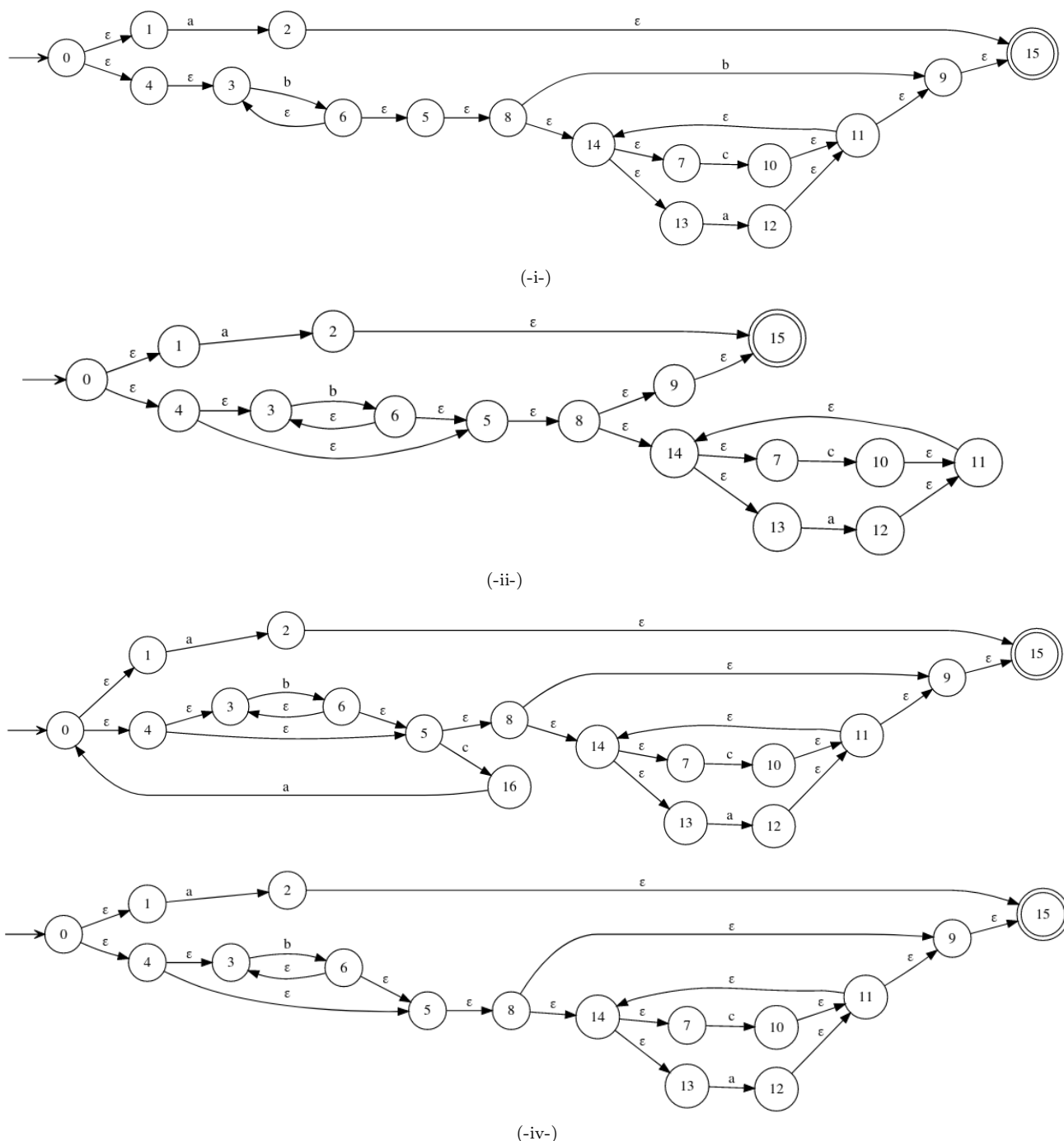


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b   e f g  i j

Question 3 : a   d  f  h  j k

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :    e f  h  j   m n

Question 7 : a  c d e f  h i

Question 8 :  b  d e

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 :  b  d  f g h i j  l m

Question 12 :  b c d e f g h

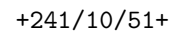
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par facteur.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot peut être vide.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Un mot est une application. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e A est complet.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ e A accepte le langage universel. ☐ f A possède un état puits ☐ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ b P est forcément déterministe.
- ☐ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u n'est pas accepté par A . ☐ b A a au moins un état non accessible. ☐ c $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☐ e A n'est pas complet.
- ☐ f A a au moins un état co-accessible.
- ☐ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ i A a au moins un état accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

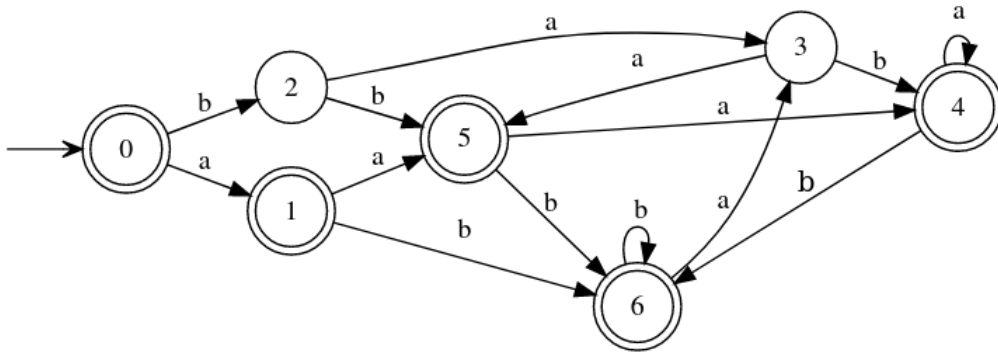
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

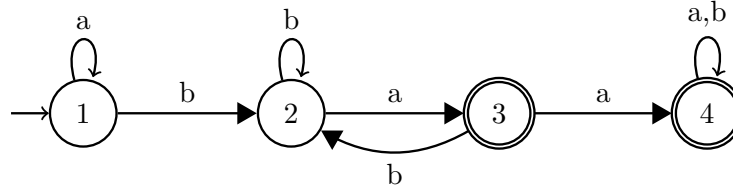
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 5 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

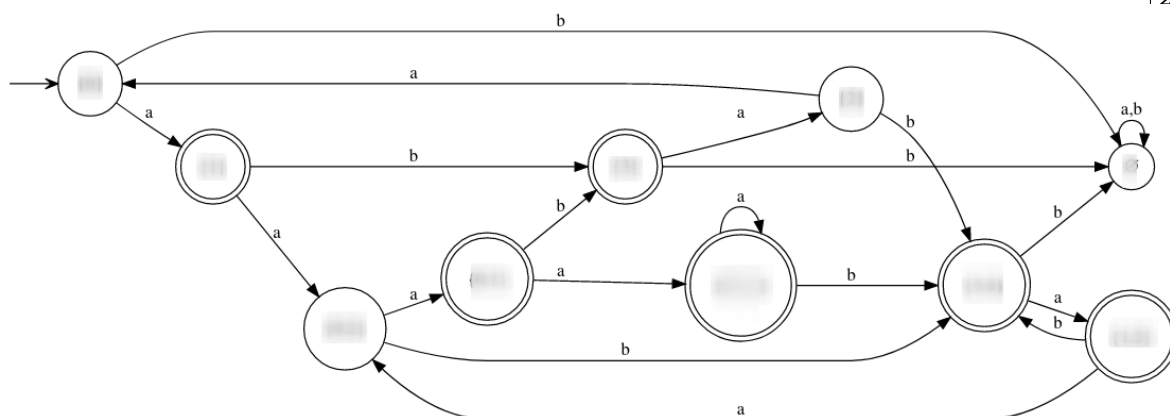


(-iii-)

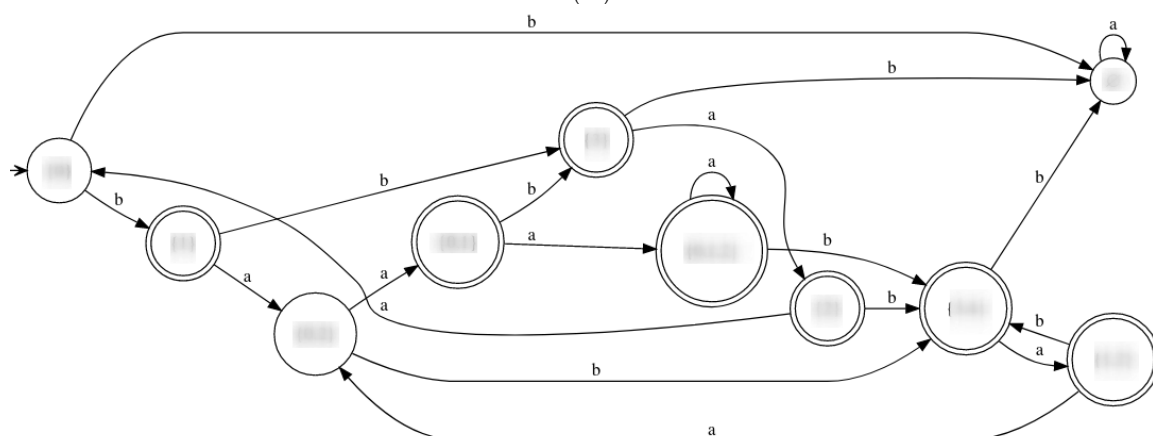


(-iv-)

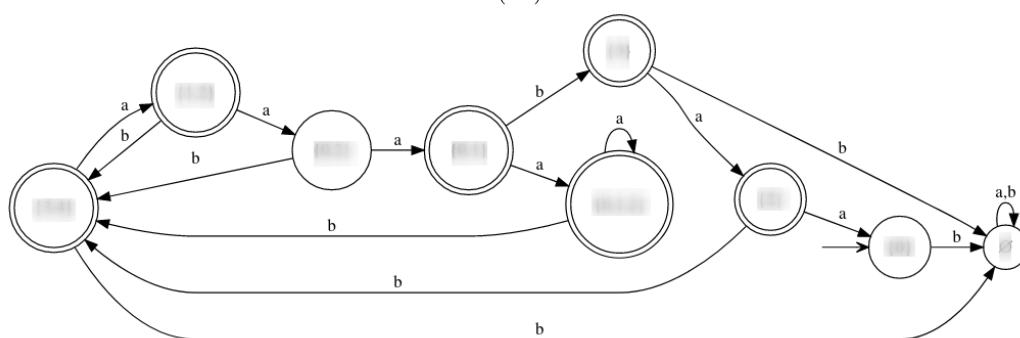
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



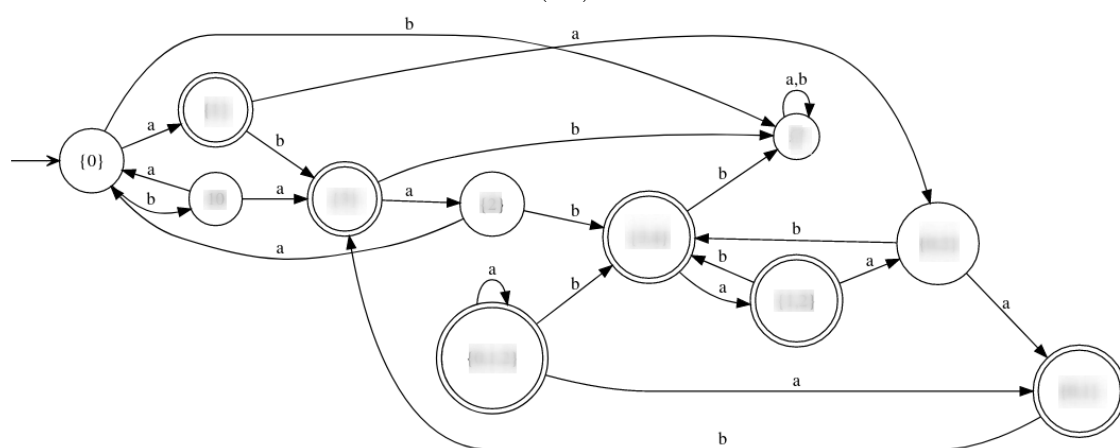
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

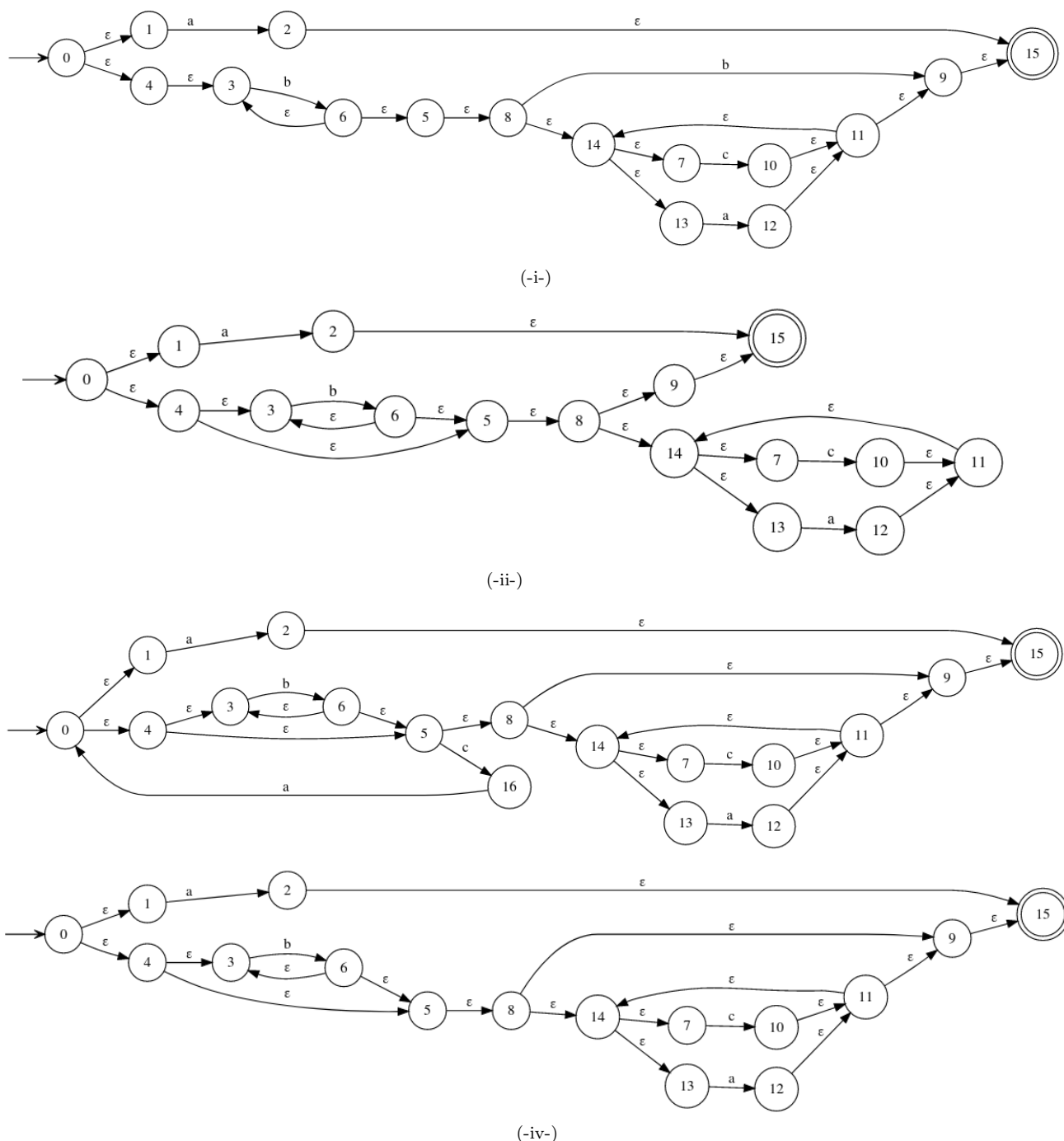


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e			h	i	j

Question 3 :

				e			h	i		k		m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

	b		d		f		h		j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a		c	d	e		g		i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

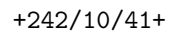
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ b Σ est fermé par préfixe.
- ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet. ☐ u est accepté par A .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

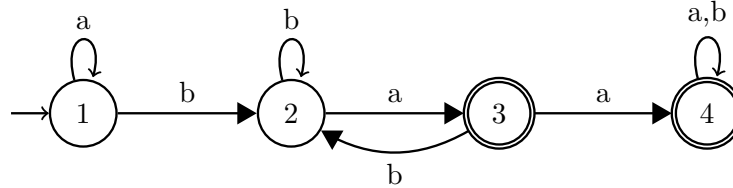
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

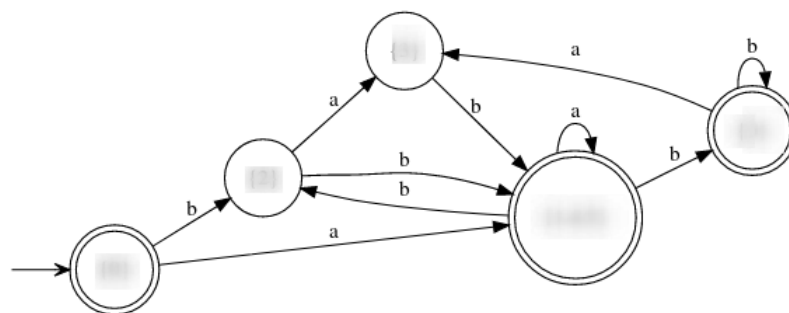
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 2 ☐ c 5 ☐ d 0 ☐ e 3 ☒ f 4 ☐ g 1

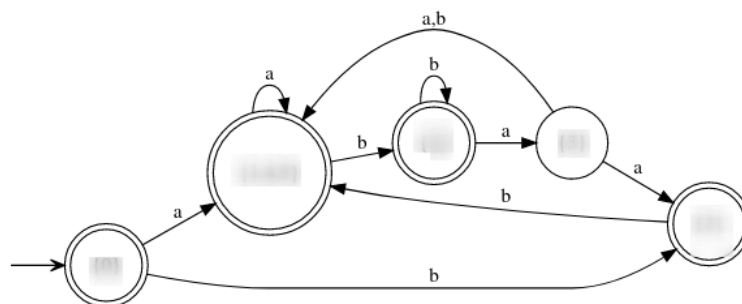
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

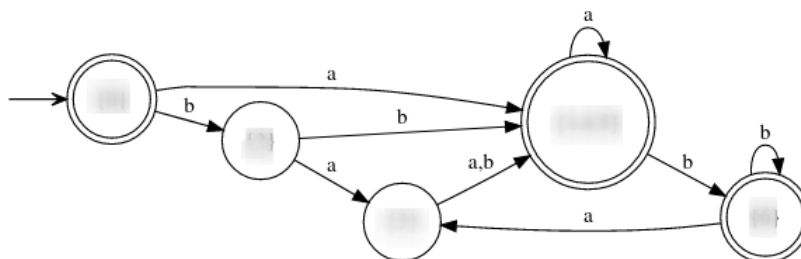
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



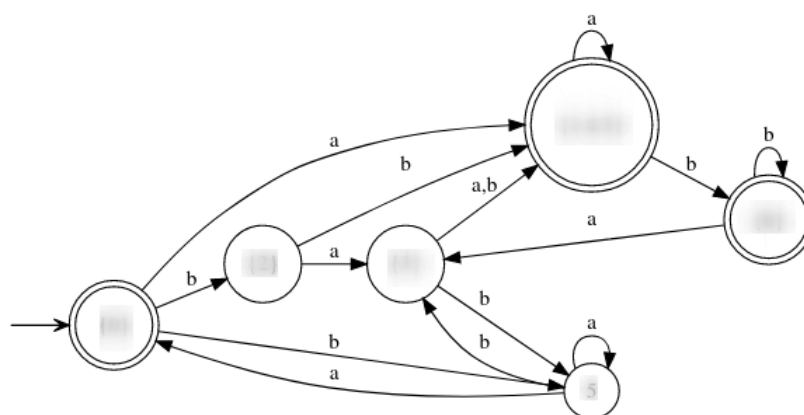
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

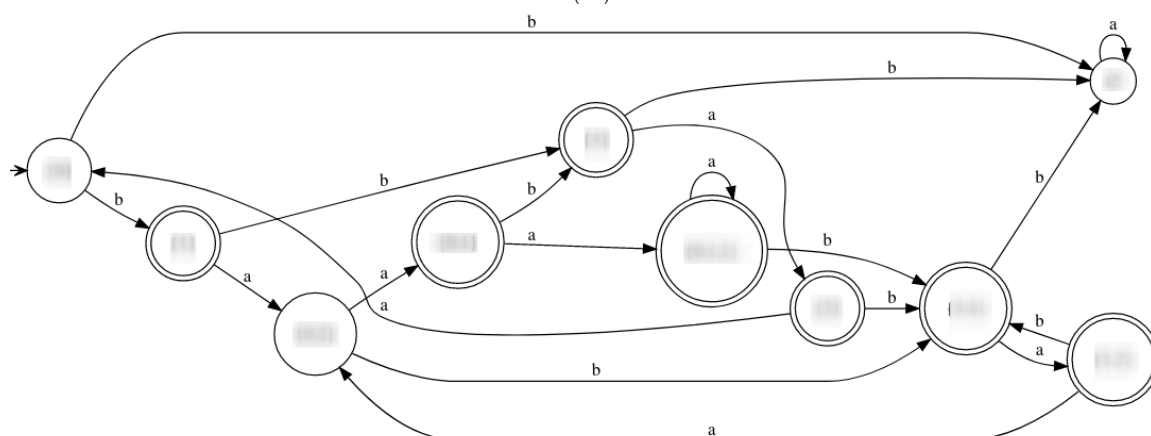


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

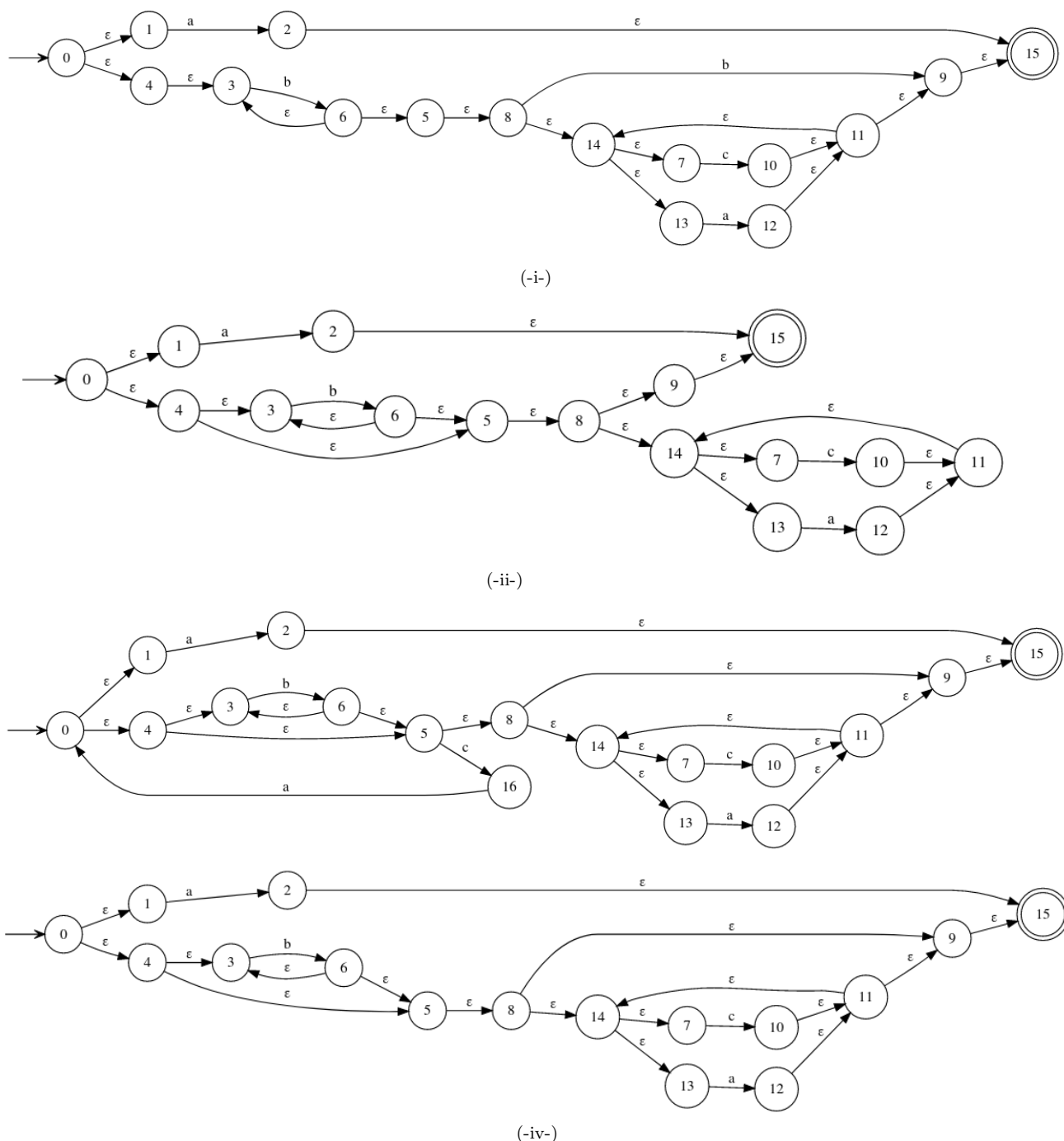


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a				e			h			k		m	n

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

	b	c	d			g		i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

				e	f	g		i	j	k

Question 8 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c	d	e				i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

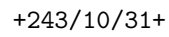
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une application.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ k Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A est complet. ☐ c u est accepté par A .
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f A a des états accepteurs.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ e Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ u n'est pas accepté par A . ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☒ A n'est pas complet.
☒ A a au moins un état accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ d A accepte le langage universel. ☐ e A possède un état puits
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

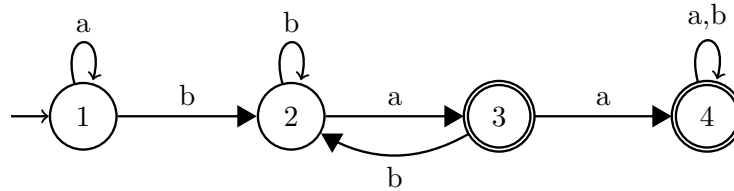
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

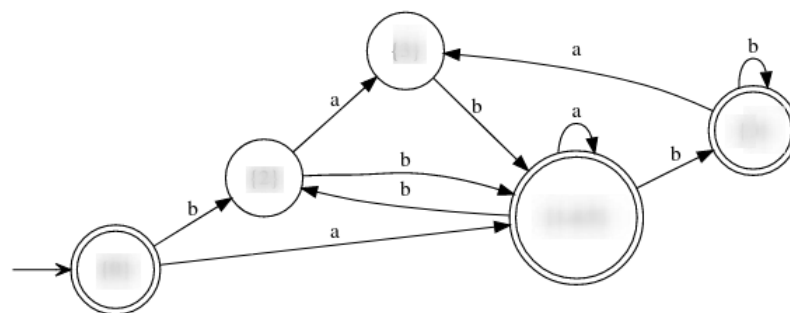
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ 0 ☐ 2 ☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 6

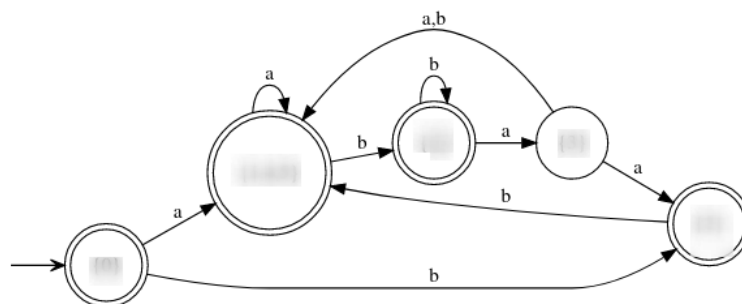
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

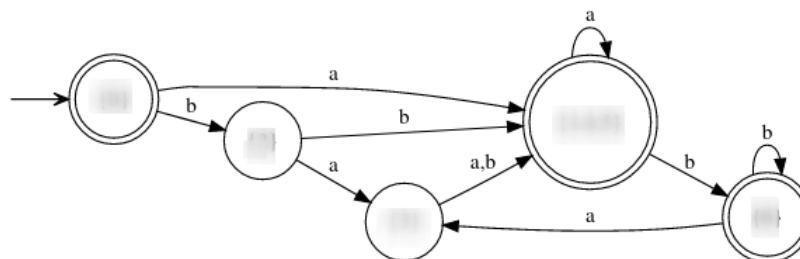
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



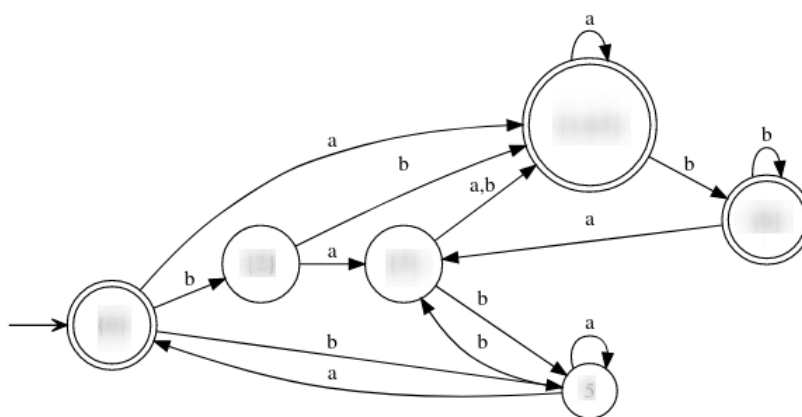
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

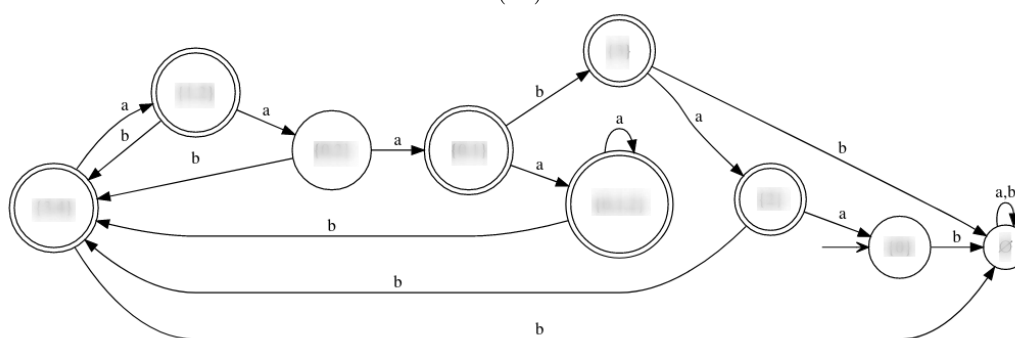
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



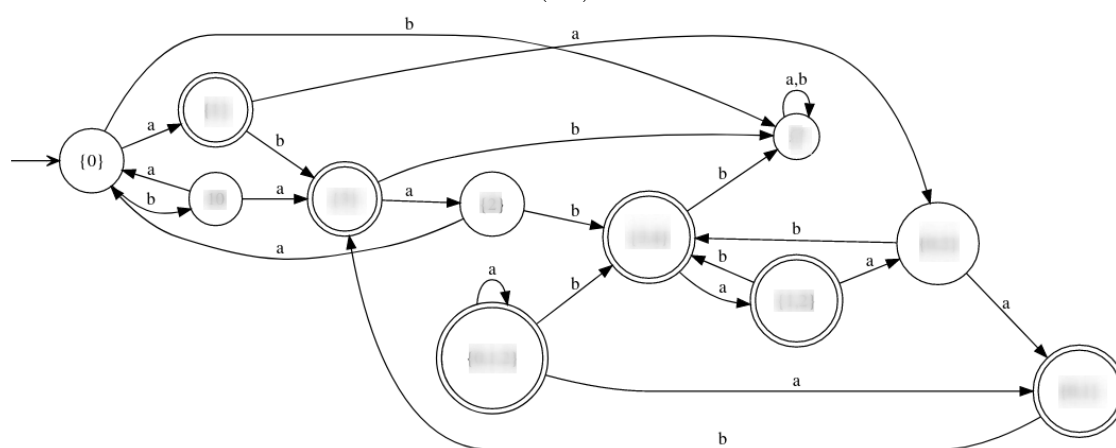
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

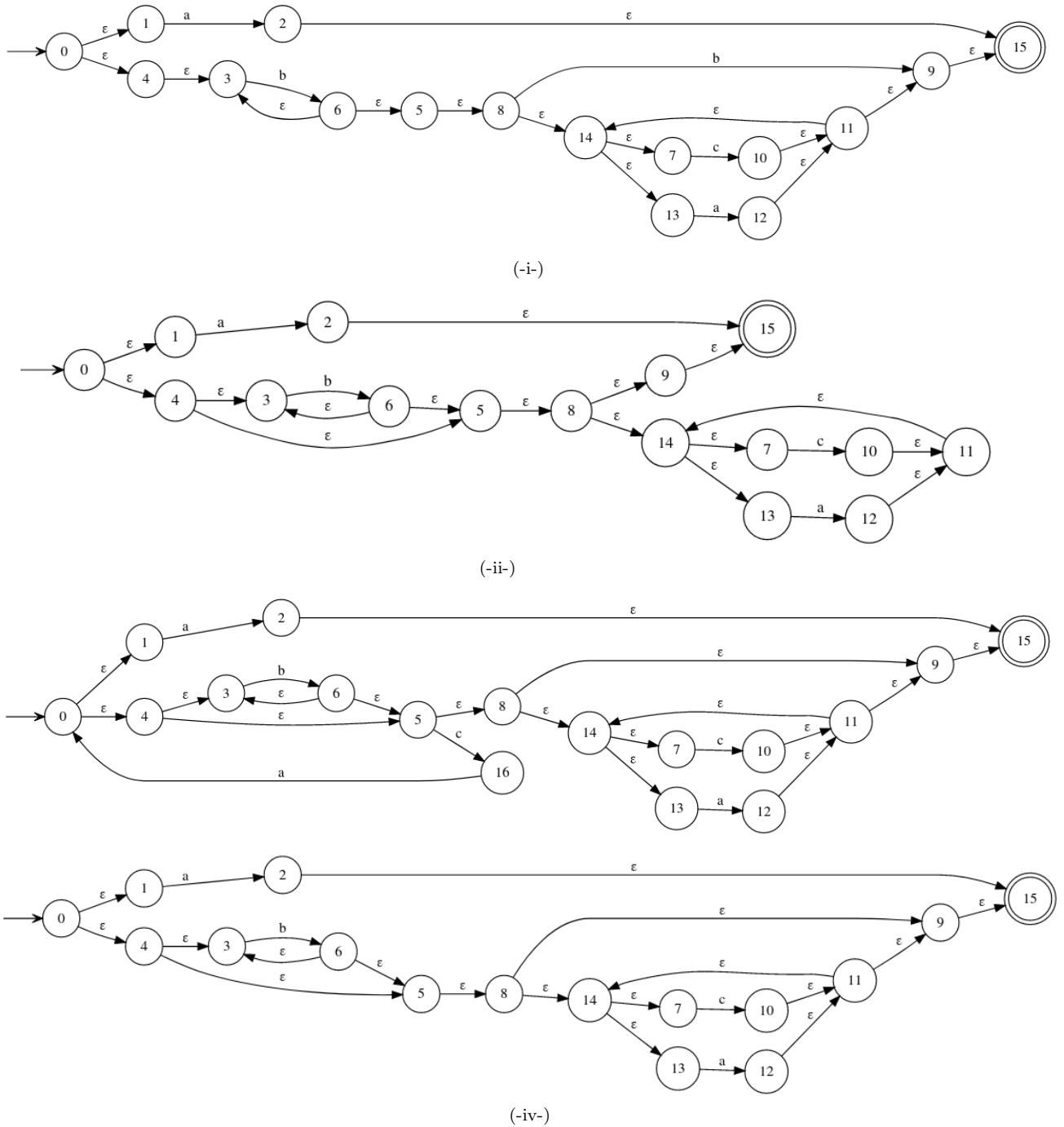


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c								k		m	n

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

	b	c		e			h	i	j

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

		c	d	e

Question 7 :

	b		d	e	f				j	k

Question 8 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

	b	c		e	f	g		i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

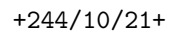
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ désigne l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ h Σ est fermé par préfixe.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☐ A n'est pas complet.

☐ A a au moins un état accessible.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

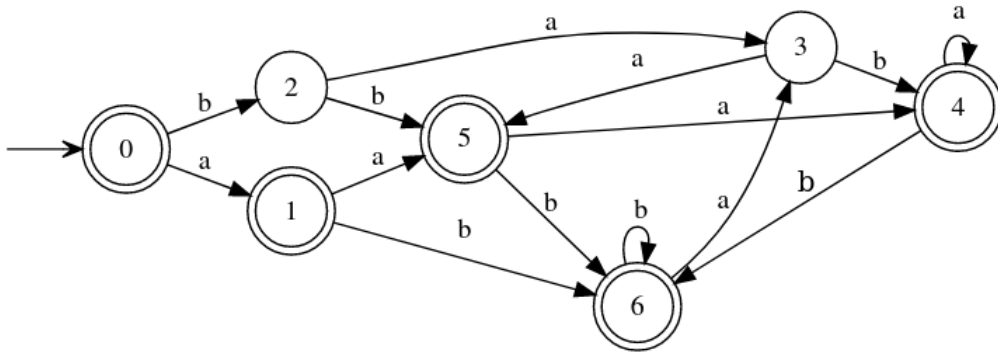
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

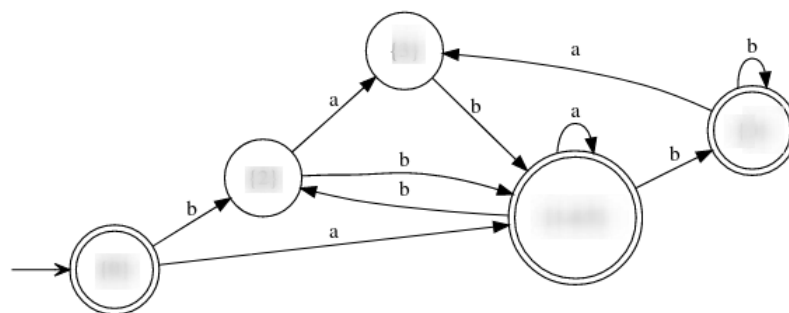
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 5 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 2 ☐ f 3 ☒ 4

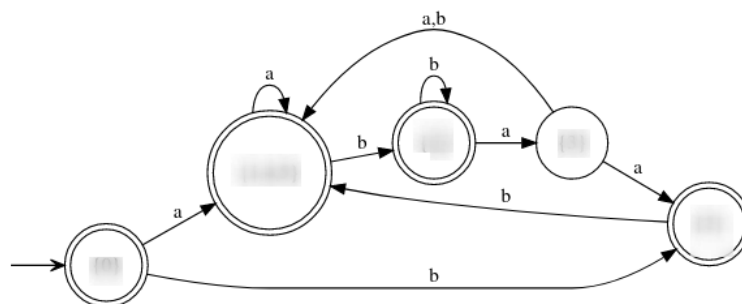
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

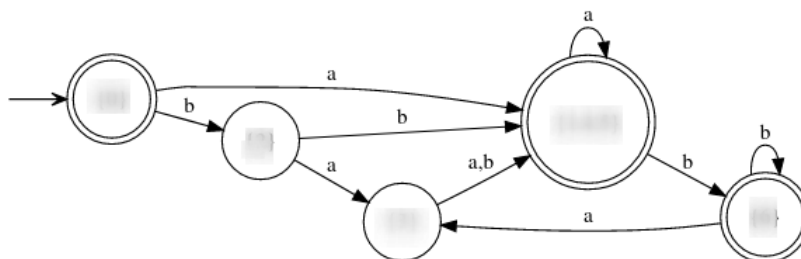
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



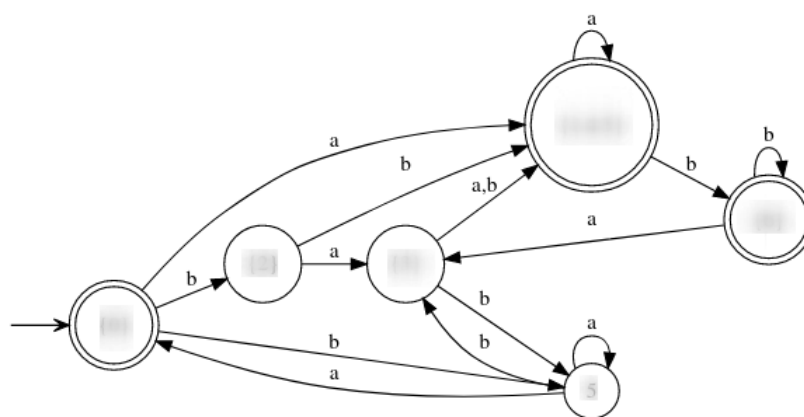
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

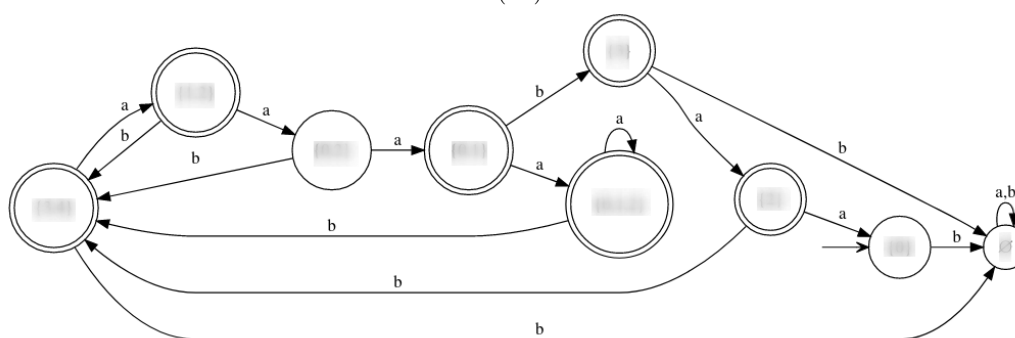
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)

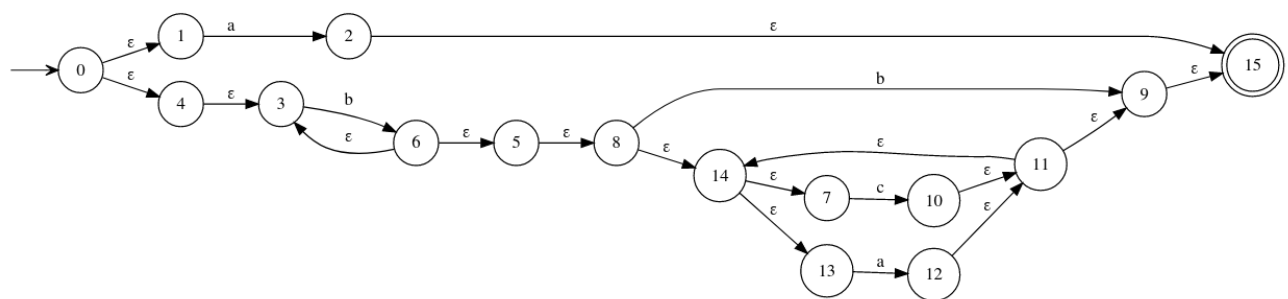


(-iii-)

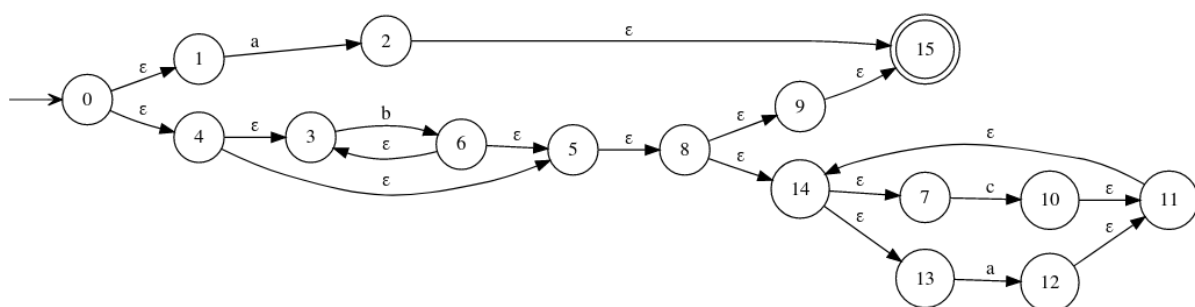


(-iv-)

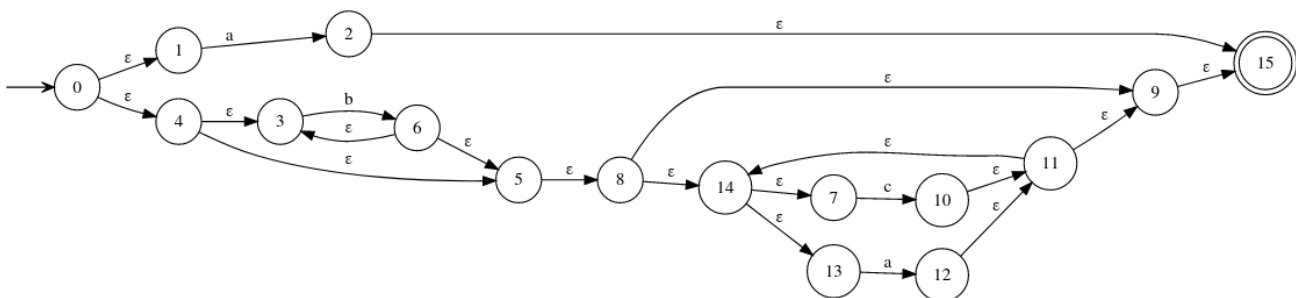
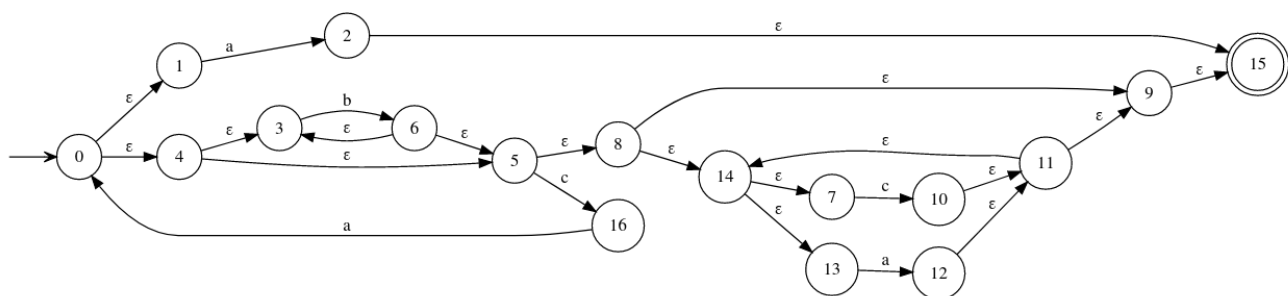
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g 

Question 4 :  ☐ b  ☐ d  ☐ f  ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a  ☐ c    ☐ g ☐ h  ☐ j ☐ k

Question 6 :     ☐ e ☐ f  ☐ h  ☐ j   ☐ m ☐ n

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d 

Question 8 :   ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e

Question 10 :  ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e  ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j   ☐ m

Question 12 :  ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

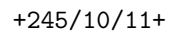
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 :  ☐ b

Question 17 : ☐ a  ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three lines: two solid outer lines and a dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed in a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ b $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☒ c A n'est pas complet.
- ☒ d u n'est pas accepté par A .
- ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☒ f A a au moins un état accessible.
- ☒ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ i A a au moins un état co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par suffixe.
- ☒ b Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ d Σ est fermé par suffixe.
- ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ f Σ est fermé par facteur.
- ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☒ h Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ **c** A accepte le langage universel. ☐ **d** nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ **f** Tous les états de A sont accepteurs. ☐ **g** A possède un état puits
☐ **h** Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ **i** Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ **a** Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ **f** Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot est une fonction. ☒ Un mot est une application.
☐ **i** Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ **k** Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut être vide.
☐ **m** Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ **n** Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ **a** A a des états accepteurs. ☐ **b** Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ **c** $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ **d** Les états de A sont tous accessibles. ☐ **e** u est accepté par A . ☐ **f** A est complet.
☐ **g** Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ **b** Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ P est forcément déterministe.
☐ **d** Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ **e** Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ **a** la Figure 3-i-. ☐ **b** la Figure 3-ii-. ☐ **e** la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ la Figure 3-iii-. ☐ **d** la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ **a** la Figure 4-iv-. ☐ **b** la Figure 4-ii-. ☐ **c** la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
	☐ m		$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
	☒	Aucune des équations proposées.					
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ e	Aucune des équations proposées.					
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

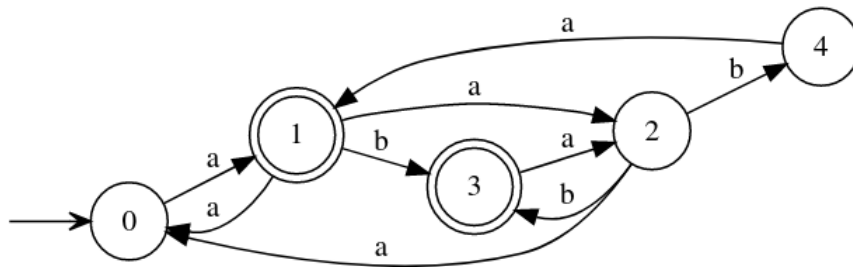
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

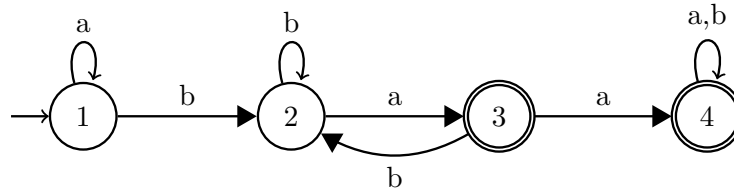
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☒ 4 ☐ c 6 ☐ d 2 ☐ e 0 ☐ f 1 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

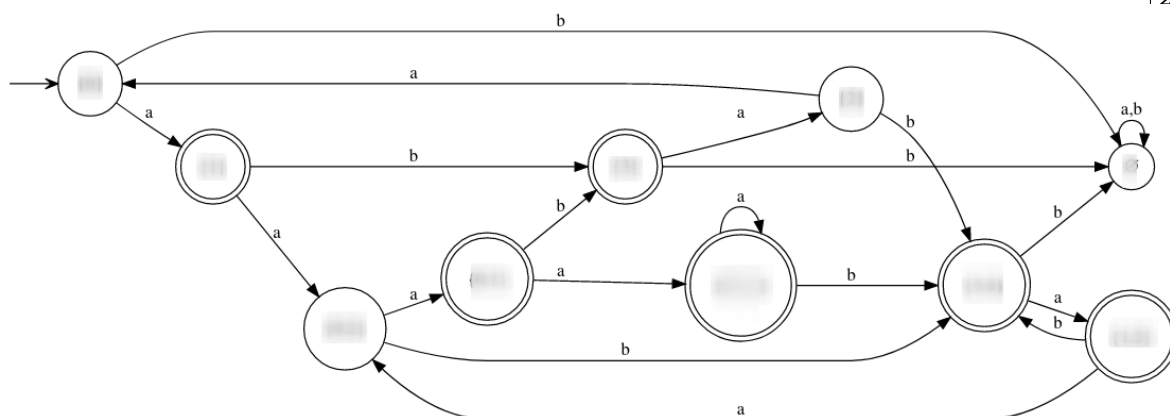


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

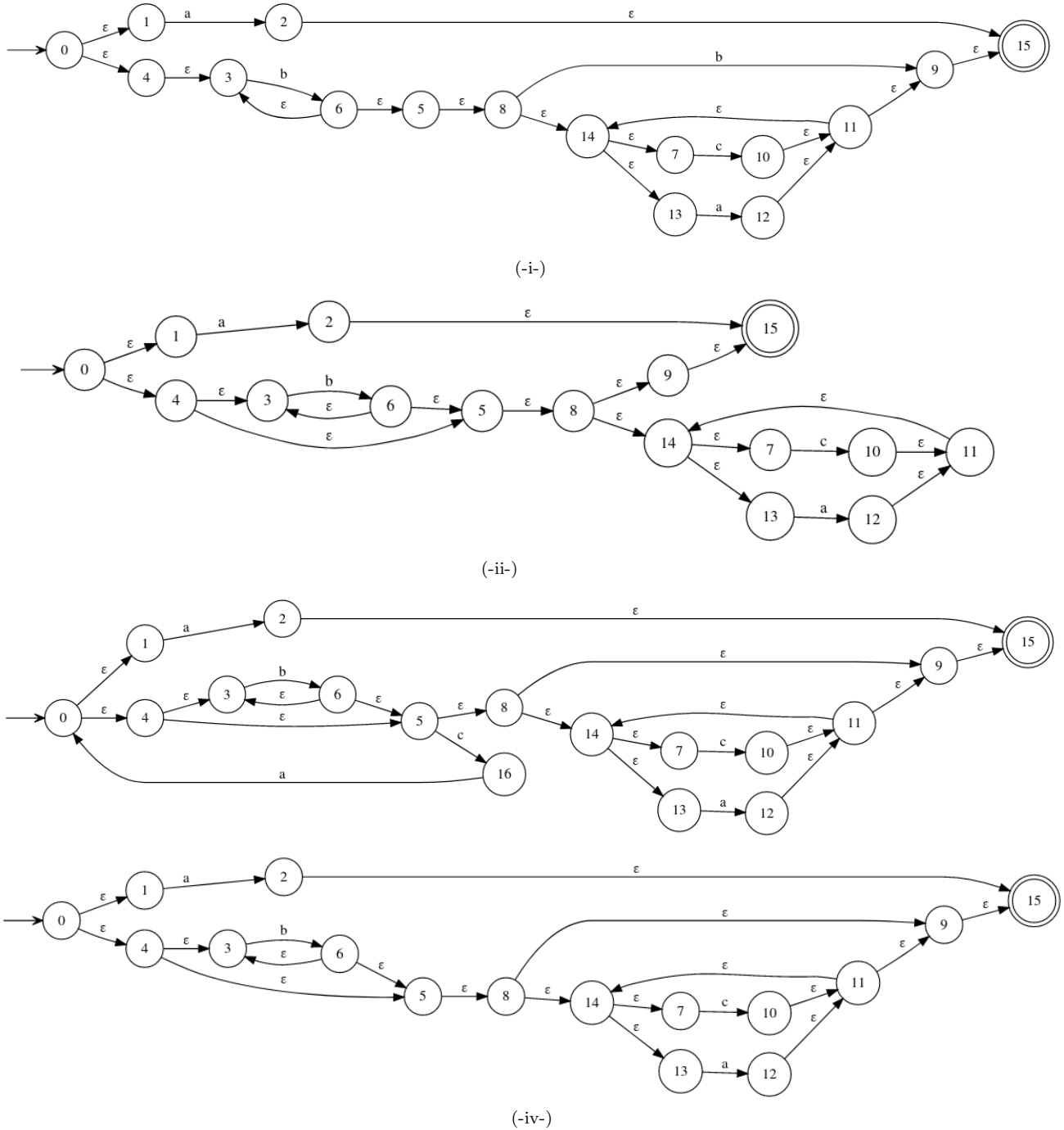


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a				e			h	i	j	k

Question 4 :

		c	d	e	f			i	j

Question 5 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 6 :

a					f			i		k		m	n

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

	b		d	e

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b					g	h	i	j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

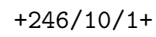
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☐ c A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ f A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c u est accepté par A . ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e A est complet.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c A accepte le langage universel.
☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot est une application. ☒ b Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ d Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot peut être infini. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ i Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ j Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ k Un mot est une fonction. ☒ l Un mot peut être vide.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☒ e la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

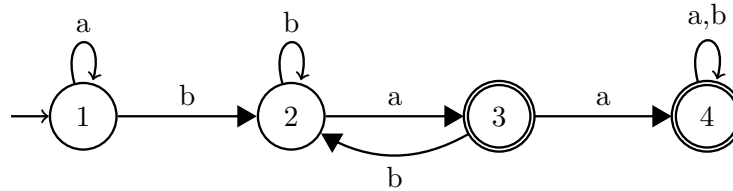
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 2 ☐ d 3 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 6

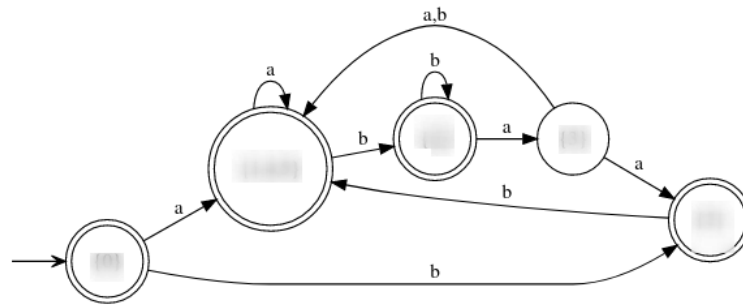
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



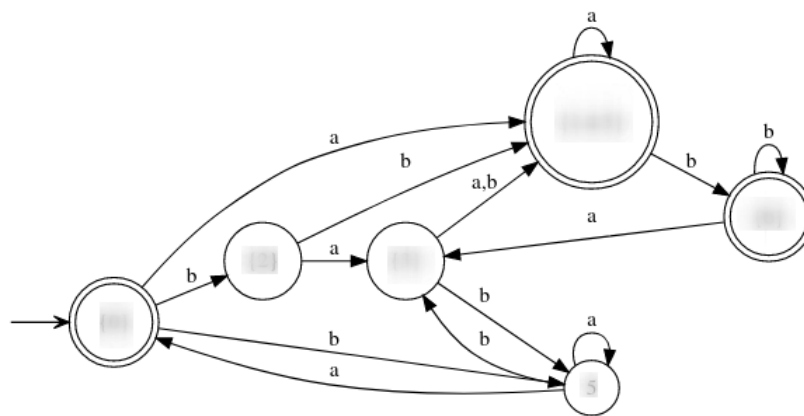
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

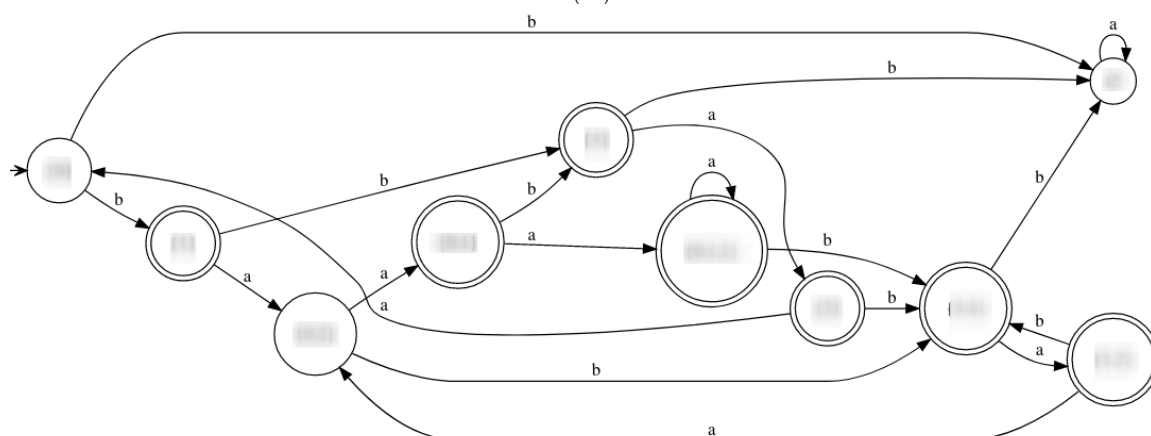


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

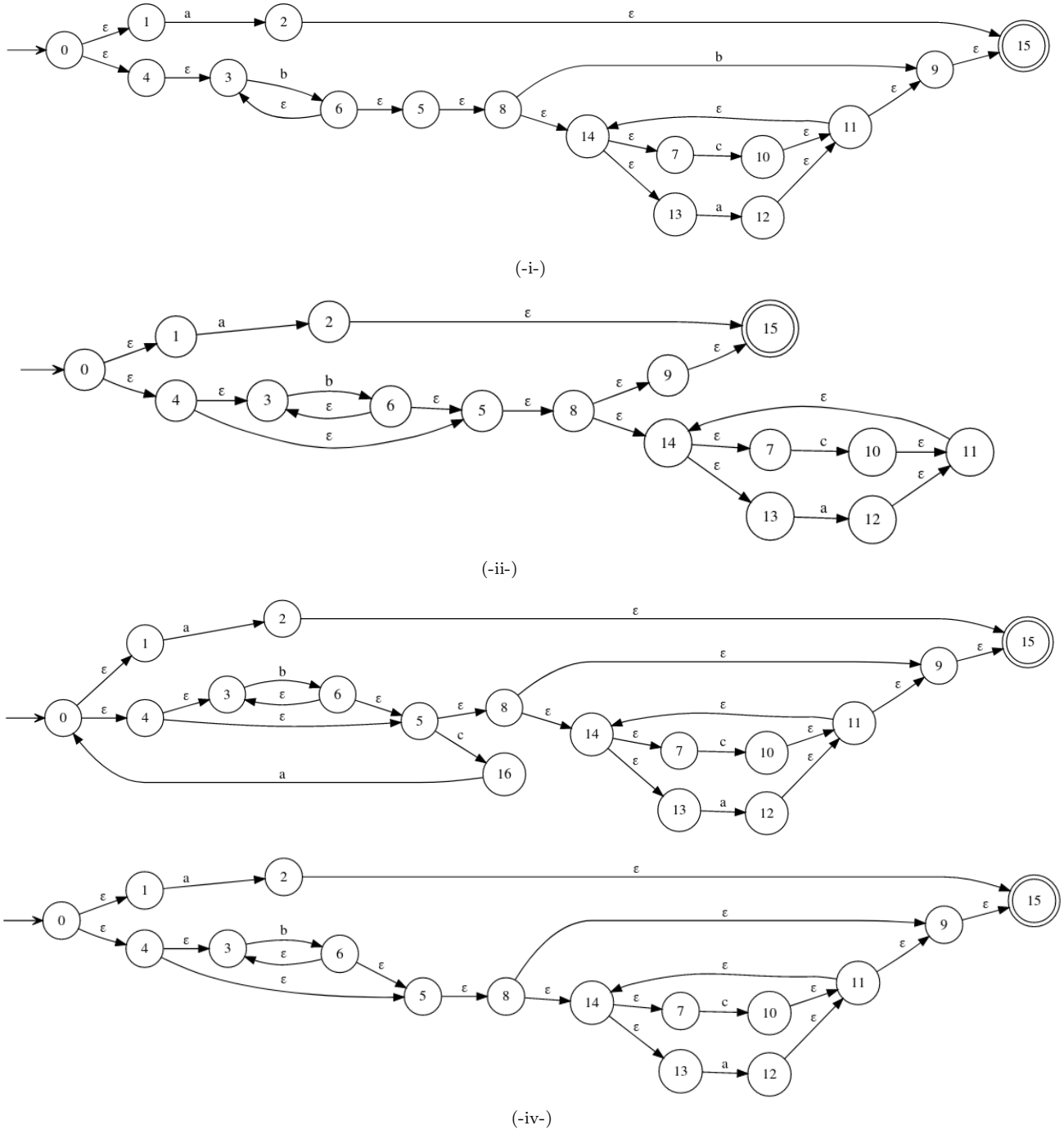


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservez enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e  g h i j

Question 3 : a b c   f    j k

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a b c  e  g h i

Question 7 :   c d e

Question 8 :    e  g h  j   m n

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a b c d  f g h  j k  

Question 12 : a  c d e f g h

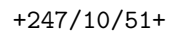
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a a au moins un état accessible. ☐ b a a au moins un état non co-accessible.
☐ c A n'est pas complet. ☐ d u n'est pas accepté par A .
☐ e A a au moins un état co-accessible. ☐ f $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ c Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Un mot peut être vide.
☐ e Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ i Un mot est une application. ☐ j Un mot est une fonction.
☐ k Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ l Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b A accepte le langage universel.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e A possède un état puits
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.
☐ e A est complet. ☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par facteur.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ g Σ est fermé par préfixe.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

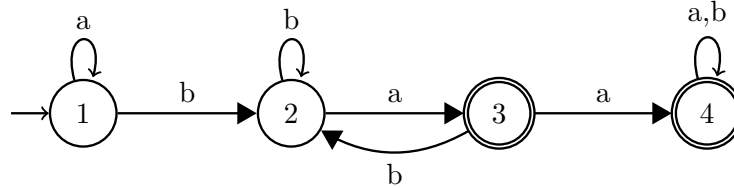
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 3 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 6 ☐ f 2 ☐ g 5

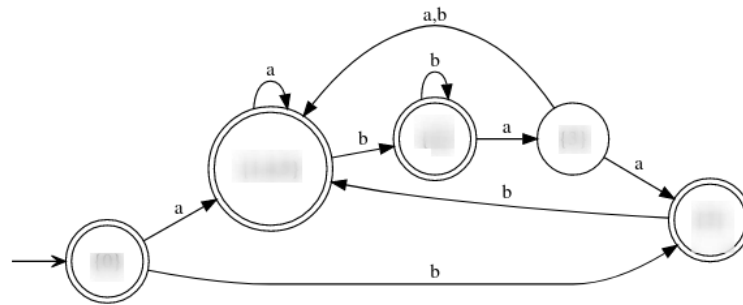
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



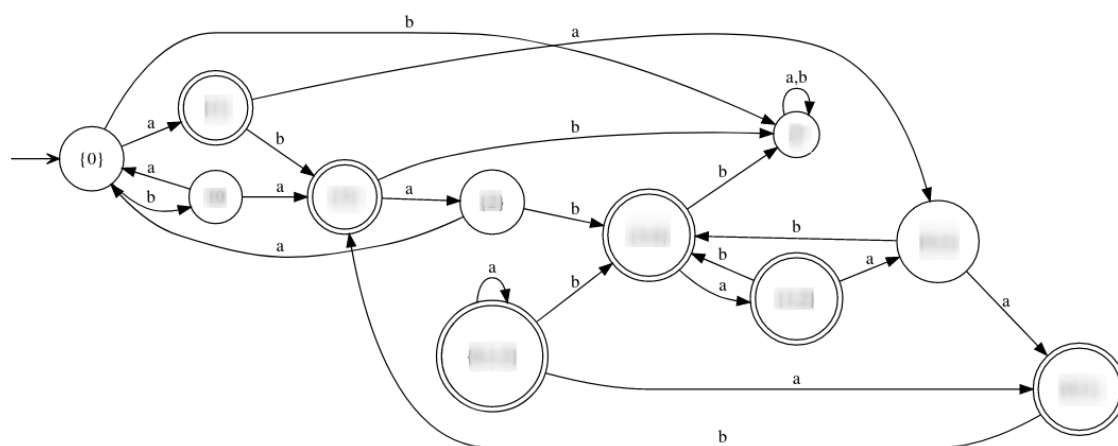
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b   e   h i j k

Question 3 :  b  d e

Question 4 :  b    g h    l m n

Question 5 : a b c  e  g h i

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a    f g h i j

Question 9 : a b c  e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a  c  e   h i j k l m

Question 12 : a b c  e f g h

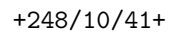
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e A possède un état puits ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Σ^* est fermé par suffixe. ☐ d Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par facteur.
- ☐ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ g Σ est fermé par préfixe.

☐ h Σ est fermé par suffixe.

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☐ e A a au moins un état co-accessible.

☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ i A a au moins un état non accessible.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut être vide.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ f Un mot peut être infini.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une application.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

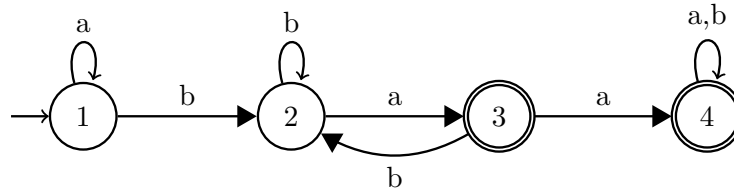
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 5 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 2 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

	b		d	e	f	g	h	i

Question 5 :

	b			e		g	h	i	j

Question 6 :

			d	e			h	i	j	k

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

		c			f			i			l	m	n

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c		e			h	i	j		l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

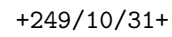
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u est accepté par A . ☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

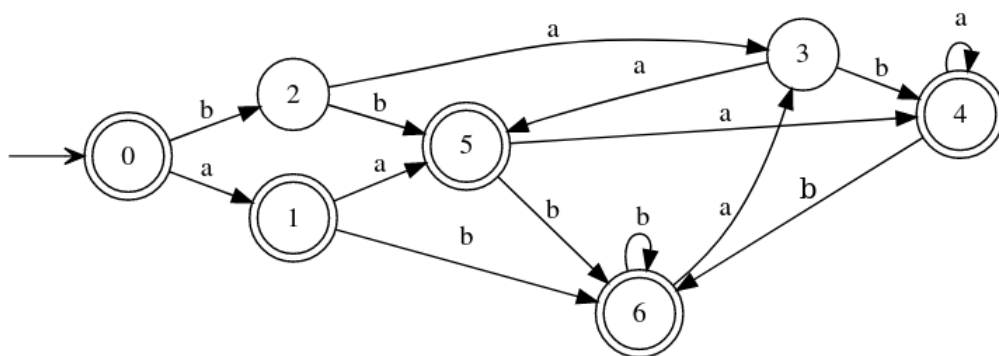
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

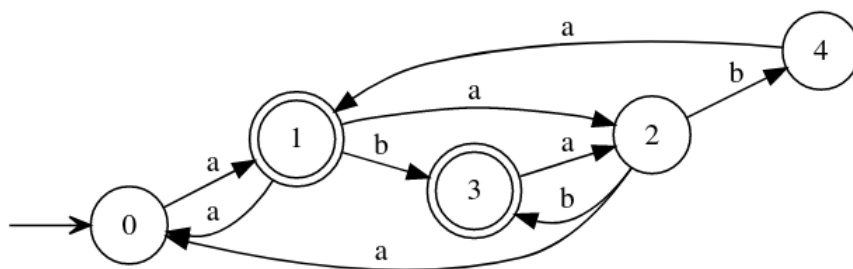
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

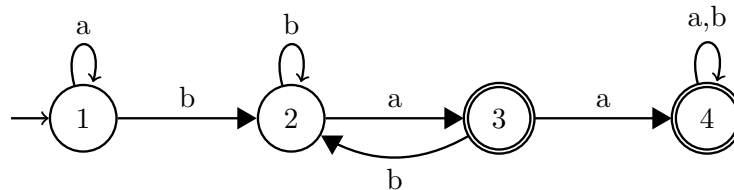
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

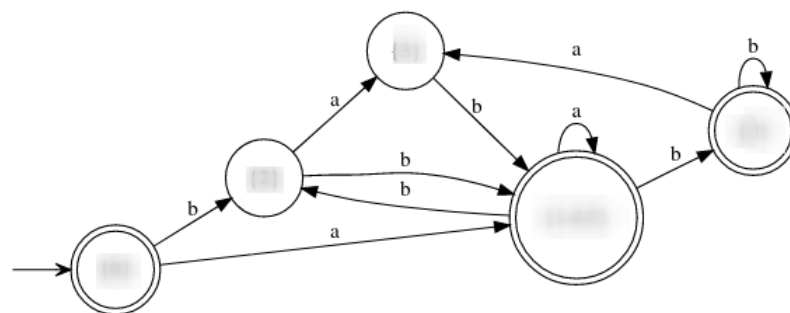
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 0 ☐ d 2 ☐ e 3 ☐ f 5 ☐ g 6

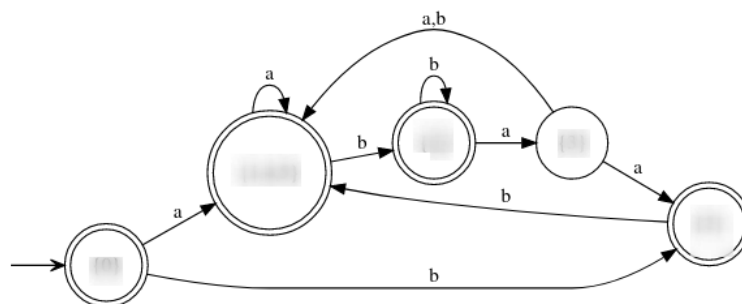
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

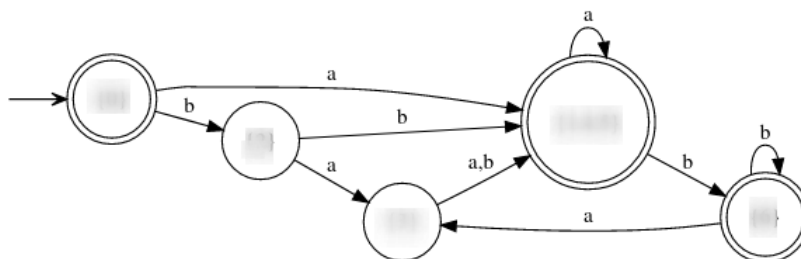
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



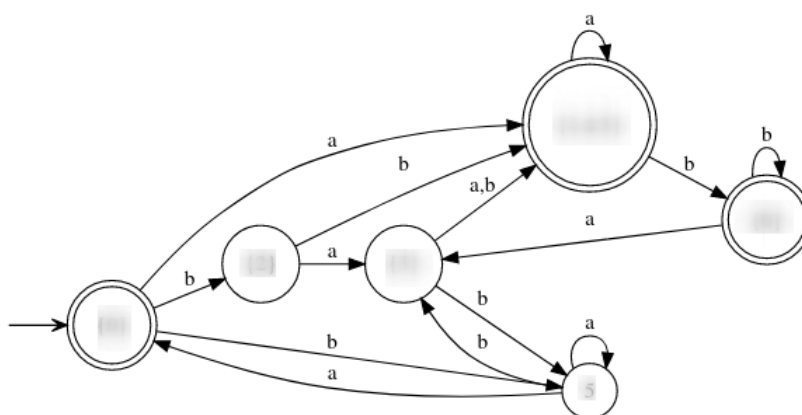
(-i-)



(-ii-)

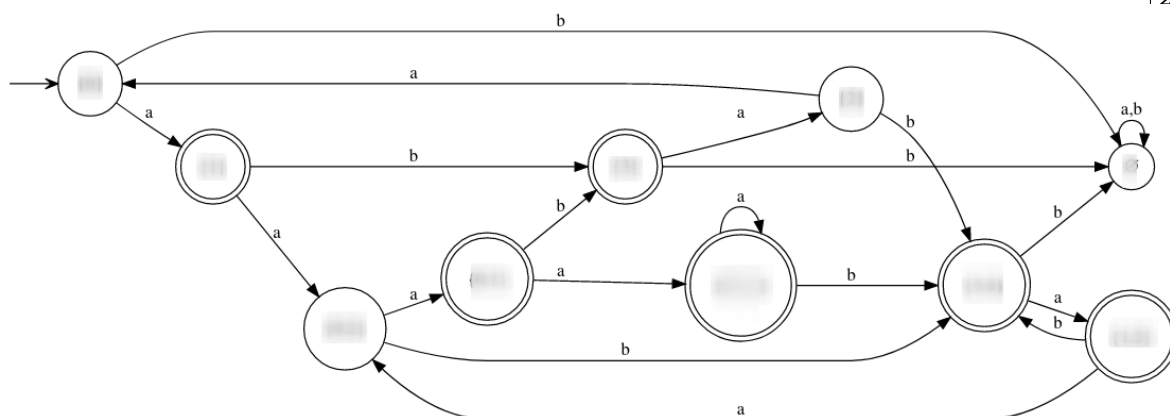


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

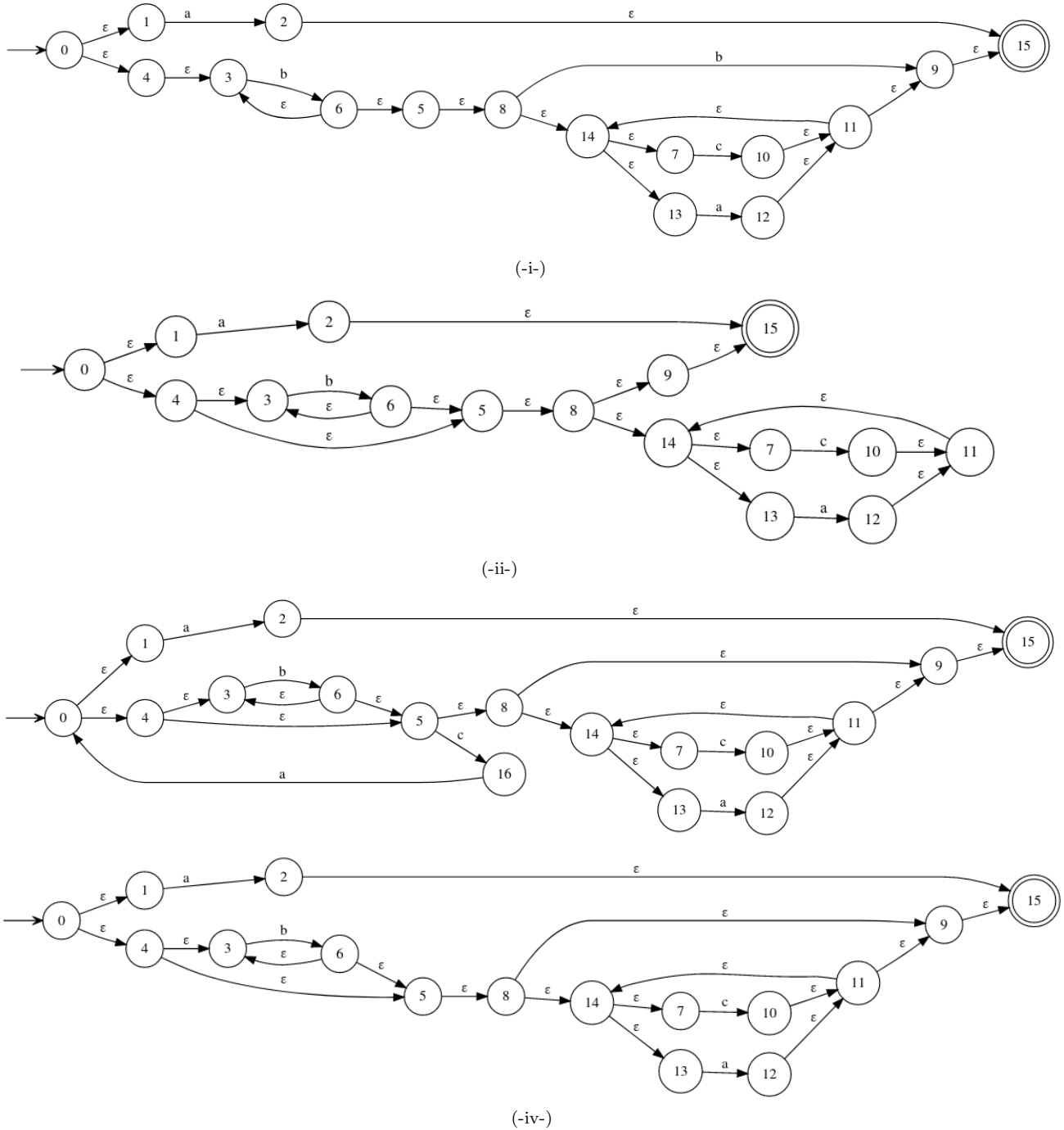


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f  h  j k

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a b   e f g h i

Question 5 : a b   e   h i j

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 :  b  d e

Question 8 : a       i  k l m n

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 :  b c   f g h i  k l m

Question 12 : a b c  e f g h

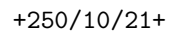
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ c A a des états accepteurs.
- ☐ d u est accepté par A .
- ☐ e A est complet.
- ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ e Un mot peut être infini.
- ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ A accepte le langage universel. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

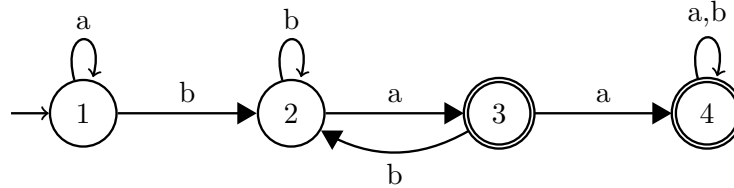
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 0 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 1 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

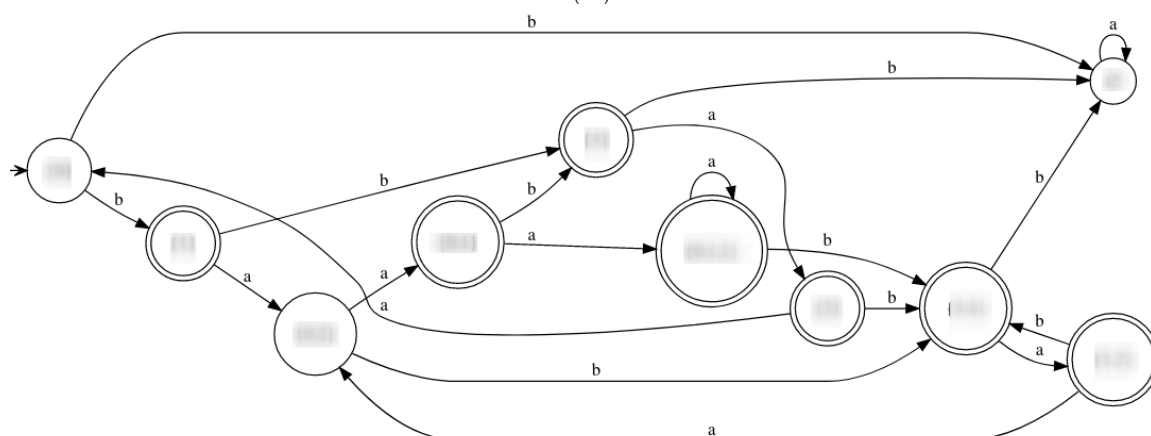


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



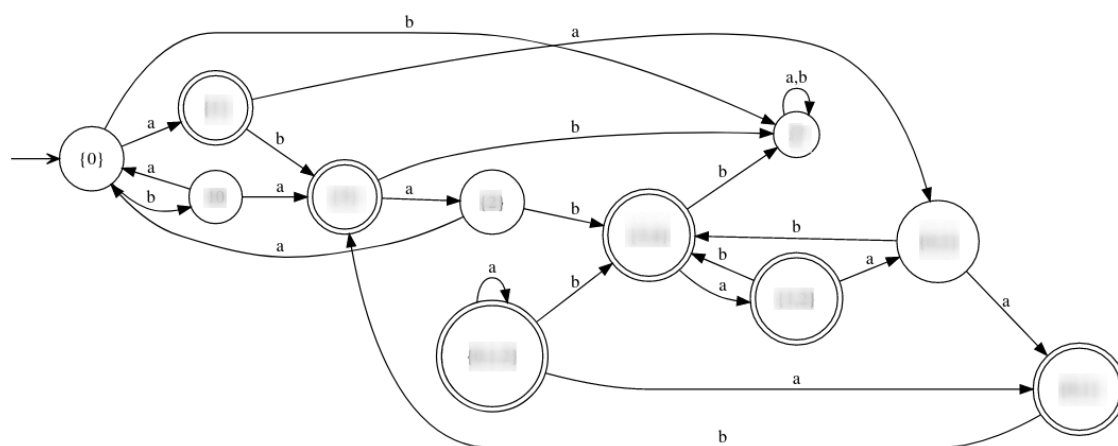
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

	b			e	f					k		m	n

Question 6 :

				e	f	g	h	i	j

Question 7 :

a		c	d			g			j	k

Question 8 :

a		c	d	e		g	h	i

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c	d	e		g	h	i		k		m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

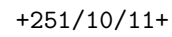
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par facteur.
☒ c Σ^* est fermé par préfixe. ☒ d Σ^* est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☐ f Σ est fermé par préfixe. ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ h Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ b Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ c Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ d Un mot peut être vide.
☐ e Un mot peut être infini. ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a au moins un état co-accessible.
☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

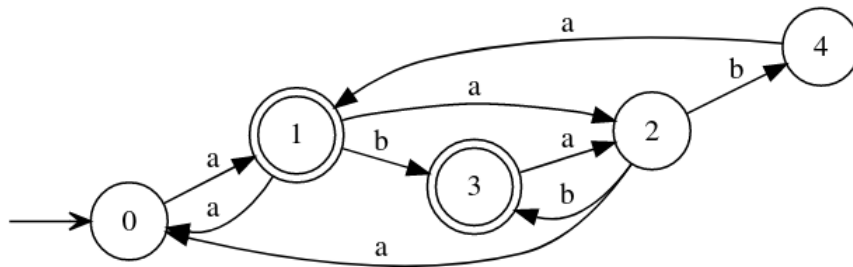
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

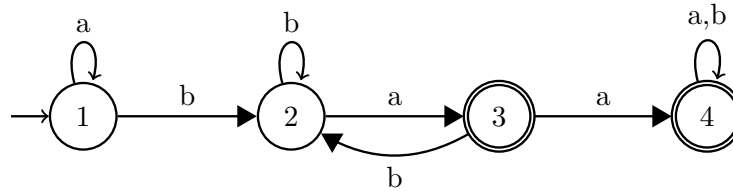
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 1 ☐ f 2 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

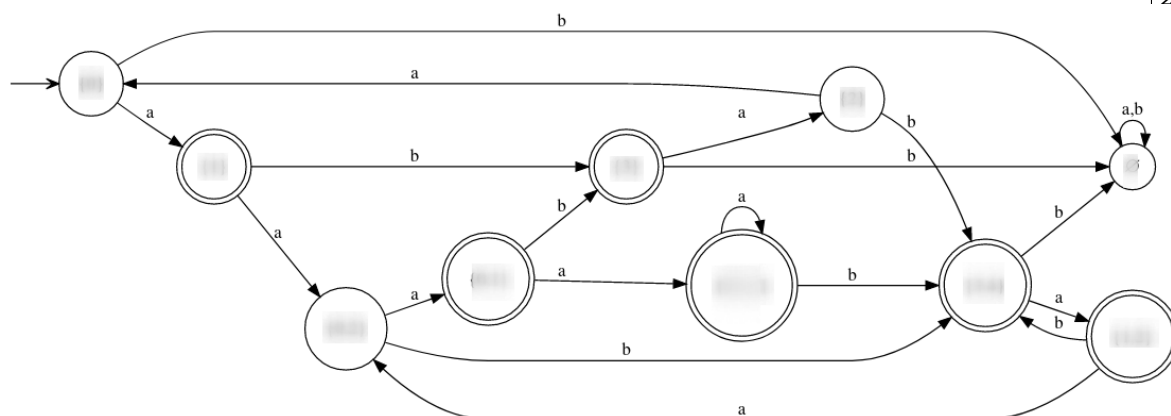


(-iii-)

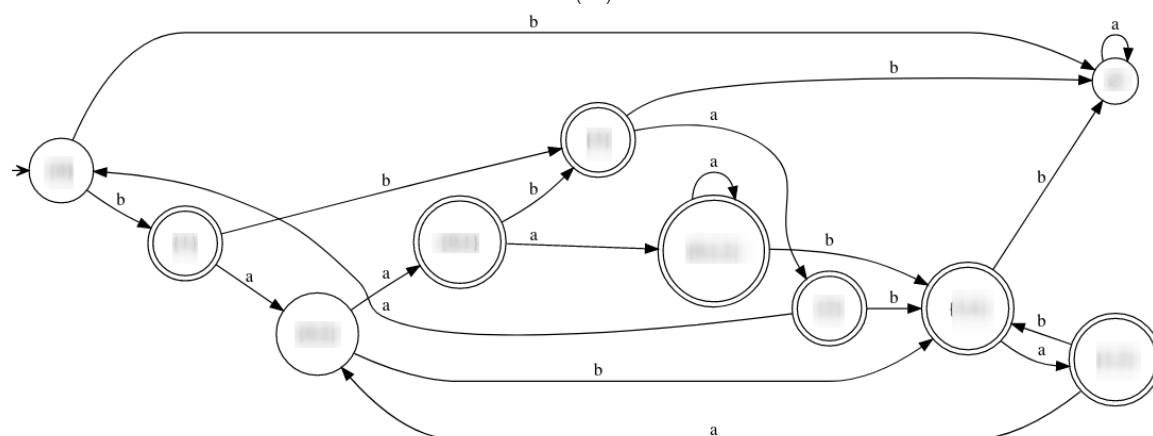


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



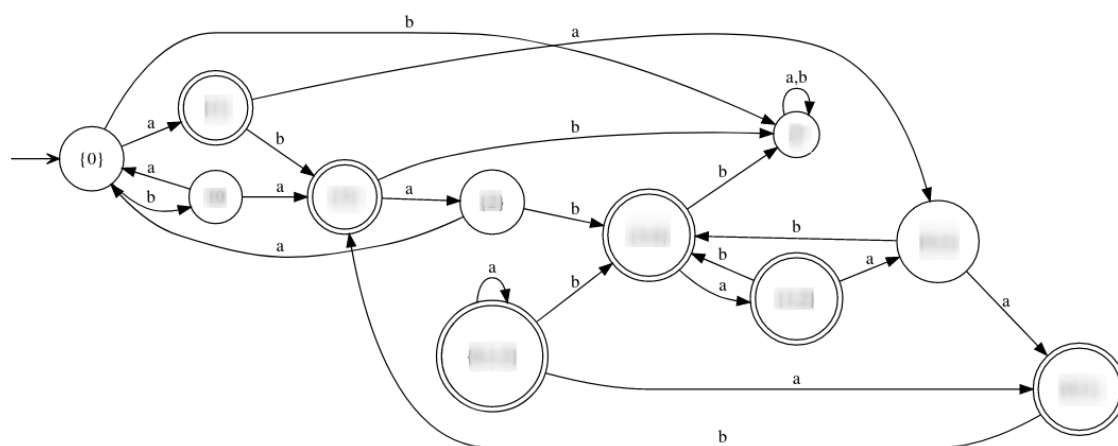
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

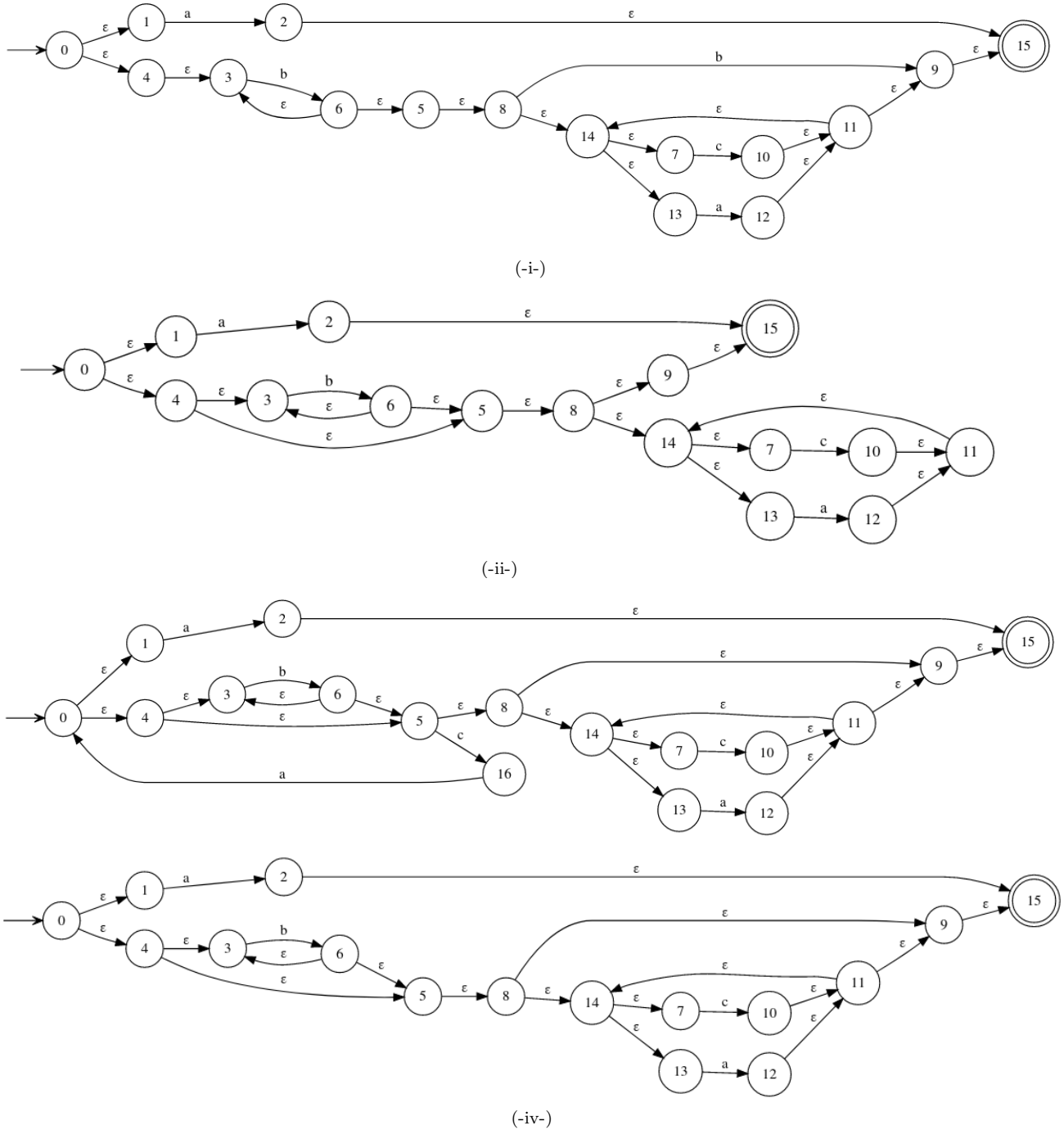


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b			e	f			i	j

Question 3 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a				e		g	h					m	n

Question 6 :

		c	d	e				i	j	k

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c	d	e		g			j	k	l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

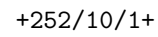
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows of small dots, designed to guide handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c u est accepté par A .
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e A est complet.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☒ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ c Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ d Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ g Un mot est une application. ☒ h Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot peut être infini. ☒ j Un mot peut être vide.
☒ k Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ l Un mot est une fonction.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ d Σ^* est fermé par suffixe.
☐ e Σ est fermé par suffixe. ☒ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☒ g Σ^* est fermé par préfixe. ☒ h Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_4 = (a+b)X_4$
☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
				☐ j	$X_4 = a + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☒	$X_4 = (a+b)^*$	☐ f	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a+b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

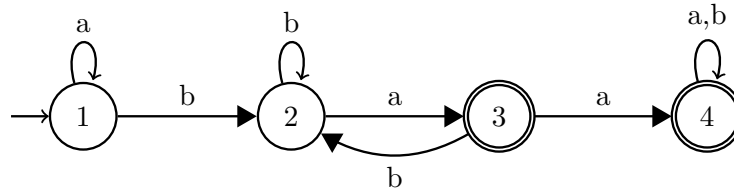
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 0 ☐ c 3 ☐ d 5 ☐ e 6 ☐ f 2 ☐ g 1

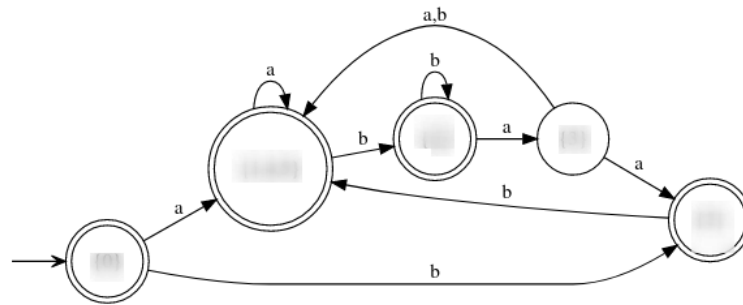
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



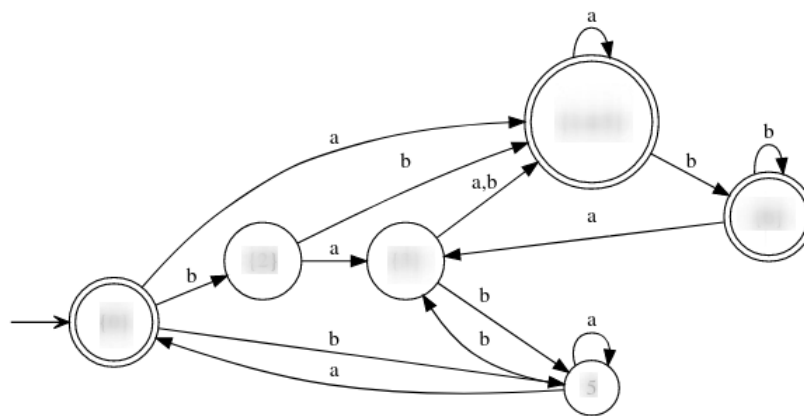
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

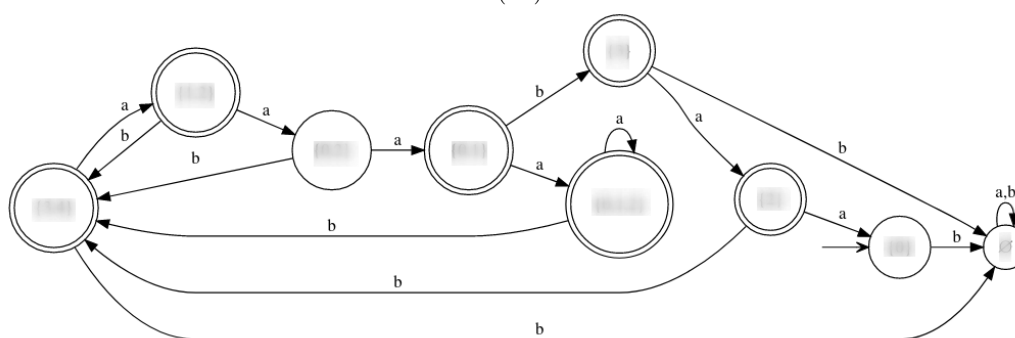
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

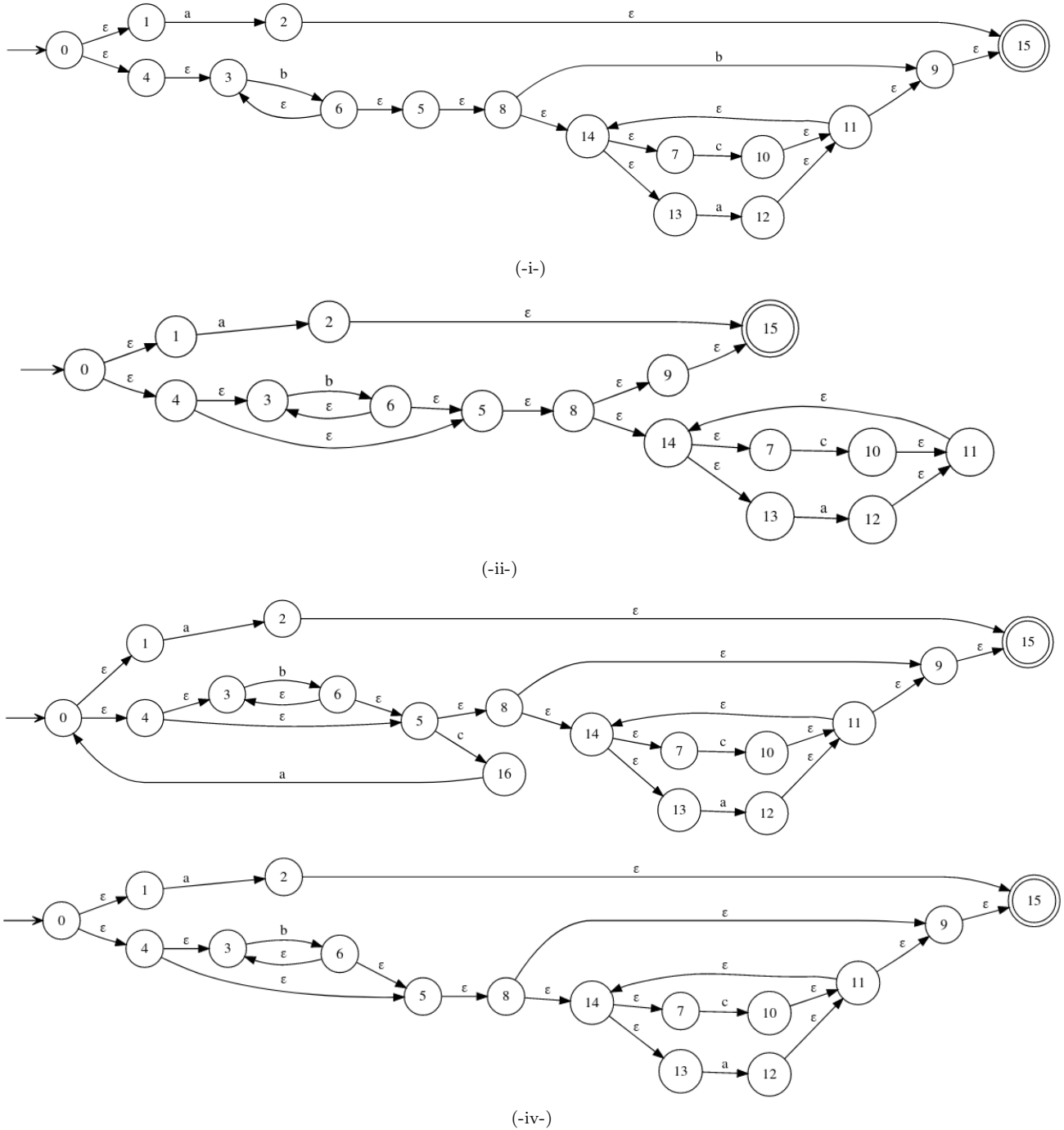


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d   g  i j k

Question 3 : a b c d 

Question 4 : a   d e

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a b c d   g h i

Question 7 : a b   e    i   m n

Question 8 : a b c  e    i j

Question 9 :  b c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b   e f g  i j k l 

Question 12 : a b c d  f g h

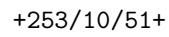
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ d Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ g Σ est fermé par suffixe. ☐ h Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Un mot est une application.
- ☐ e Un mot peut être vide. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Un mot peut être infini.
- ☐ i Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.

- ☐ e u est accepté par A . ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c A accepte le langage universel. ☐ d A possède un état puits
- ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ b A a au moins un état non co-accessible. ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ e A a au moins un état non accessible.
- ☒ A a au moins un état accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☒ A n'est pas complet. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_4 = a + b$ ☐ b $X_1 = aX_1 + b$ ☐ c $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_4 = (a + b)X_4$
☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ g $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ h $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☐ i $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ k $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ l $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ b $X_4 = a + b$ ☐ c $X_4 = (a + b)X_4$ ☒ $X_4 = (a + b)^*$
☐ e $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ f $X_4 = a^* + b^*$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^*b$ ☐ b $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2$ ☐ d $X_1 = a^*b + \epsilon$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ c $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☒ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ c $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = a(a + b)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

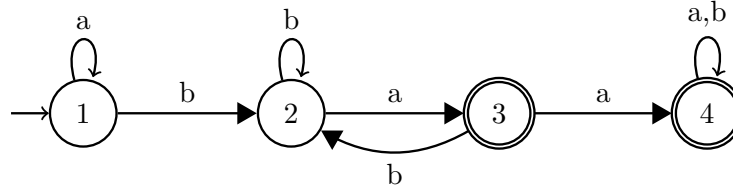
- ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$ ☐ c $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

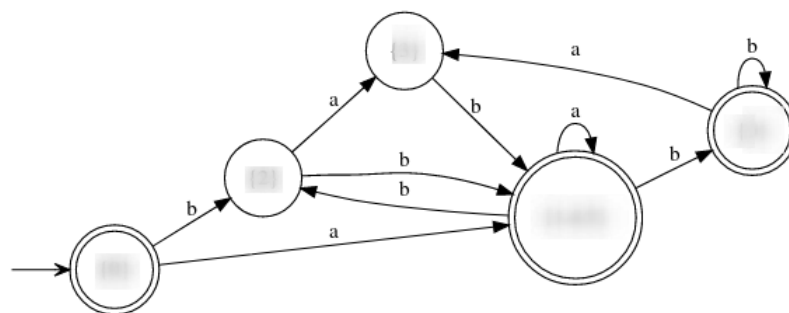
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 5 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 3

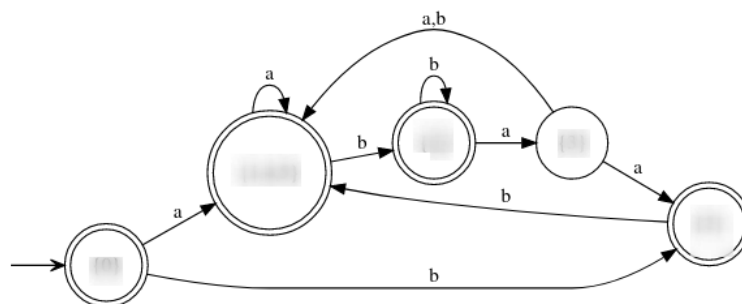
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

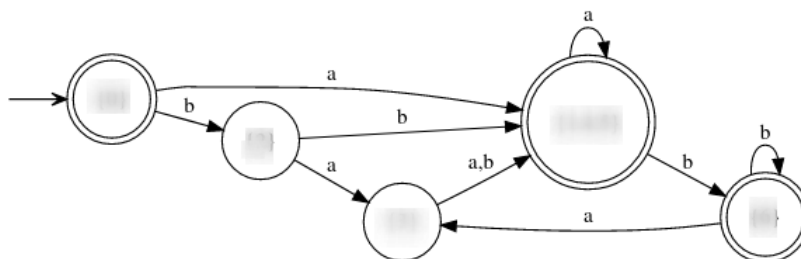
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



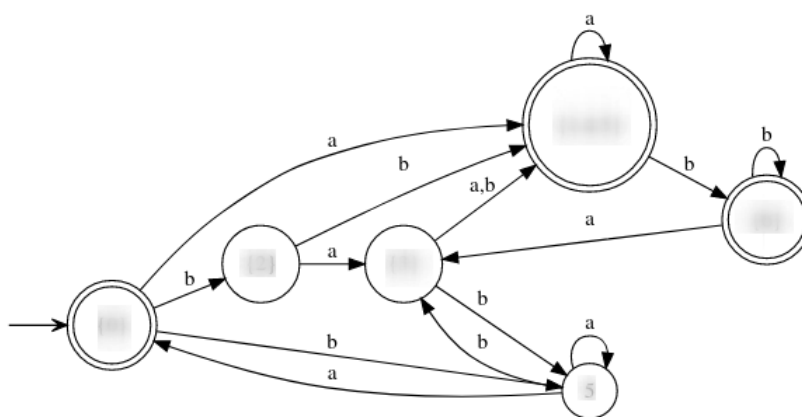
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.

(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

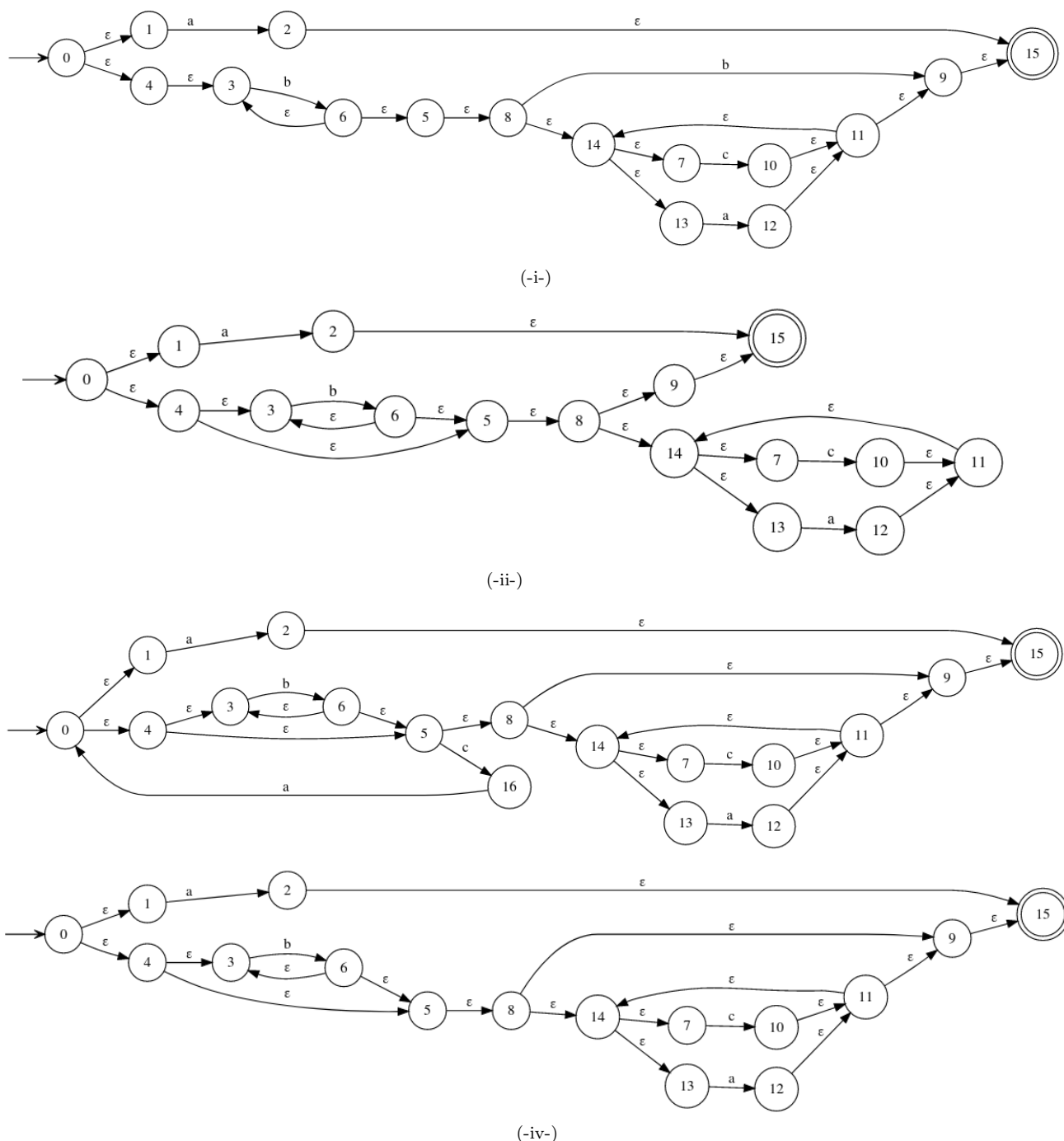


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a		c		e		g		i	j

Question 4 :

	b				f		h			k		m	n

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

	b	c		e				i	j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d			g	h	i		k	l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

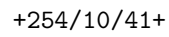
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A a des états accepteurs. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot est une fonction. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ d Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ e Un mot est une application. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ g Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ h Un mot peut être vide.
☒ i Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ j Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ k Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ l Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☒ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii- ☐ la Figure 3-iv- ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii- ☐ la Figure 3-i-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv- ☐ la Figure 4-iii- ☐ la Figure 4-ii- ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ g	$X_4 = a + b$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

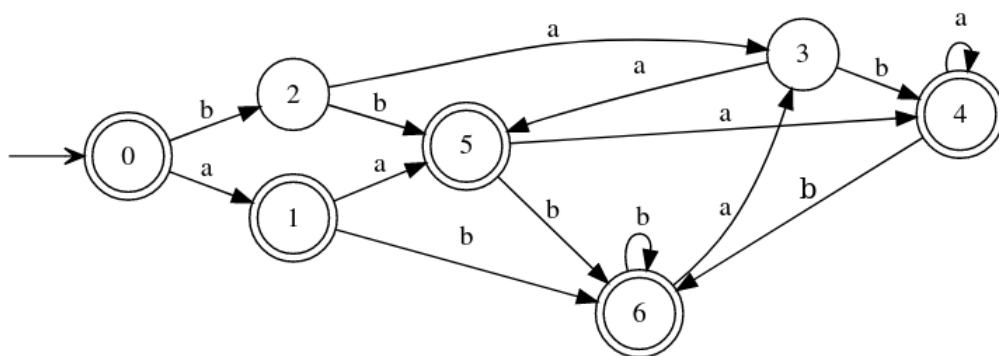
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

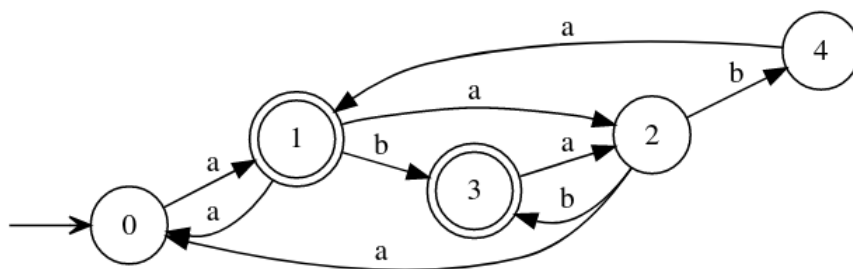
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

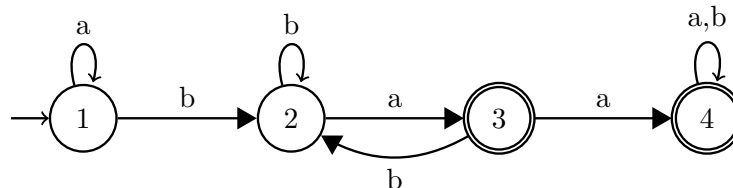
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 6 ☐ d 2 ☐ e 0 ☐ f 3 ☐ g 5

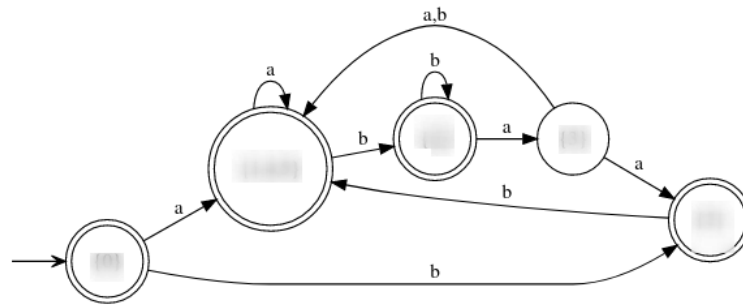
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

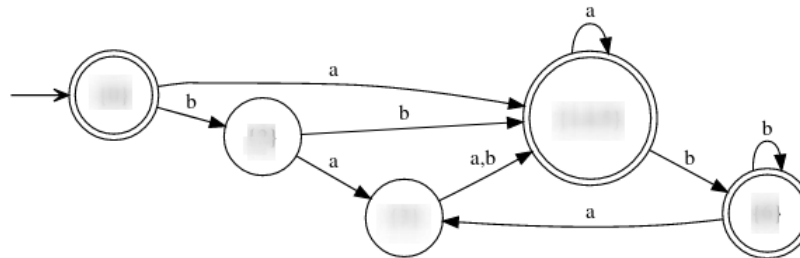
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



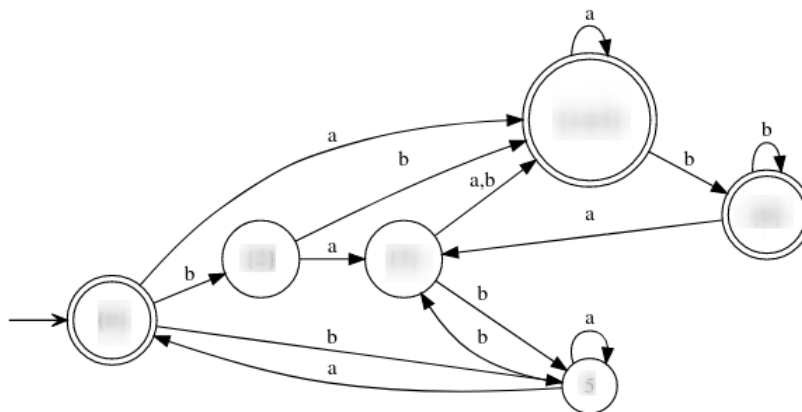
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

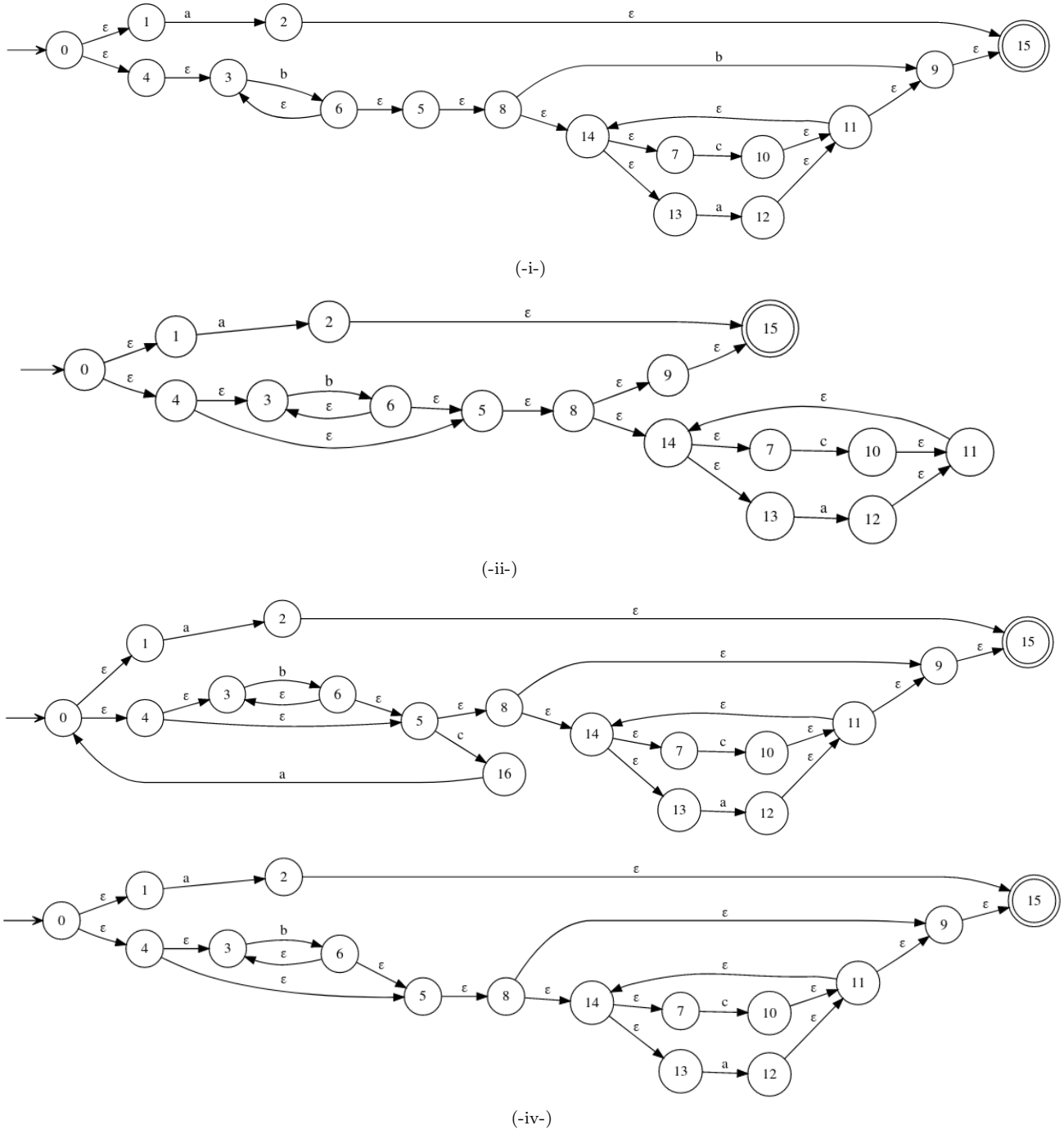


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

	b	c			f	g						m	n

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 6 :

a				e		g	h		j	k

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

	b	c		e		g		i	j

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d	e	f	g		i			l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

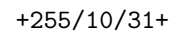
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

- ☐e Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐g Un mot peut être infini. ☐h Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une application.
☐m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐e A accepte le langage universel. ☐f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐g A possède un état puits
☐h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐d Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐g Σ est fermé par facteur.
☐h Σ est fermé par préfixe.
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐a Les états de A sont tous accessibles. ☐b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐c u est accepté par A . ☐d A a des états accepteurs. ☐e A est complet.
☐f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐b la Figure 3-iv-. ☐e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐c la Figure 3-i-. ☐d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐a la Figure 4-iv-. ☐b la Figure 4-ii-. ☐c la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

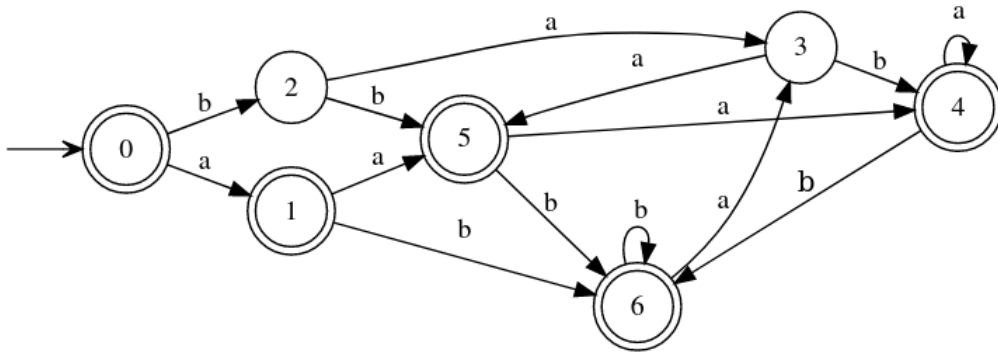
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

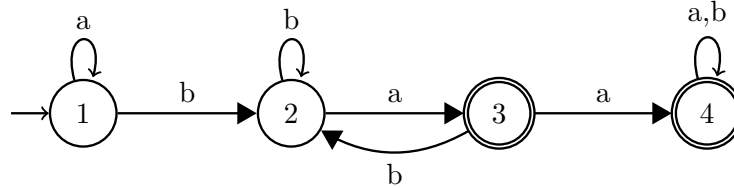
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 6 ☐ c 5 ☐ d 0 ☐ e 3 ☐ f 1 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

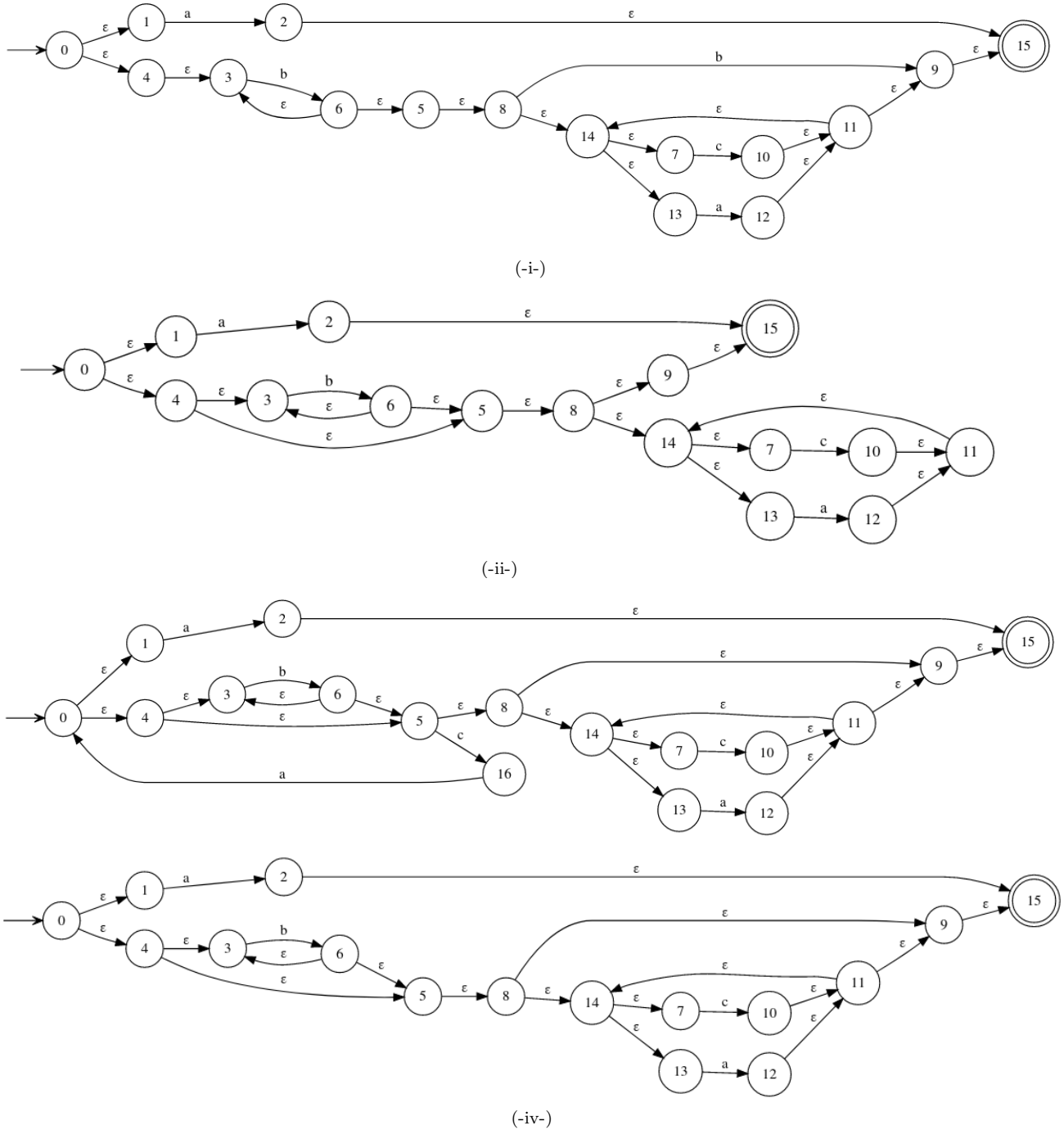
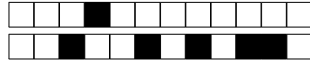


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e   h  j k

Question 3 : a b c d 

Question 4 :   c d e

Question 5 :   c  e  g h     m n

Question 6 :  b c  e f g h i

Question 7 : a   d   g h i j

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 :  b c d   g h i j k l 

Question 12 : a b c d  f g h

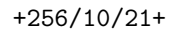
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ A possède un état puits
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ u est accepté par A .
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A a des états accepteurs.
☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état co-accessible.

☐ A a au moins un état non accessible.

☐ A a au moins un état non co-accessible.

☐ u n'est pas accepté par A .

☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ A a au moins un état accessible.

☐ A n'est pas complet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot peut être infini.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Un mot peut être vide.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot est une fonction.

☐ Un mot est une application.

☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iii-.

☐ la Figure 3-i-.

☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-iv-.

☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-i-.

☐ la Figure 4-ii-.

☐ la Figure 4-iv-.

☐ la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

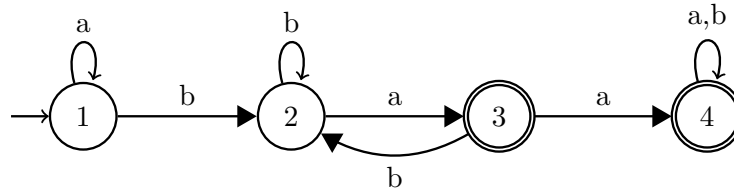
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 5 ☐ f 2 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

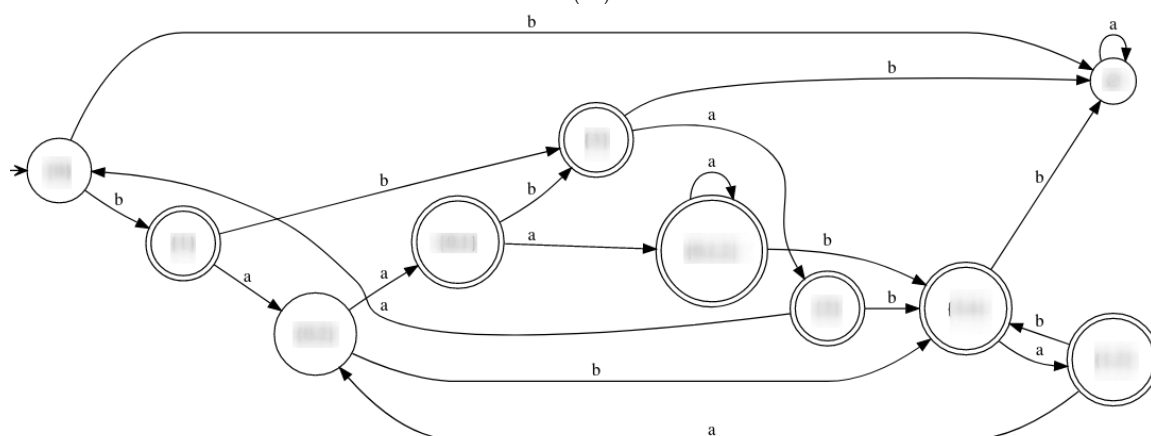


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

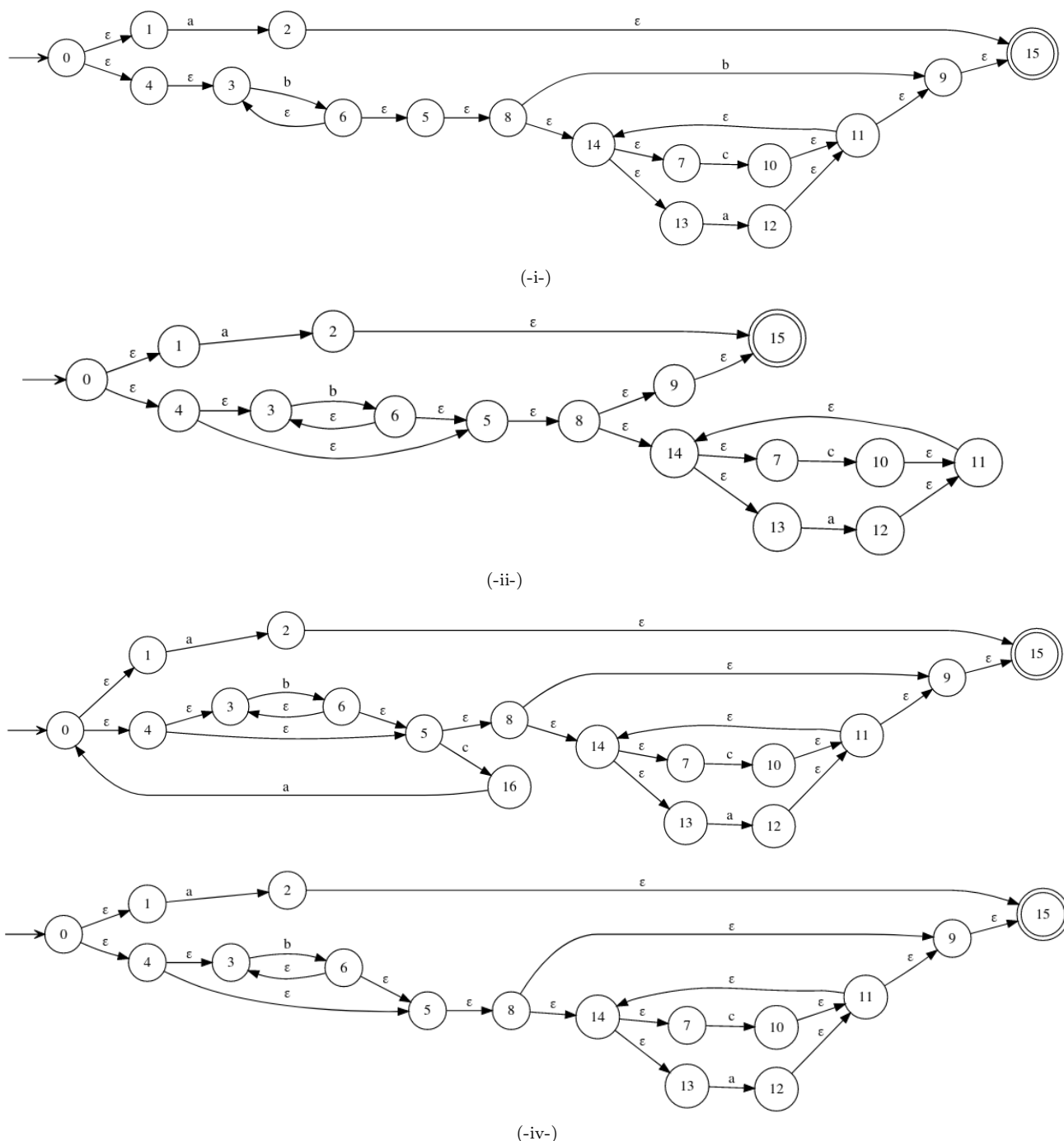
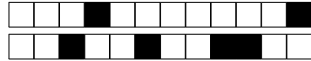


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d e f  h i

Question 3 :   c d e   h i j

Question 4 : a b c d e f g 

Question 5 : a b c d 

Question 6 :   c d e

Question 7 :  b c d  f    j k

Question 8 :  b c       k l m n

Question 9 :  b c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c   f   i j k l m

Question 12 : a b c  e f g h

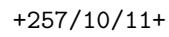
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ d A possède un état puits ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut être vide.
☐ c Un mot peut être infini. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot est une application.
☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet. ☐ A a des états accepteurs.
☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_4 = a + b$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$				

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a+b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

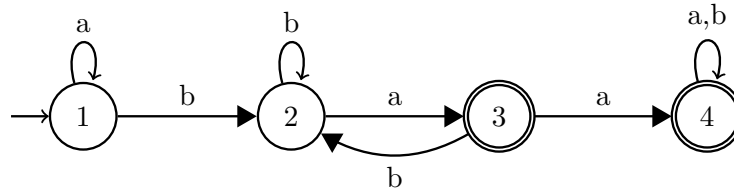
☐ a	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*(a+b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☐ c 3 ☒ 4 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 6

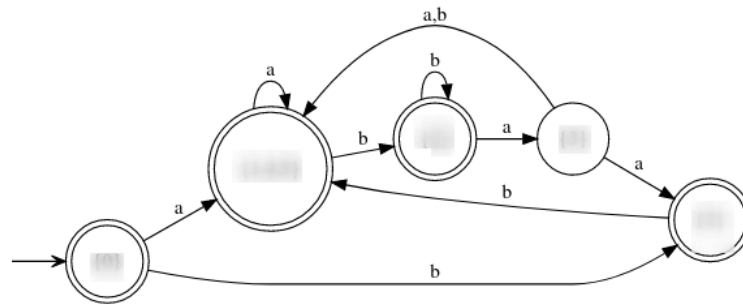
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

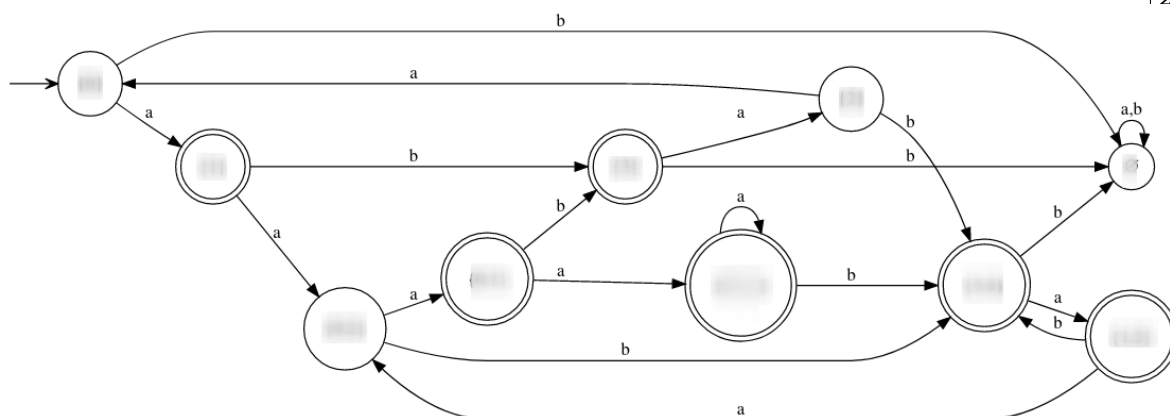


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

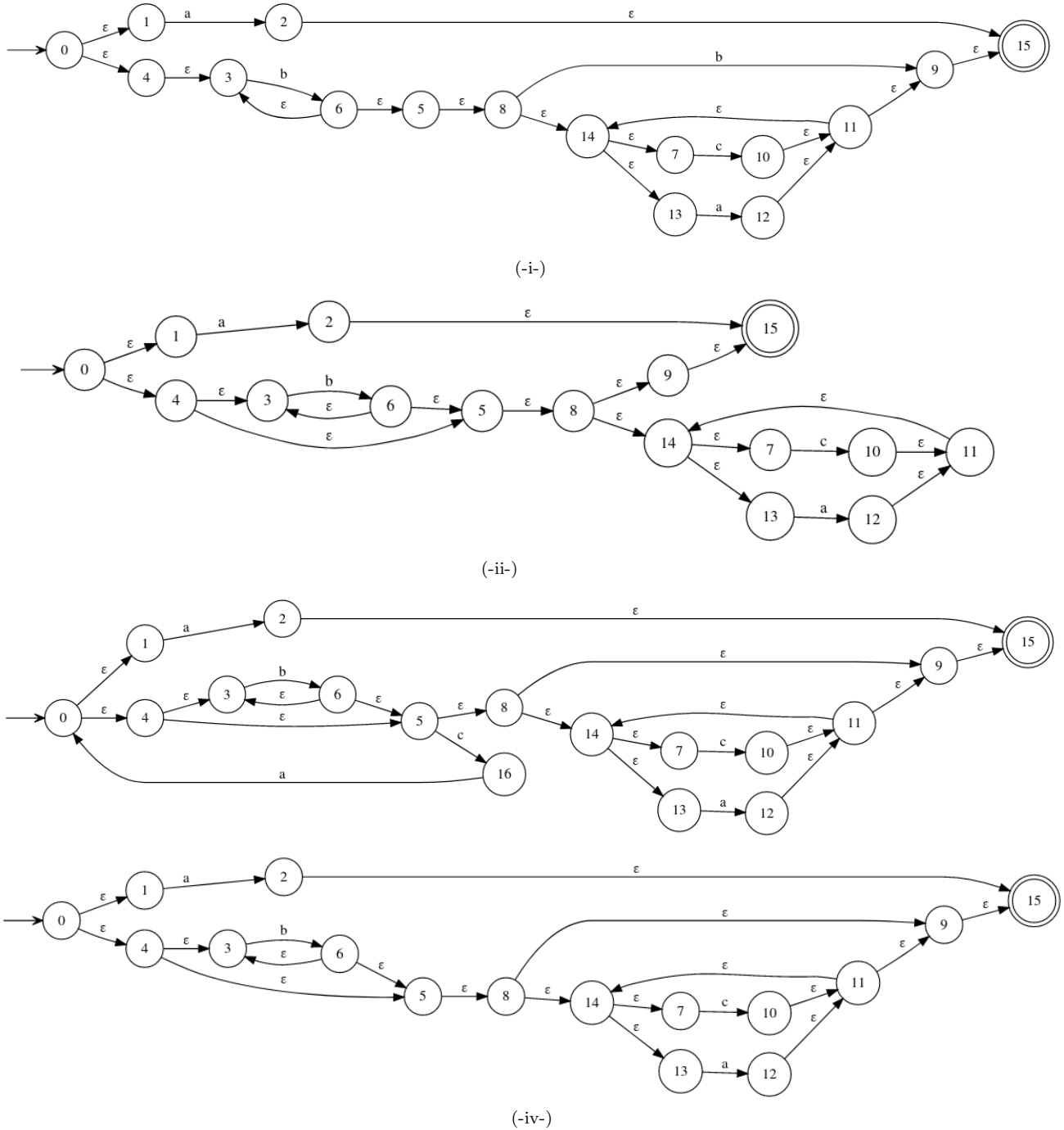
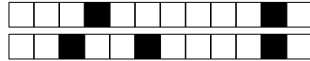


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e		g		i	j

Question 3 :

	b	c	d	e		g	h	i

Question 4 :

		c	d		f			i				m	n

Question 5 :

	b	c	d		f				j	k

Question 6 :

		c	d	e

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d	e	f	g	h	i	j			

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

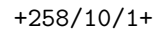
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ g A a au moins un état non accessible.
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ f Σ est fermé par préfixe. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ b Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.

- ☐ ☐ Un mot peut être infini. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une fonction.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ l Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ d u est accepté par A . ☐ e A est complet. ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☐ f A accepte le langage universel.
☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + b$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

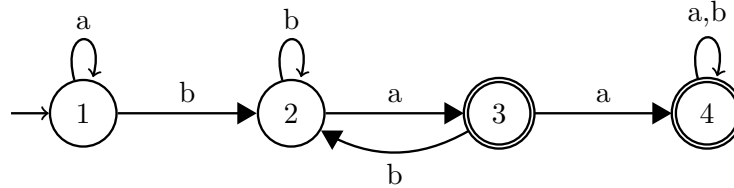
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

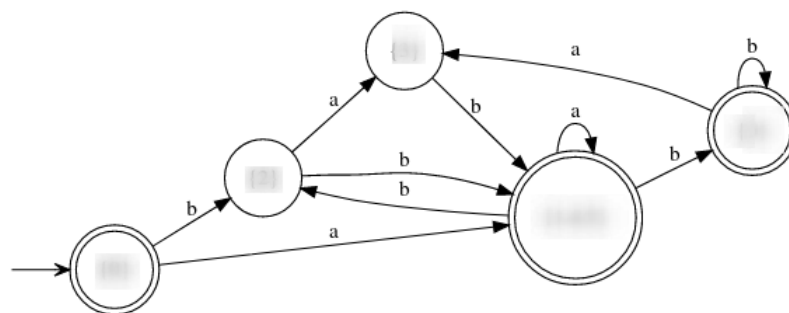
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☒ b 4 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 6 ☐ f 2 ☐ g 5

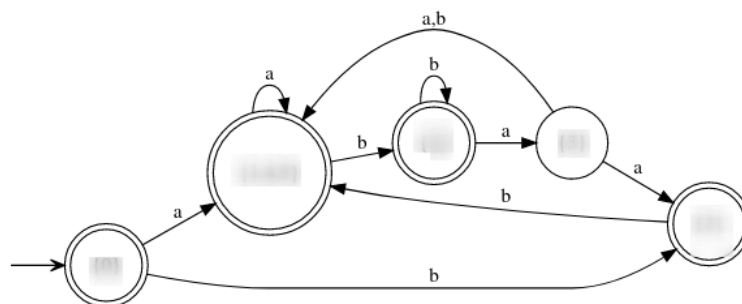
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

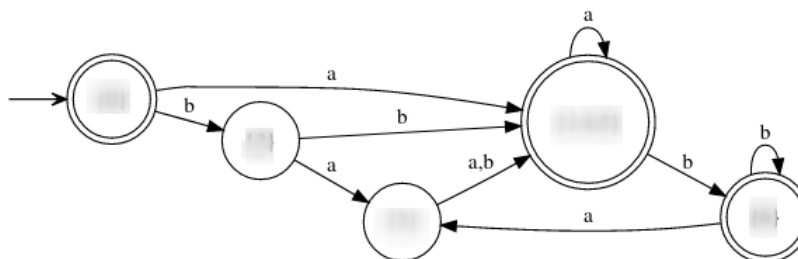
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



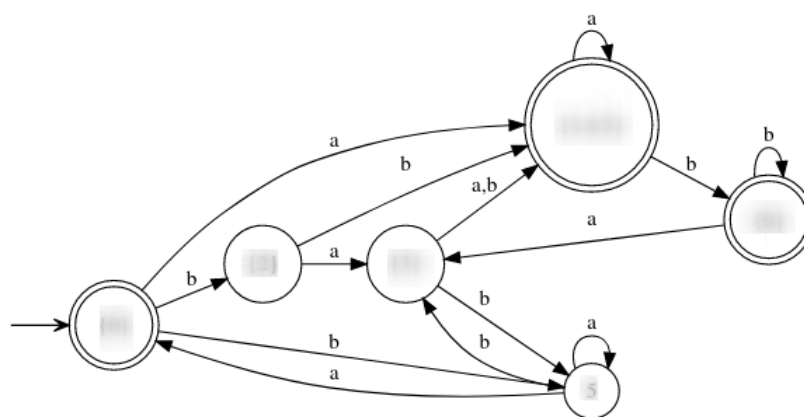
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a		c			f	g			j	k

Question 3 :

		c			f	g	h	i	j

Question 4 :

	b		d	e

Question 5 :

	b			e					j		l	m	n

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a	b	c	d	

Question 8 :

a	b		d	e	f		h	i

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b		d		f		h		j	k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

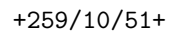
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☒ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b A possède un état puits

☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d A accepte le langage universel.

☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.

☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.

☒ Un mot est une application. ☒ Un mot peut être vide.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot est une fonction.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a. A n'a pas d'état accepteur.
 ☐ b. A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
 ☐ d. A a au moins un état non accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
 ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
 ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ i. A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j. Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ c. Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☐ d. Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
 ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ g. Σ est fermé par suffixe.
 ☐ h. Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i. Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j. Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a. Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ b. u est accepté par A .
- ☐ c. A a des états accepteurs.
 ☐ d. A est complet.
- ☐ e. Les états de A sont tous co-accessibles.
 ☐ f. $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g. Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a. la Figure 3-iv-.
 ☐ b. la Figure 3-ii-.
 ☐ e. la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ d. la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a. la Figure 4-iv-.
 ☐ b. la Figure 4-iii-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ d. la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

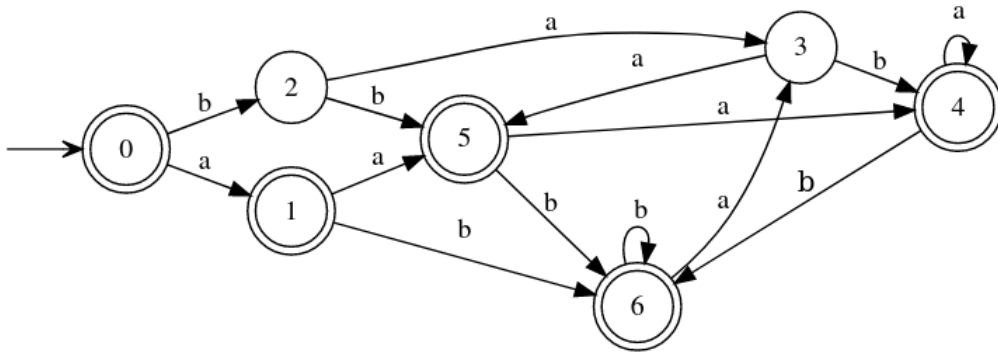
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

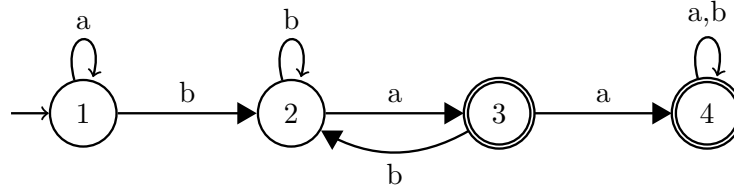
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 6 ☐ c 5 ☒ 4 ☐ e 1 ☐ f 0 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

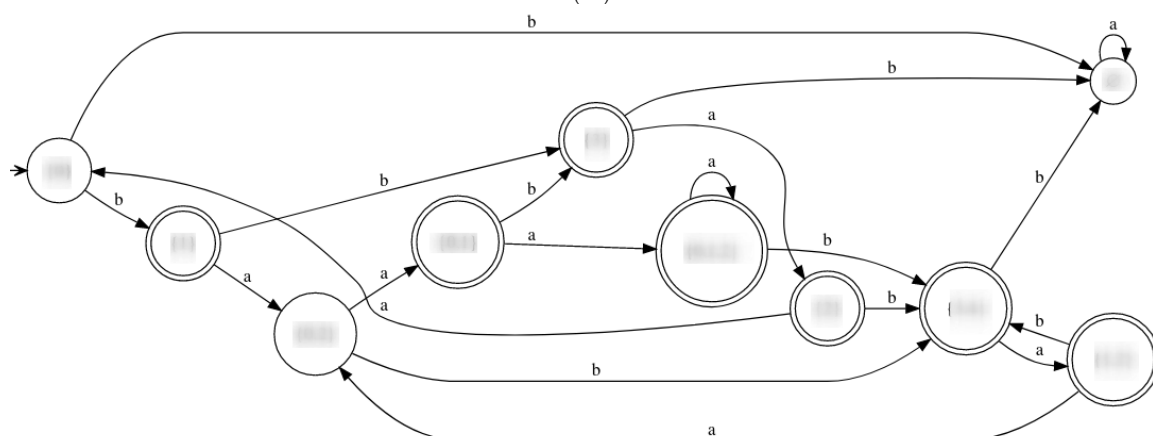


(-iv-)

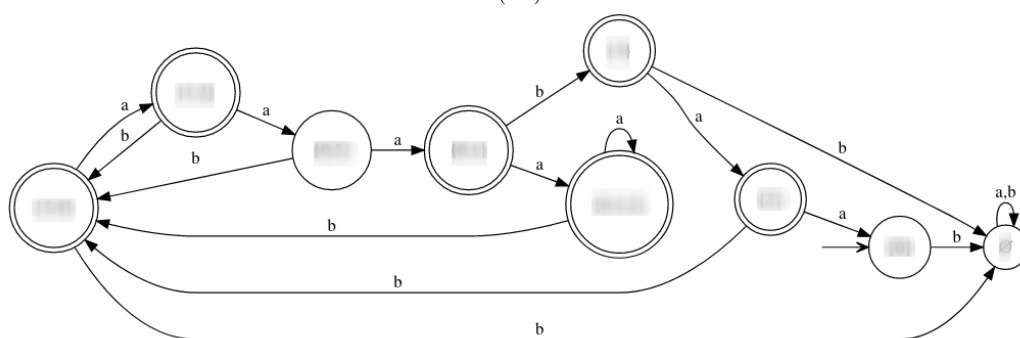
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



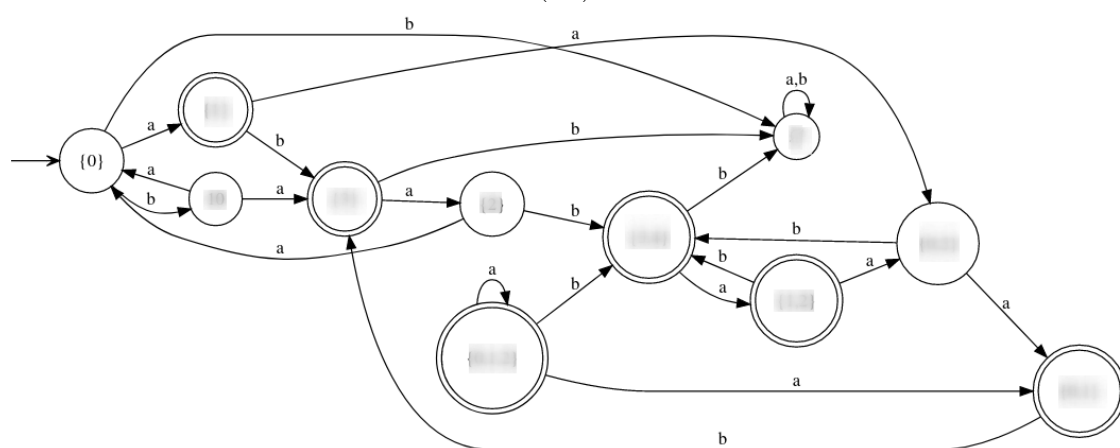
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b c d 

Question 4 :  b c d e f  h i

Question 5 : a  c d      k  m n

Question 6 : a b  d    i j k

Question 7 :   c d   g h i j

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a   d e  g  i j k l m

Question 12 : a b c d e  g h

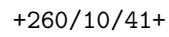
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features a series of horizontal dotted lines spaced evenly down the page, with a solid line at the very top. The paper is otherwise blank, with no text or other markings.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.

☐ f A est complet.

- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e Tous les états de A sont accepteurs. ☐ f A possède un état puits
☐ g A accepte le langage universel.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ A n'est pas complet. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
☐ f A a au moins un état co-accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☐ h A a au moins un état non accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

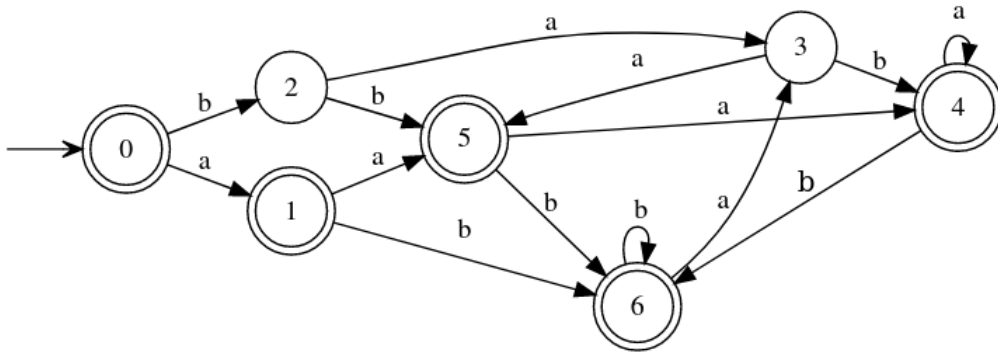
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

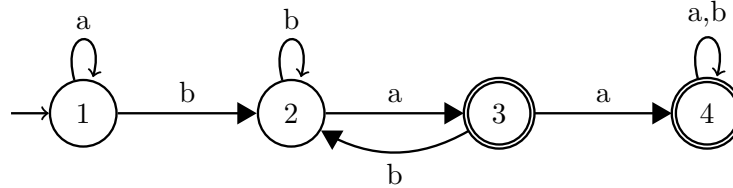
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

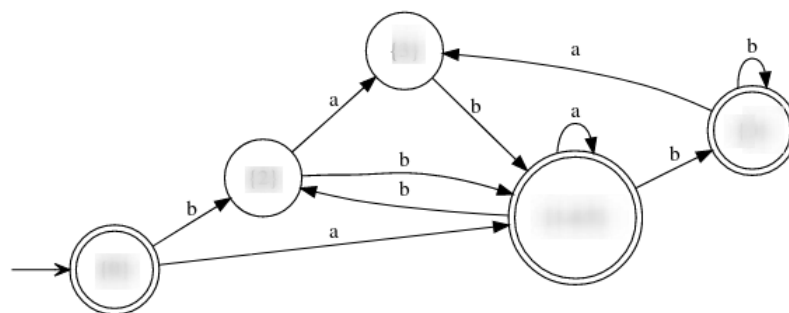
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 1 ☐ c 6 ☐ d 3 ☐ e 2 ☐ f 0 ☐ g 5

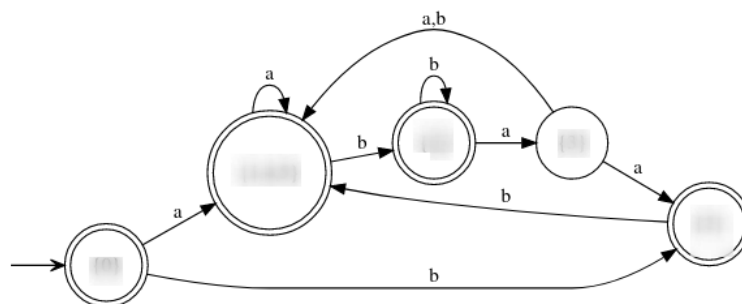
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

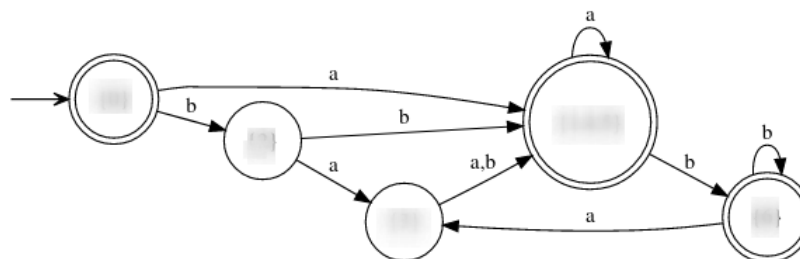
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



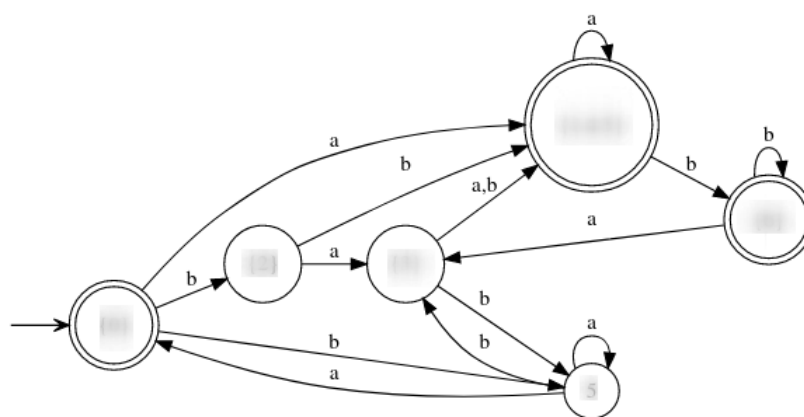
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

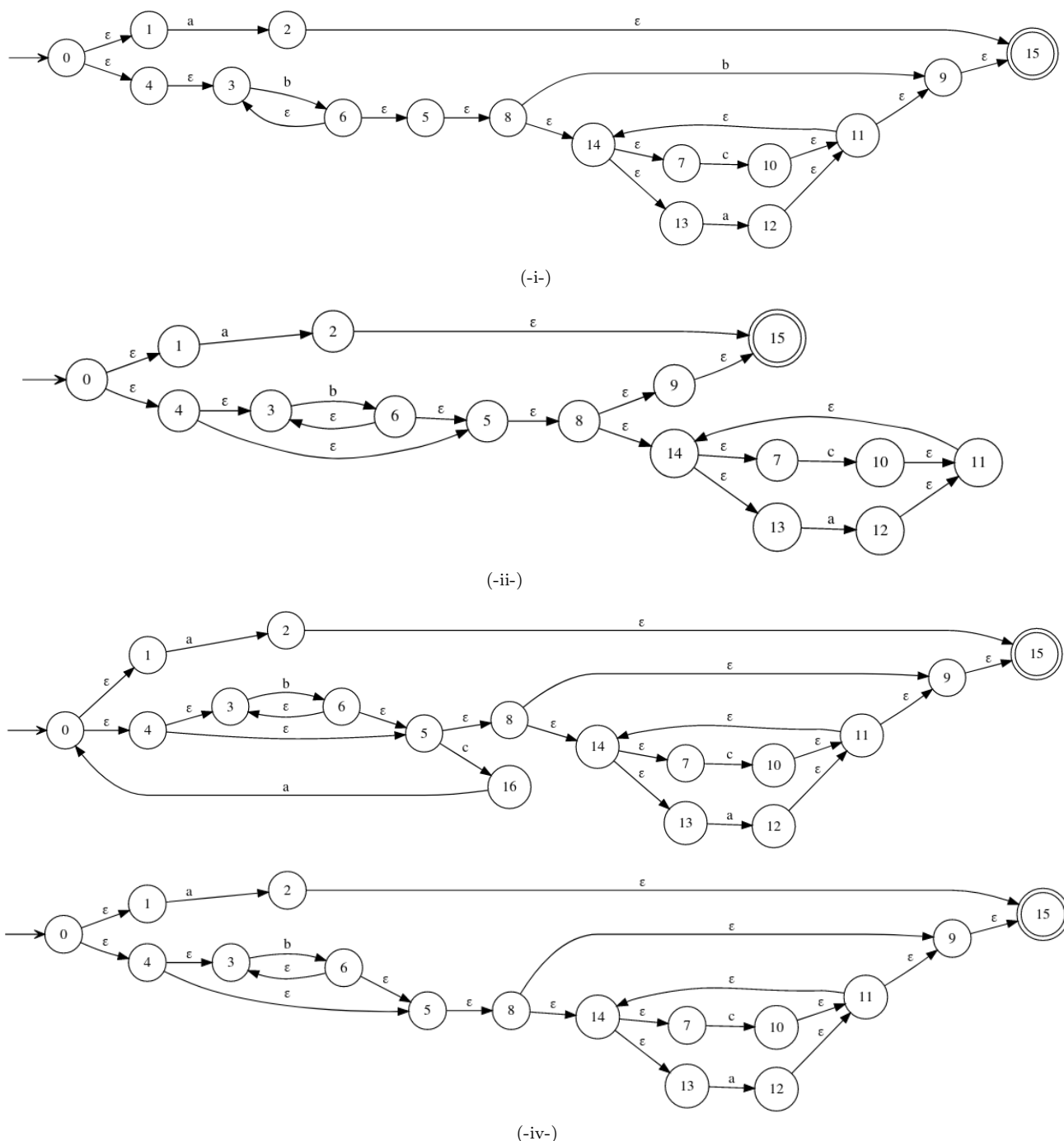


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c     j  l m n

Question 3 :  b   e f g  i j

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 :  b c  e f g h i

Question 7 :  b  d e

Question 8 :  b  d  f  h  j k

Question 9 : a b c  e

Question 10 :  b c d

Question 11 :  b  d  f g h i j  l m

Question 12 : a b  d e f g h

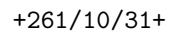
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot est une fonction.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut être vide.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot peut être infini.

☐ Un mot est une application.

☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A est complet.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ b Σ^* est fermé par facteur.
☒ c Σ^* est fermé par suffixe. ☒ d Σ^* est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ f Σ est fermé par suffixe. ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ b A a au moins un état accessible. ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☒ e u n'est pas accepté par A .
☐ f A a au moins un état non accessible. ☒ g $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ h A a au moins un état co-accessible. ☒ i A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☒ b $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs.
☒ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e A accepte le langage universel. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ l	$X_4 = a + b$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

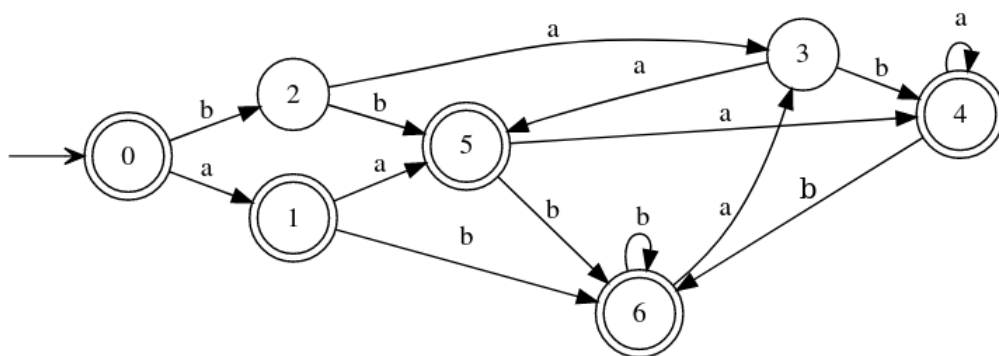
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

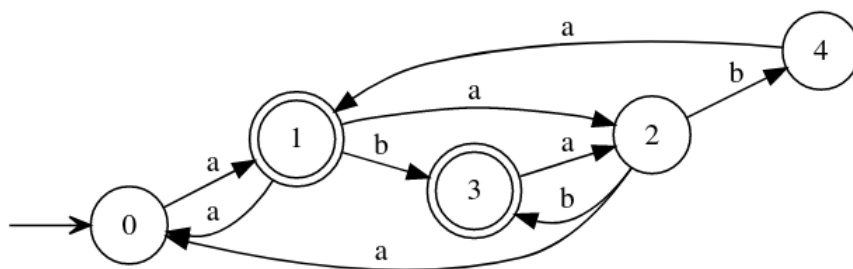
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

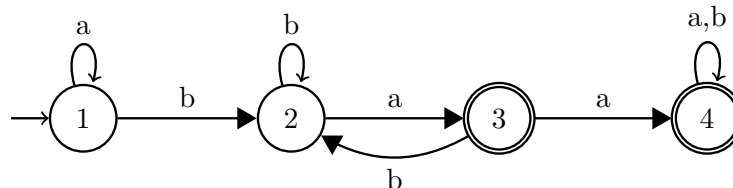
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 1 ☐ c 0 ☒ d 4 ☐ e 5 ☐ f 2 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

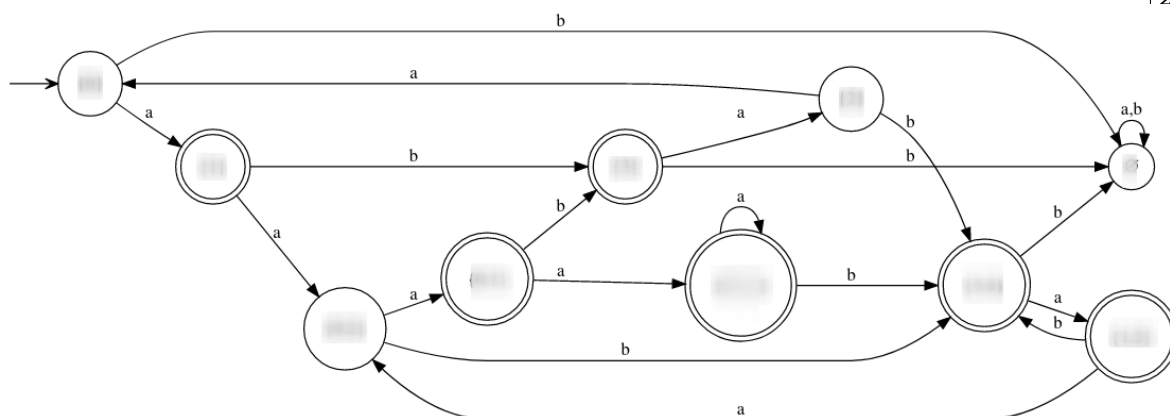


(-iii-)



(-iv-)

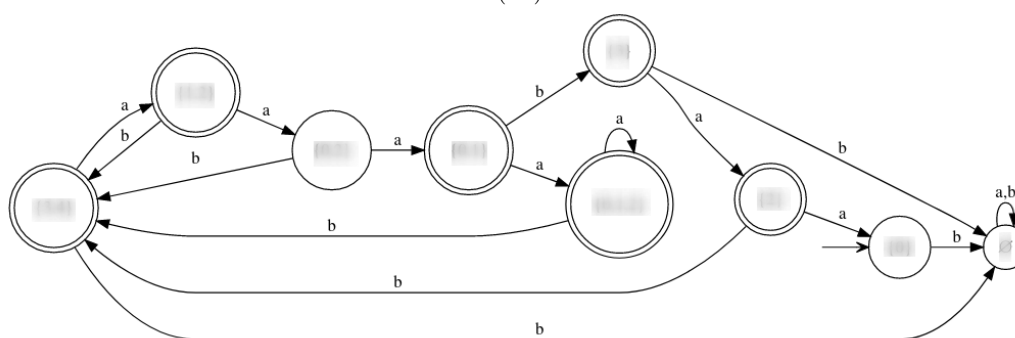
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



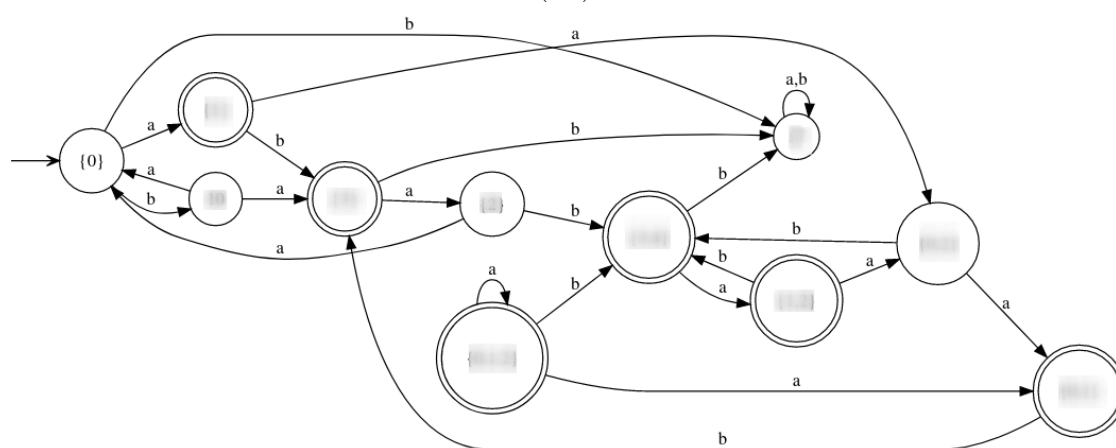
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

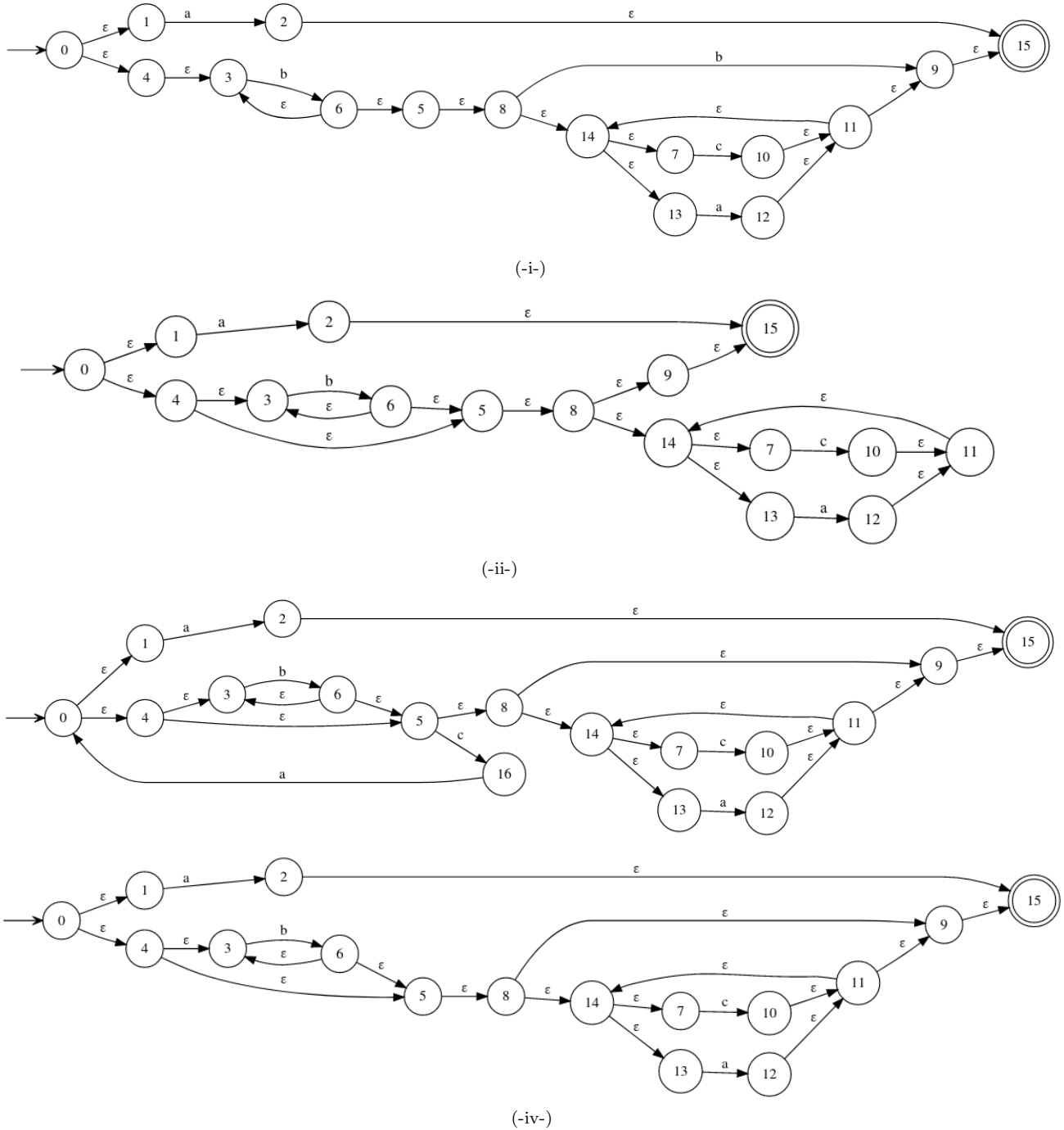
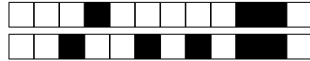


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 : a b c d 

Question 4 :  b c      j  l m n

Question 5 : a b c d e f g 

Question 6 : a   e f  h i j

Question 7 :   c d  f  h  j k

Question 8 : a  c  e f g h i

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a  c d e  g h i  k l 

Question 12 : a  c d e f g h

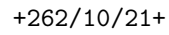
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A est complet. ☐ c Les états de A sont tous accessibles.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A a des états accepteurs. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits
☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ c A accepte le langage universel. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☒ b Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par suffixe.
☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ g Σ^* est fermé par facteur.
☒ h Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot est une application. ☐ d Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une fonction. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ P est forcément déterministe.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ f A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ h A a au moins un état non accessible. ☐ i A n'a pas d'état accepteur.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a+b)X_4$
☐	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐		☐		☐	$X_4 = a + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = (a+b)^*$	☐	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐	$X_4 = a + b$	☐	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐	$X_4 = (a+b)X_4$	☐	$X_4 = a^* + b^*$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐	$X_1 = a^+bX_2$	☐	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐	$X_1 = a^*b$
☐	Aucune des équations proposées.						
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐	Aucune des équations proposées.						
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐	$X_3 = (b^+a)^* (a(a+b)^* + \epsilon)$
☐	$X_3 = a(a+b)^*$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

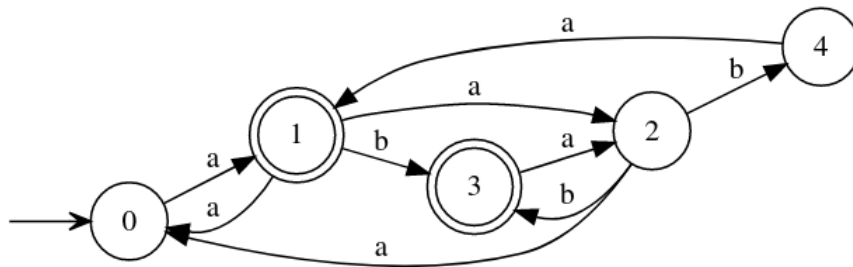
☐	celle trouvée pour X_1	☐	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

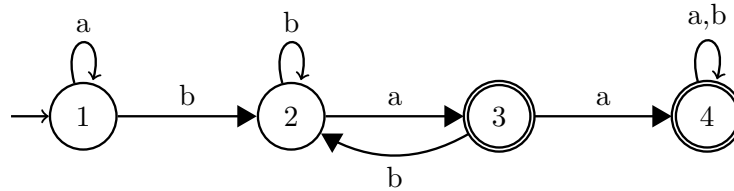
☐	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 6 ☐ e 5 ☒ f 4 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

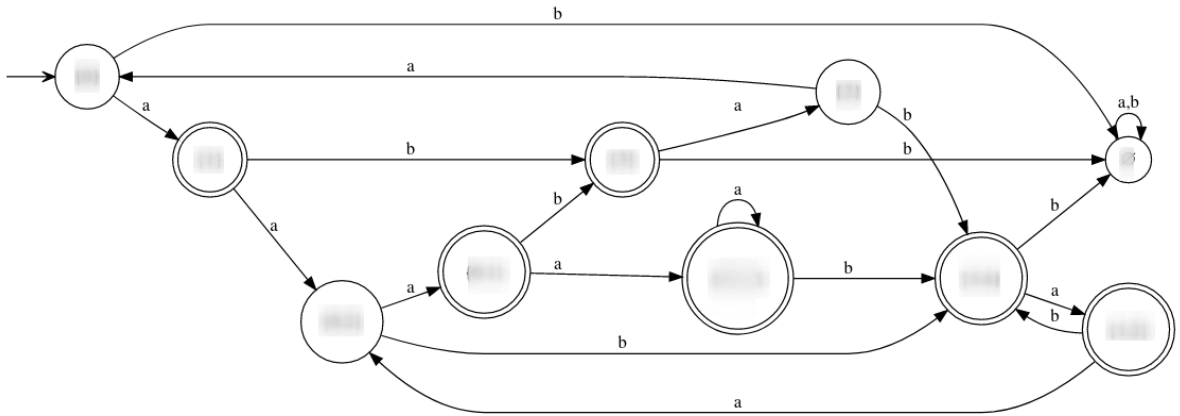


(-iii-)

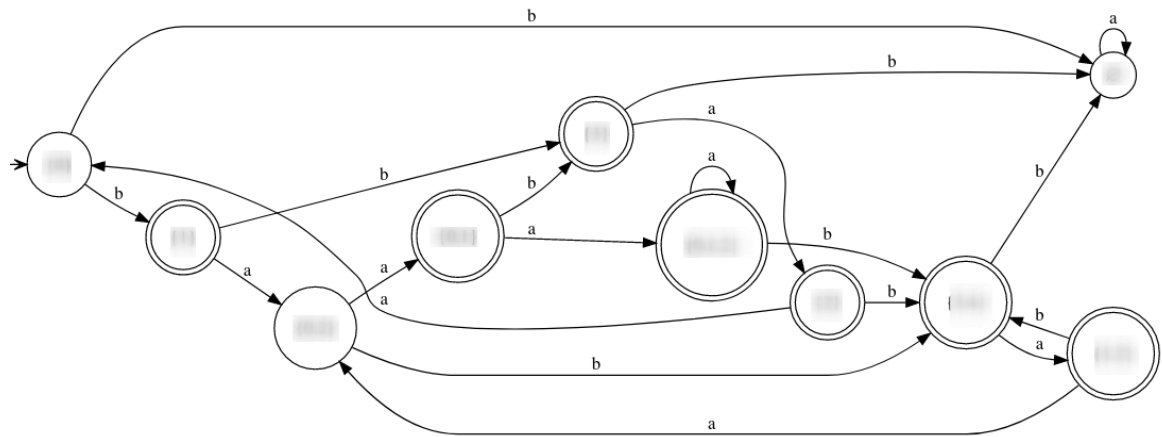


(-iv-)

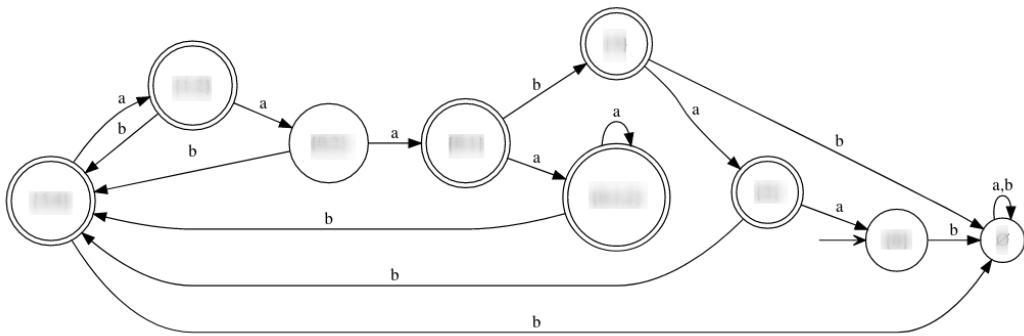
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



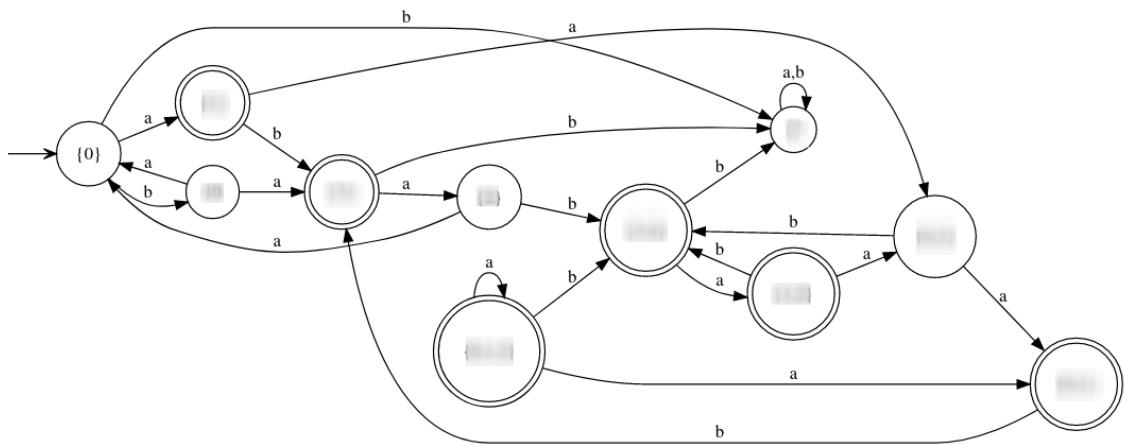
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-ii-.

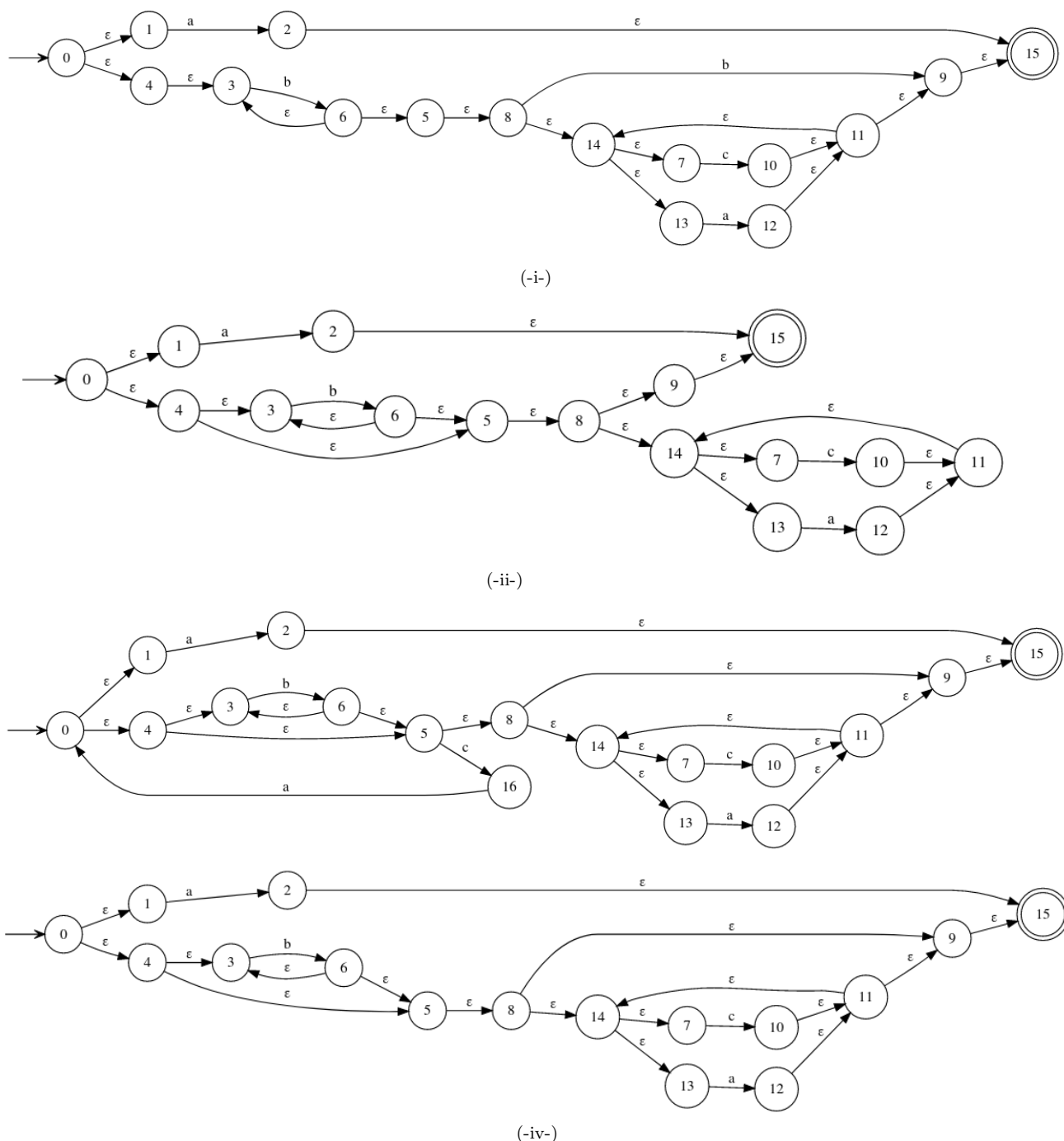
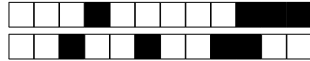


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 5 :

a		c	d	e				i	j

Question 6 :

a			d		f				j			m	n

Question 7 :

		c	d	e

Question 8 :

a					f		h	i	j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

		c	d	e	f	g			j	k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

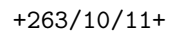
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b u est accepté par A . ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c A accepte le langage universel. ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ e A possède un état puits ☒ f $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ d Σ^* est fermé par préfixe.
☒ e Σ^* est fermé par facteur. ☐ f Σ est fermé par facteur. ☒ g Σ^* est fermé par suffixe.
☒ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ d Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ g Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ i Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état non accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ i A a au moins un état co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

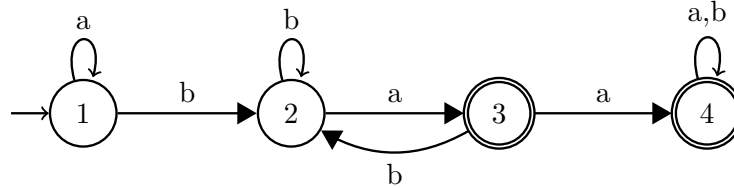
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 5 ☒ f 4 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



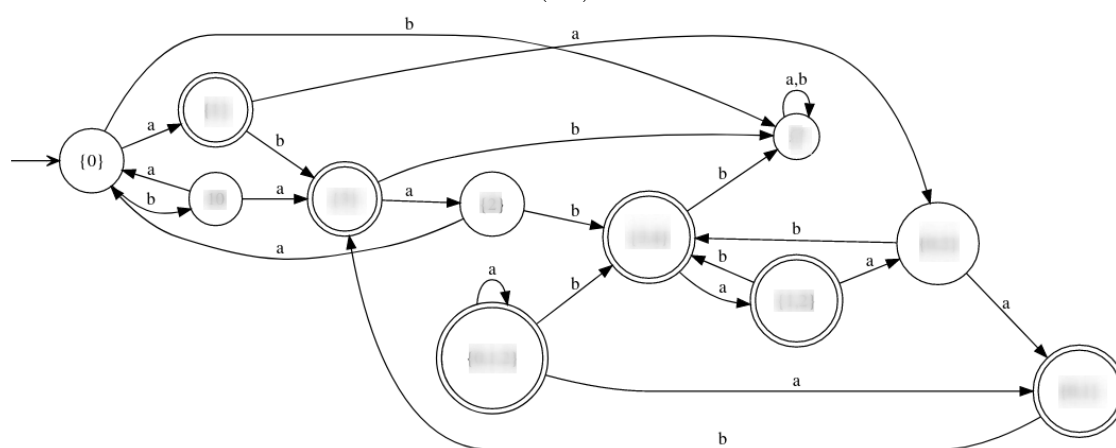
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

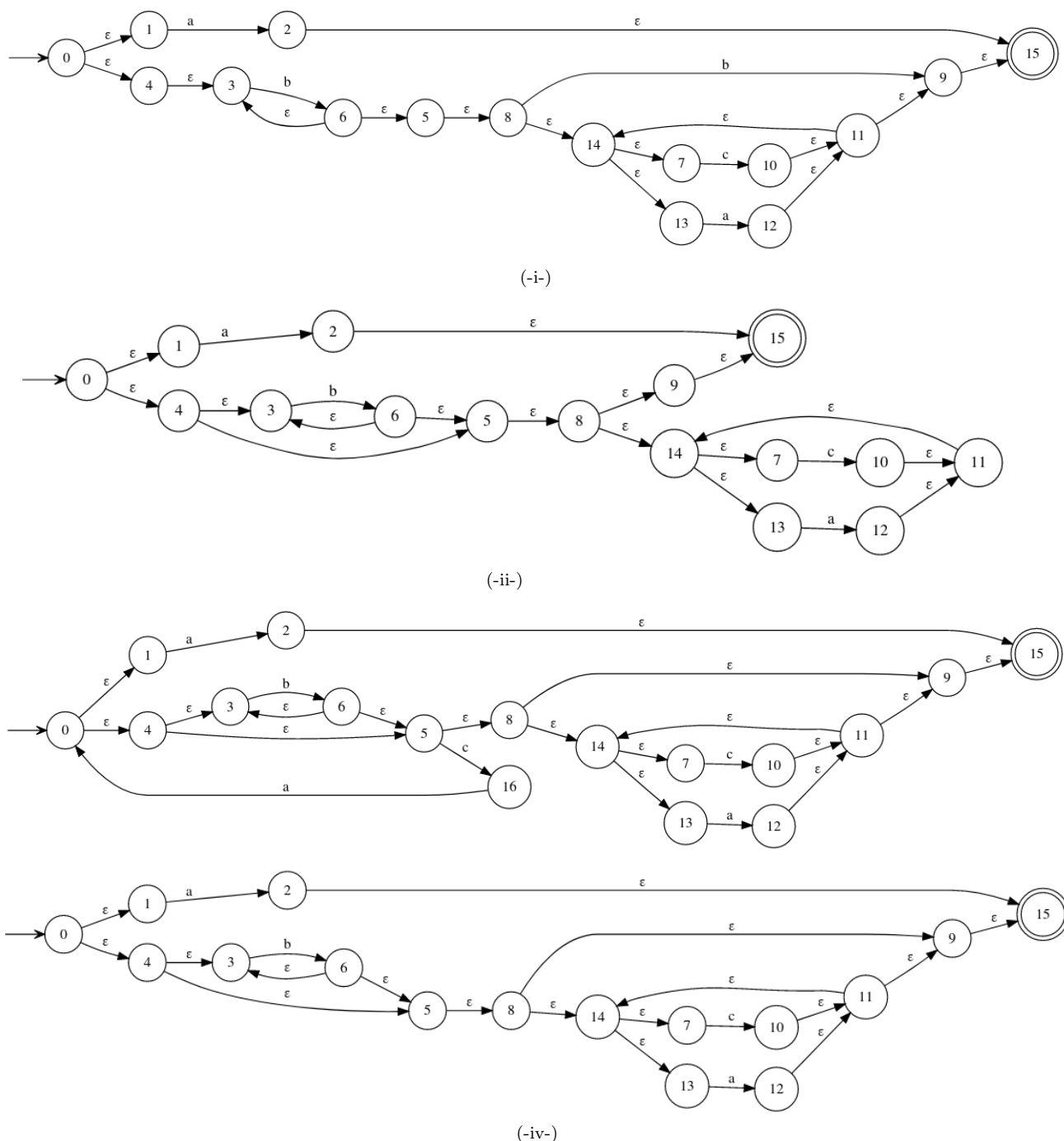
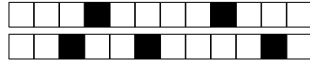


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 4 :

a	b	c			f			i	j

Question 5 :

	b		d	e

Question 6 :

			d			g		i		k		m	n

Question 7 :

a	b					g		i	j	k

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c	d		f	g	h	i		k	l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

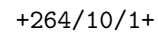
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ d Σ est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par préfixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A est complet.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'est pas complet. ☐ b A a au moins un état co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ g A a au moins un état non accessible. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ i A a au moins un état non co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A possède un état puits ☐ c A accepte le langage universel.
- ☒ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ b Un mot est une application.
- ☐ c Un mot peut être infini. ☒ d Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☒ g Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ h Un mot est une fonction.
- ☒ i Un mot peut être vide. ☒ j Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ l Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_4 = a + b$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

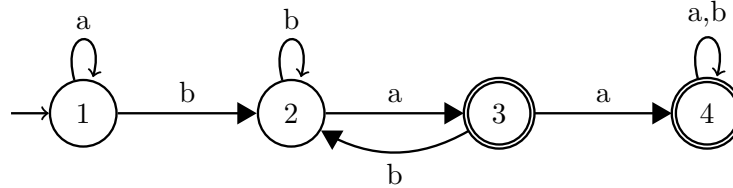
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
		☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 0 ☐ d 2 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

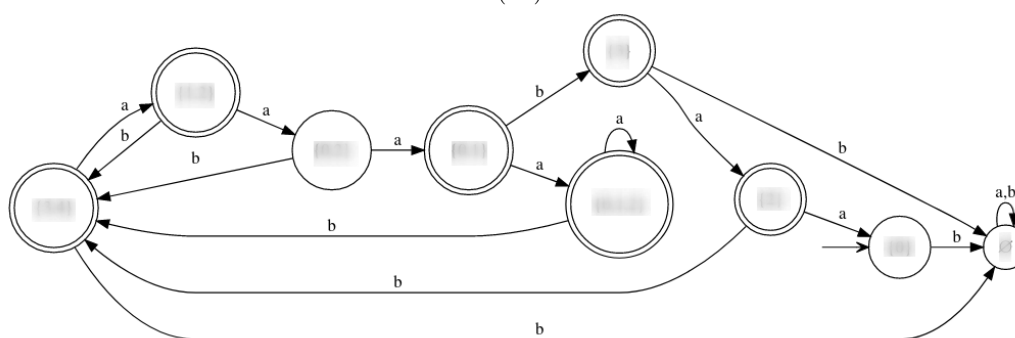
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e	f			i	j

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

	b					g	h	i	j	k

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 8 :

a		c		e					k		m	n

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e	f			i			l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

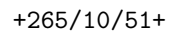
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A possède un état puits
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c A est complet.
- ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☒ b Σ^* est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par suffixe.
- ☒ d Σ^* est fermé par suffixe. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ f Σ est fermé par préfixe. ☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☒ h Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ c P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a+b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a+b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
☐ Aucune des équations proposées.			
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

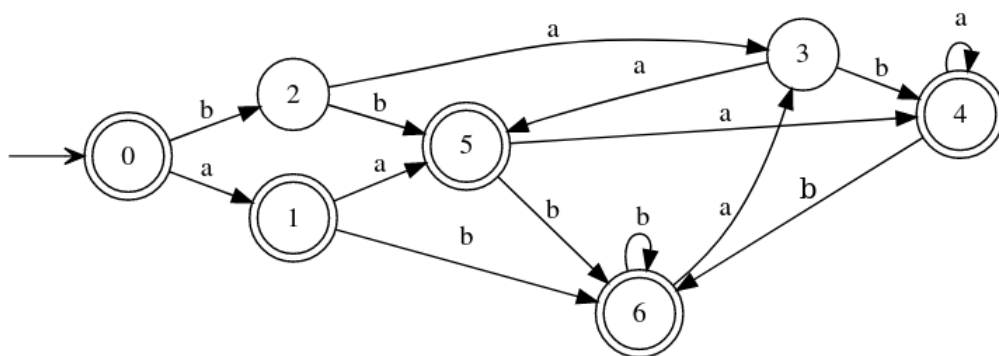
☐ $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = a(a+b)^*$
☐ $X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

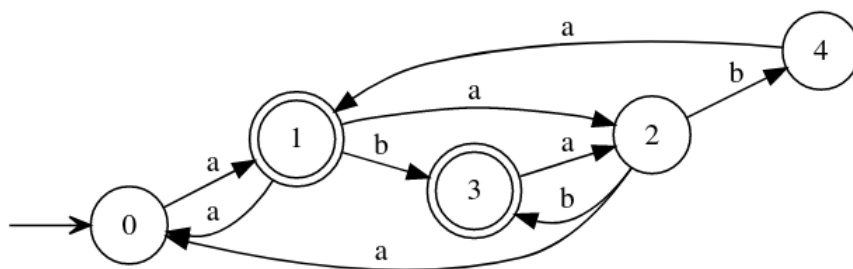
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

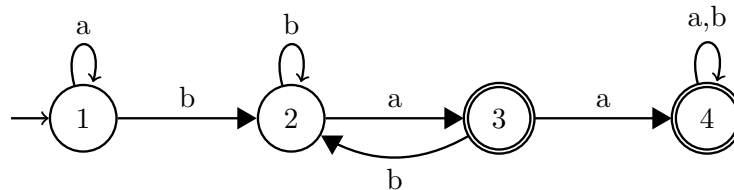
☐ $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

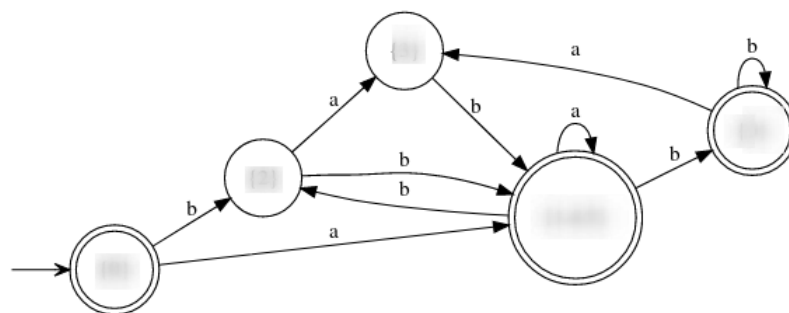
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 6 ☐ c 1 ☐ d 0 ☐ e 5 ☐ f 2 ☐ g 3

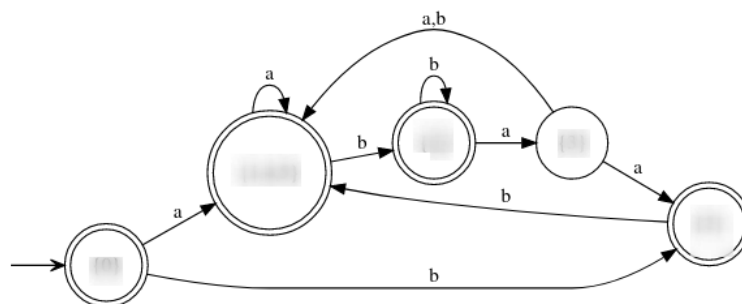
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

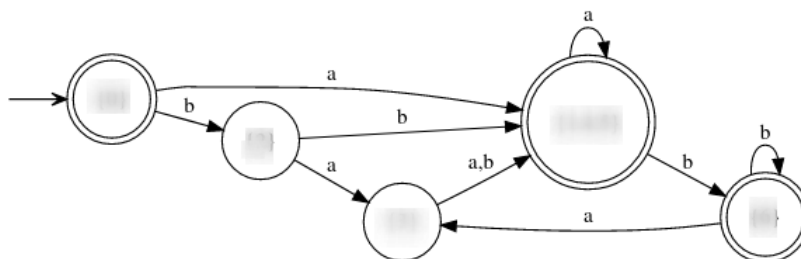
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



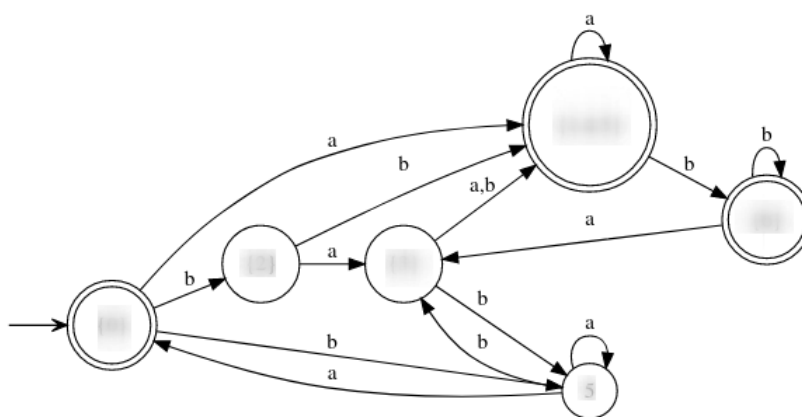
(-i-)



(-ii-)

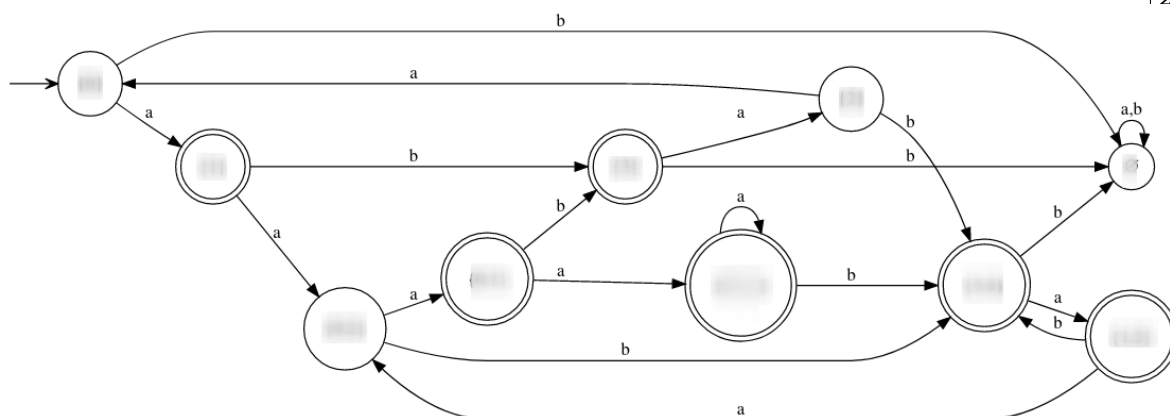


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



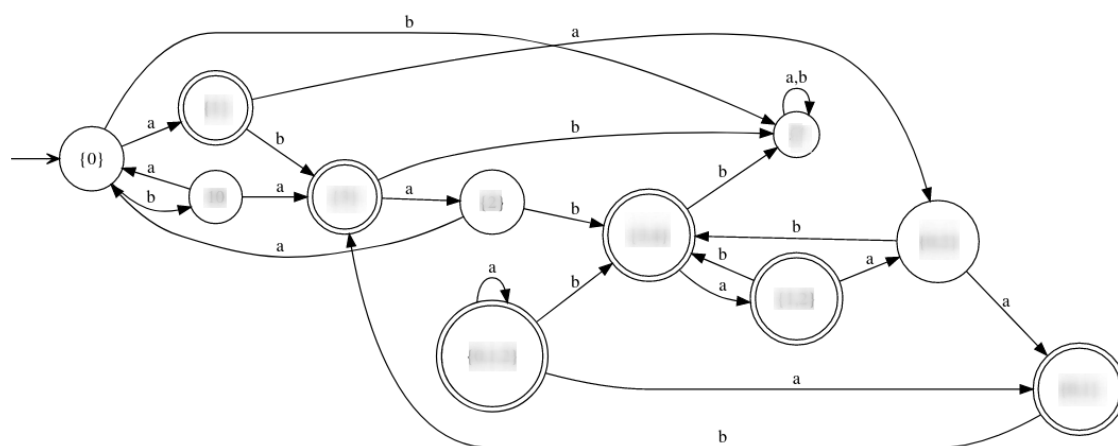
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d e f  h i

Question 3 :      f    j k l m n

Question 4 : a    e  g h  j k

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a  c  e f   i j

Question 8 :  b  d e

Question 9 :  b c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 :  b c d e  g h i j k  

Question 12 : a b c d e  g h

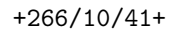
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Σ^* est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ^* est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ h Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b A a des états accepteurs.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ c P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ | δ | = $|Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d | δ | = $|Q| \times |\Sigma|$.
☐ e A possède un état puits ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot est une application. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ c A a au moins un état non co-accessible.
☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ A n'est pas complet. ☐ g A a au moins un état co-accessible.
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☐ m	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a+b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

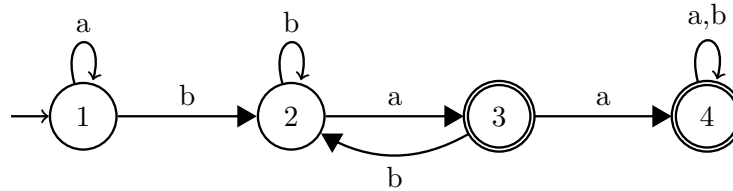
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 3 ☒ c 4 ☐ d 0 ☐ e 1 ☐ f 2 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

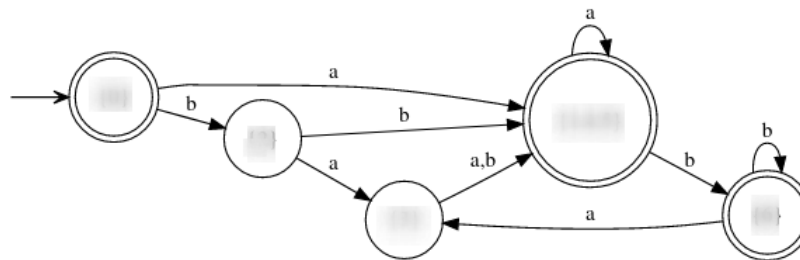
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



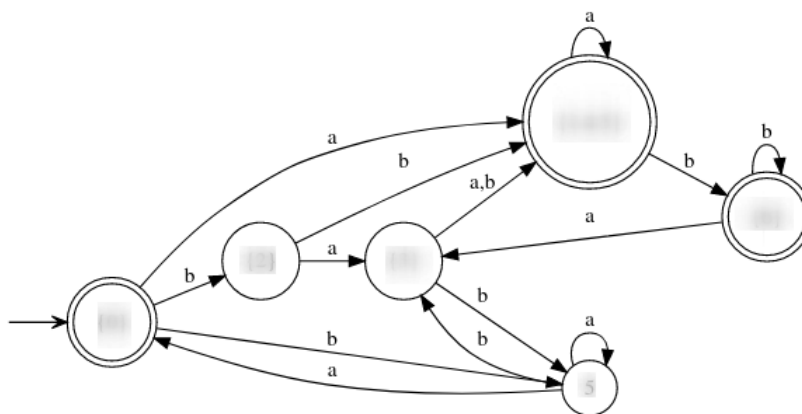
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

		c	d		f	g		i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

	b		d	e

Question 6 :

a		c	d	e	f		h	i

Question 7 :

					f		h			k	l	m	n

Question 8 :

		c	d			g	h		j	k

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c		e		g	h	i	j			m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

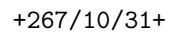
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ désigne l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non co-accessible.

☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.

☐ A n'est pas complet. ☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A possède un état puits

☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
 ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par préfixe.
 ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
 ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A est complet.
 ☐ u est accepté par A .
 ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ A a des états accepteurs.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-ii-.
 ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-i-.
 ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-ii-.
 ☐ la Figure 4-iii-.
 ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_2$
		☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

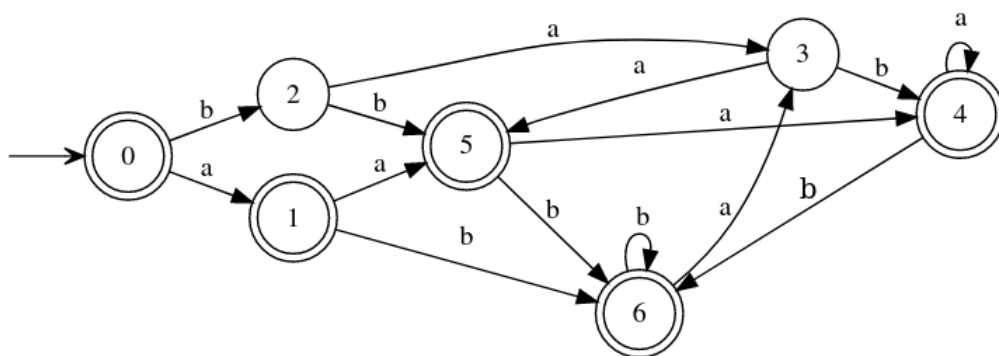
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

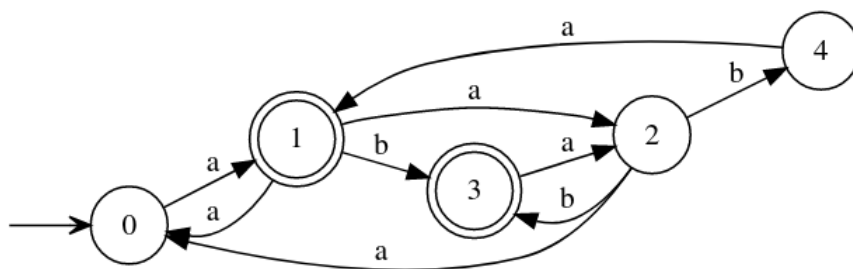
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

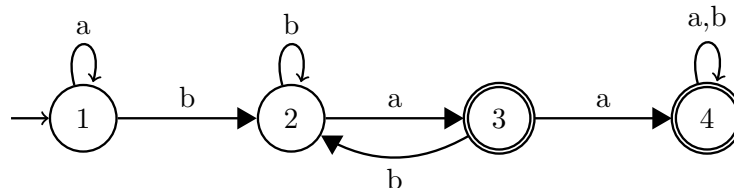
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 1 ☐ c 3 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

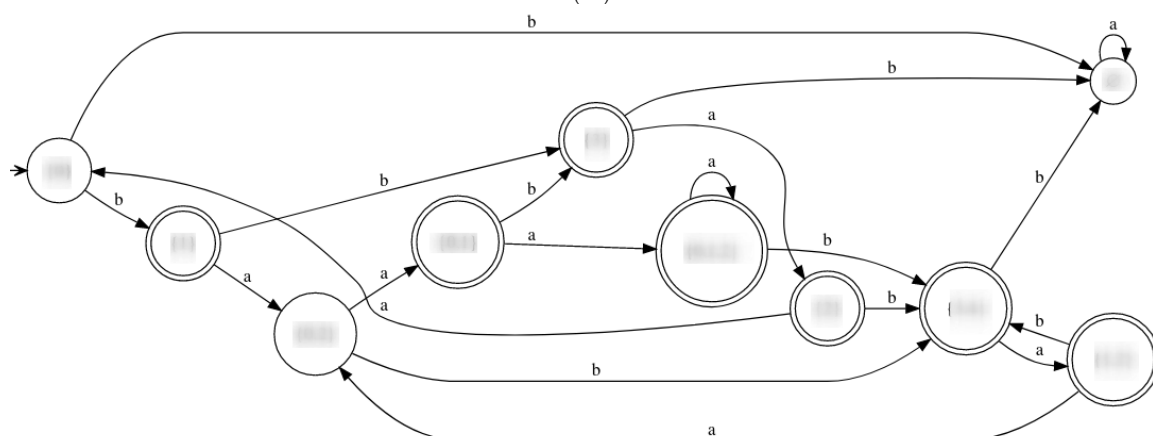


(-iv-)

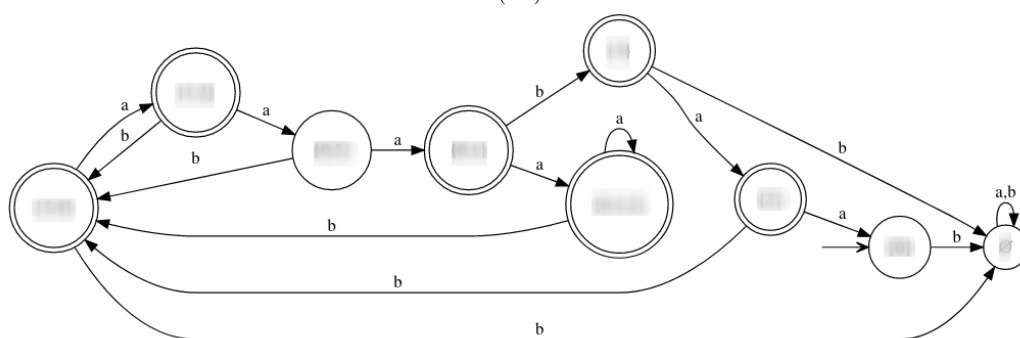
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



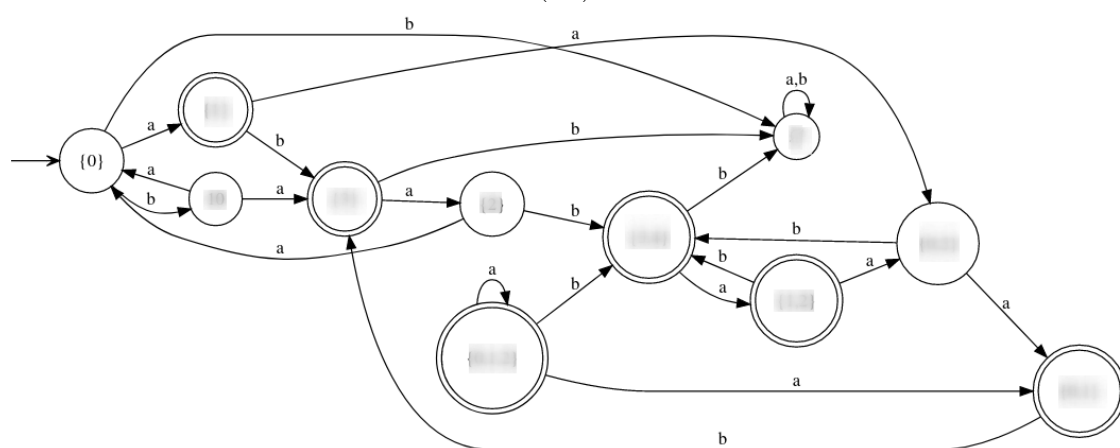
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

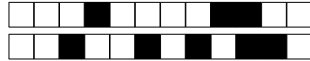


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 :  b c   f   i j k

Question 4 : a b c d  f  h i

Question 5 :   c  e     k l m n

Question 6 : a  c   f g  i j

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 : a b c d 

Question 9 : a  c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d   g h i j  l 

Question 12 : a  c d e f g h

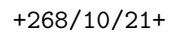
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.	☐ Un mot est une application.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction.	☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ est fermé par suffixe.	☐ Σ^* est fermé par suffixe.	☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par préfixe.	☐ Σ est fermé par préfixe.	☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.		
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.		
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e u est accepté par A .
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A possède un état puits
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f A accepte le langage universel.
☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état co-accessible. ☒ b A n'est pas complet.
☒ c Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ d $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ e A n'a pas d'état accepteur. ☒ f A a au moins un état accessible.
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☐ h A a au moins un état non accessible.
☒ i u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$
☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

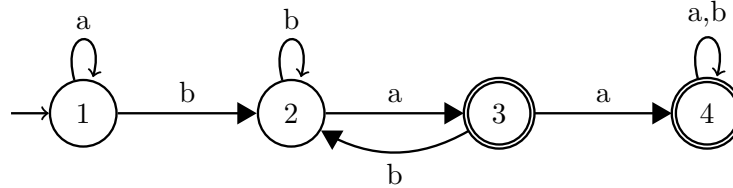
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☒ b 4 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 3 ☐ f 0 ☐ g 2

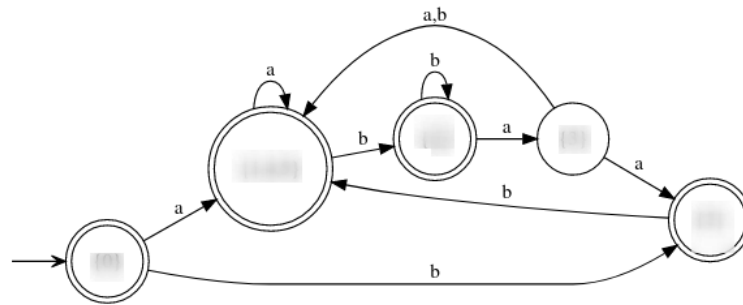
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

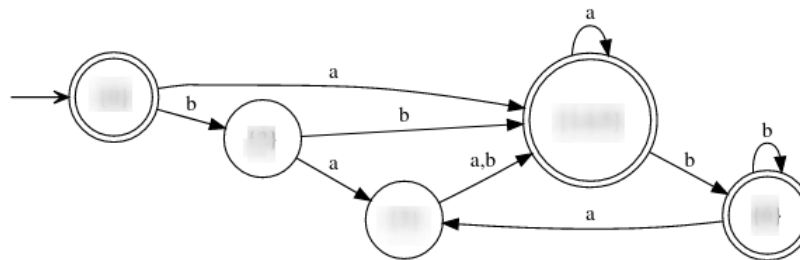
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



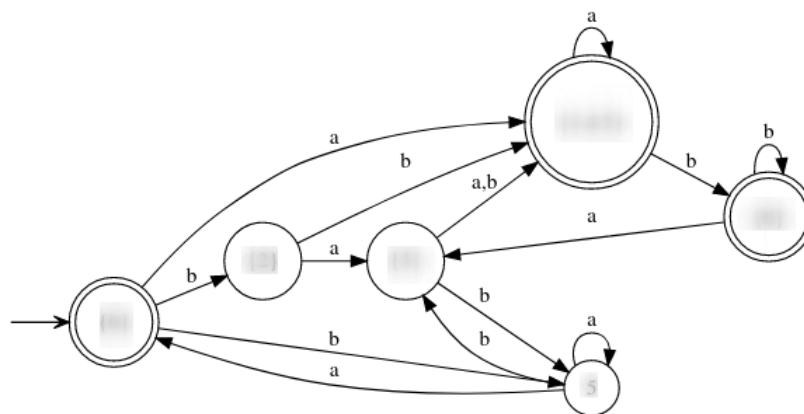
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

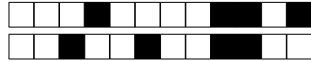


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ k l m n

Question 3 : ☐ b ☐ d e

Question 4 : a ☐ c ☐ e ☐ ☐ h i j

Question 5 : a b c d e f g ☐

Question 6 : a b c ☐ e f ☐ h i

Question 7 : a b c d ☐

Question 8 : a ☐ ☐ ☐ e ☐ g h ☐ j k

Question 9 : a b ☐ d e

Question 10 : a b ☐ d

Question 11 : ☐ ☐ c ☐ e f g ☐ i j k l m

Question 12 : ☐ b c d e f g h

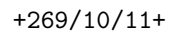
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : ☐ b c d e f

Question 15 : a b ☐ d e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : a b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
☐ c A n'est pas complet. ☐ d $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ e Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ f A a au moins un état non accessible. ☐ g u n'est pas accepté par A .
☐ h A a au moins un état co-accessible. ☐ i A a au moins un état accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ b Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ f Un mot peut être vide.
☐ g Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ h Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot est une application.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c A accepte le langage universel.
☐ d L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.

☐ A a des états accepteurs.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_1 = aX_1 + b$
☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = (a + b)^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

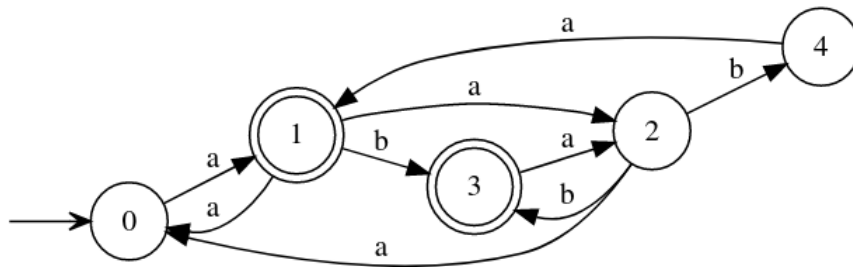
☐ celle trouvée pour X_1	☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

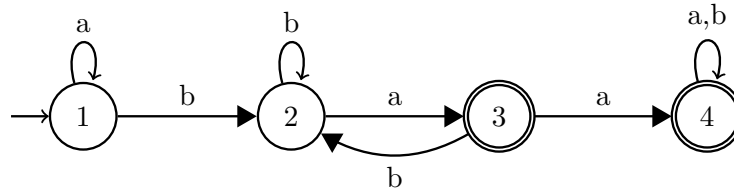
☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 2 ☐ c 1 ☐ d 3 ☐ e 5 ☒ f 4 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

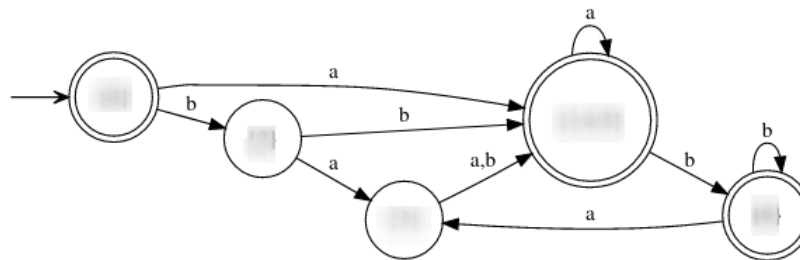
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



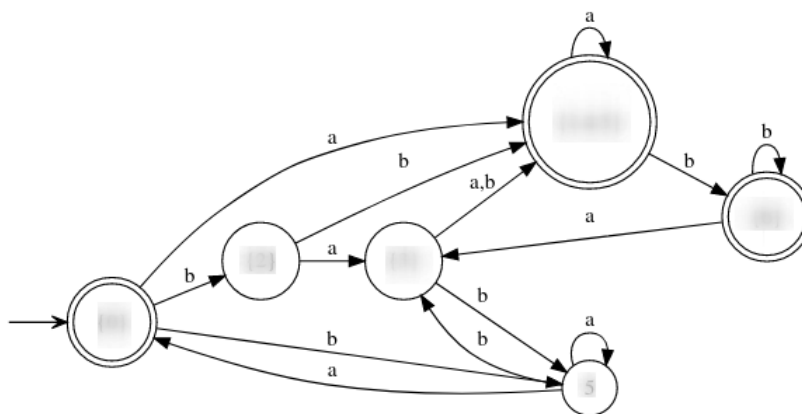
(-i-)



(-ii-)

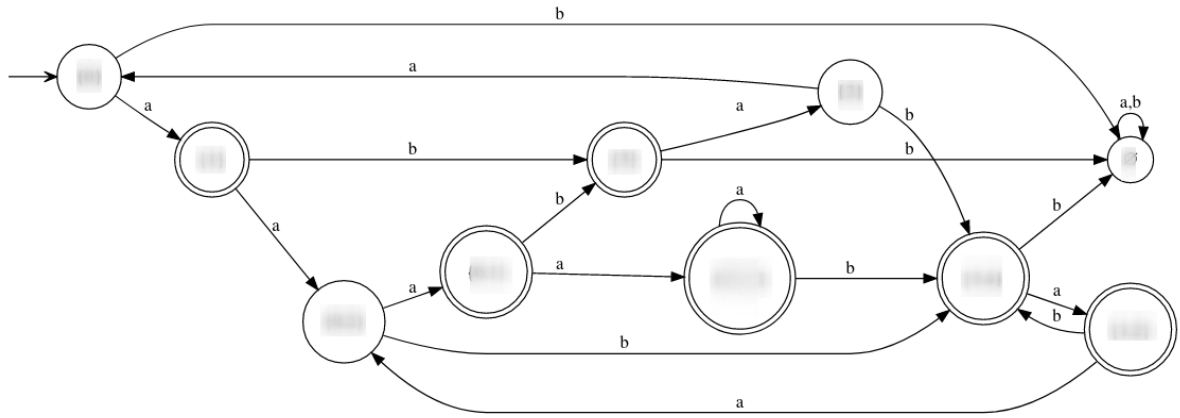


(-iii-)

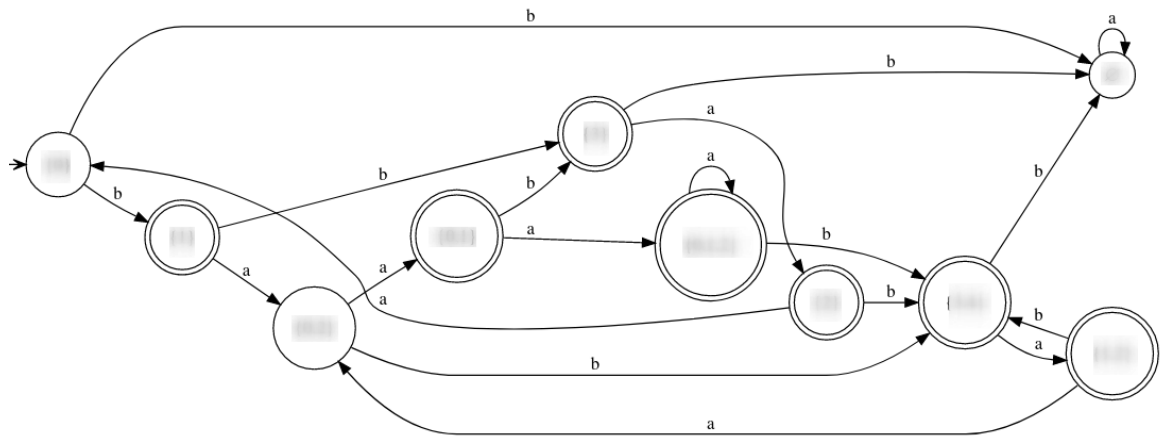


(-iv-)

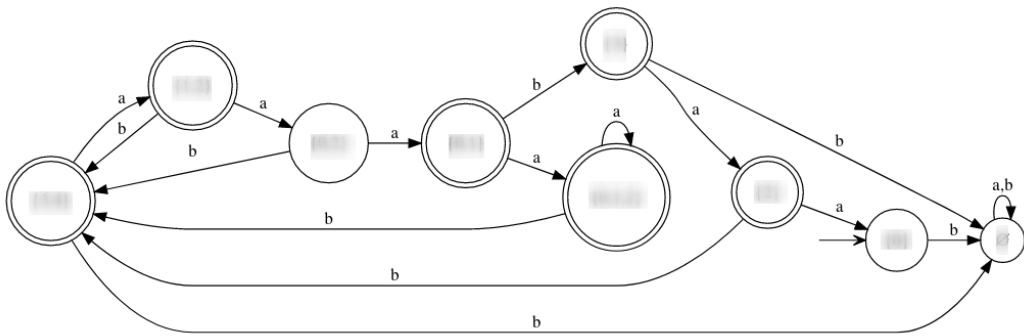
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



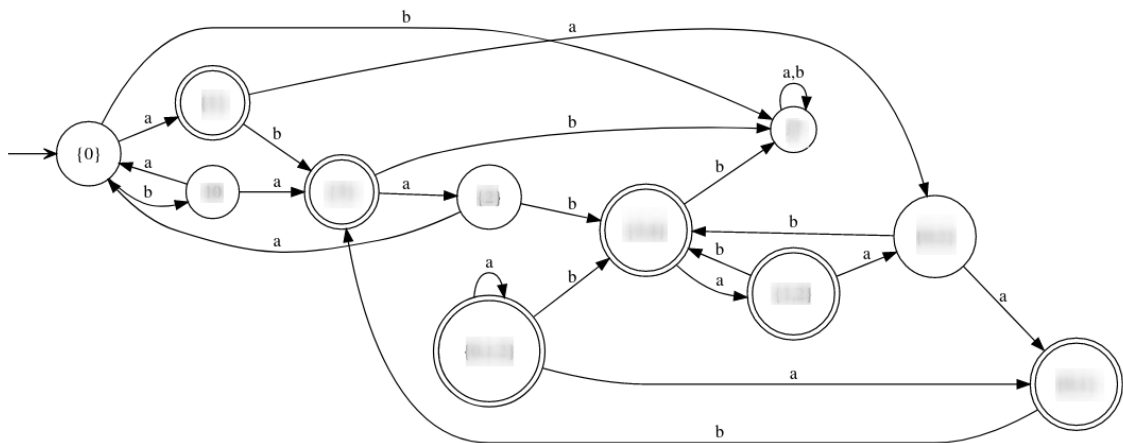
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

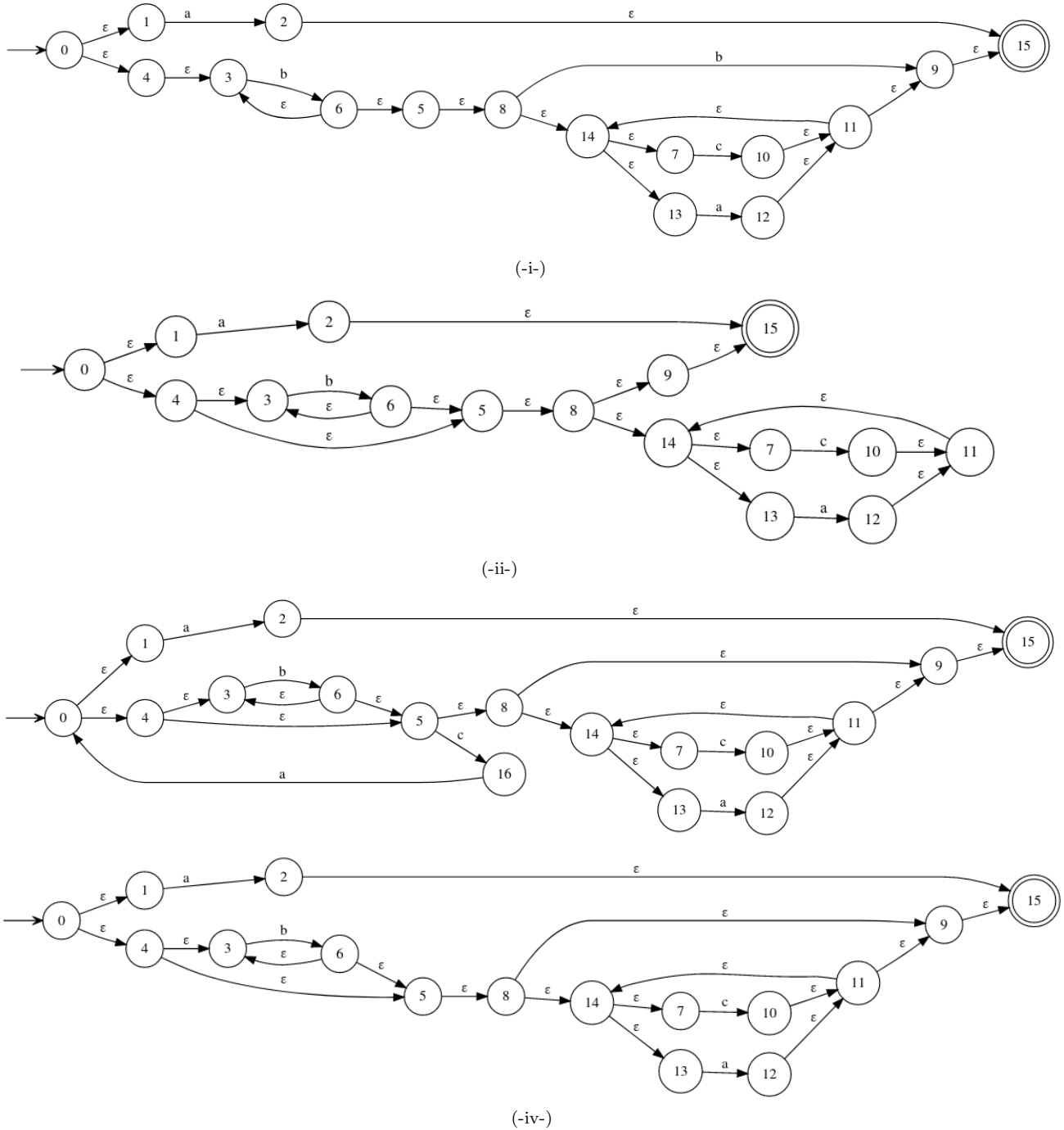
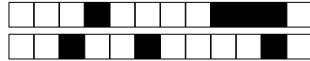


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b				f		h		j	k

Question 3 :

a			d						j	k		m	n

Question 4 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a			d	e	f			i	j

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

	b	c	d		f	g	h	i			l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

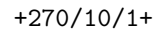
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The entire writing area is enclosed within a solid black rectangular border. There are no margins or additional markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ A n'est pas complet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ A possède un état puits ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

- ☐ Un mot est une application.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles.
 ☐ b u est accepté par A .
 ☐ c A est complet.
- ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$.
 ☐ e A a des états accepteurs.
 ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ b la Figure 3-ii-.
 ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-i-.
 ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-.
 ☐ b la Figure 4-iv-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

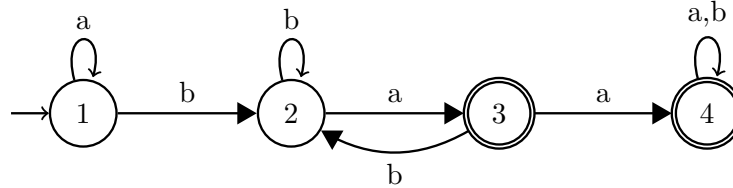
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 0 ☒ c 4 ☐ d 5 ☐ e 3 ☐ f 6 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

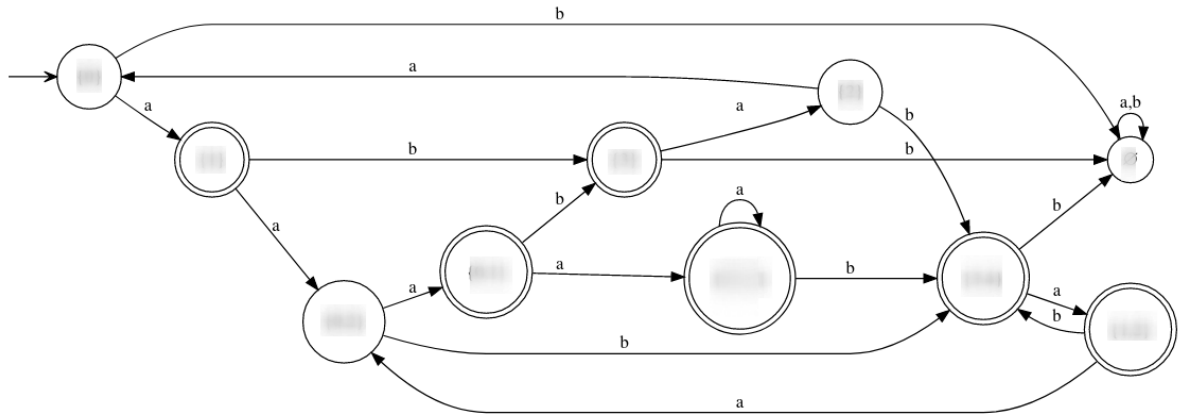


(-iii-)

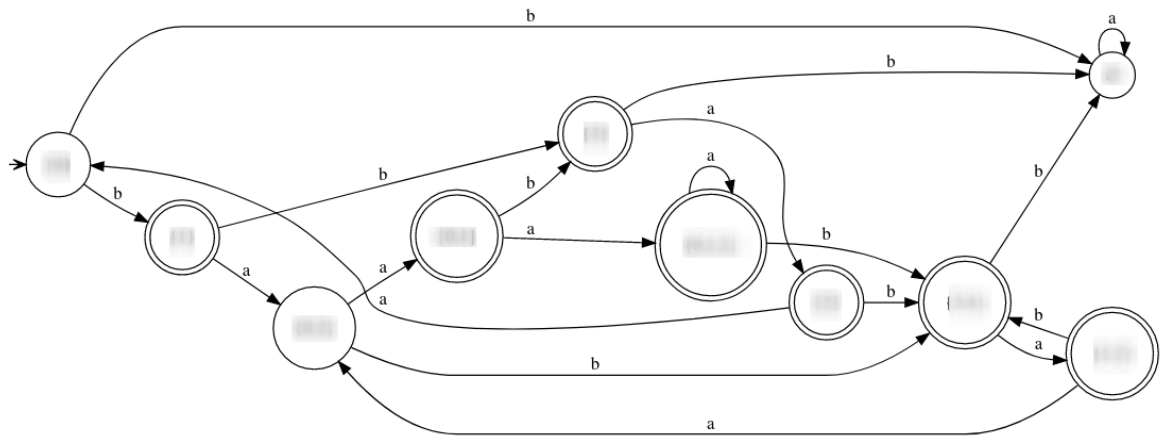


(-iv-)

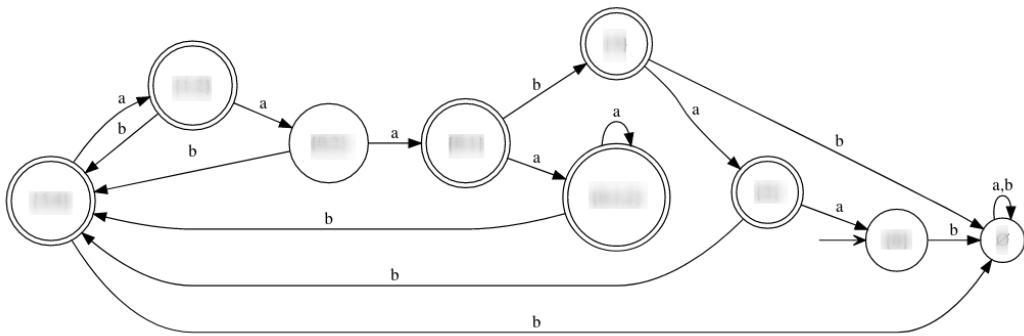
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



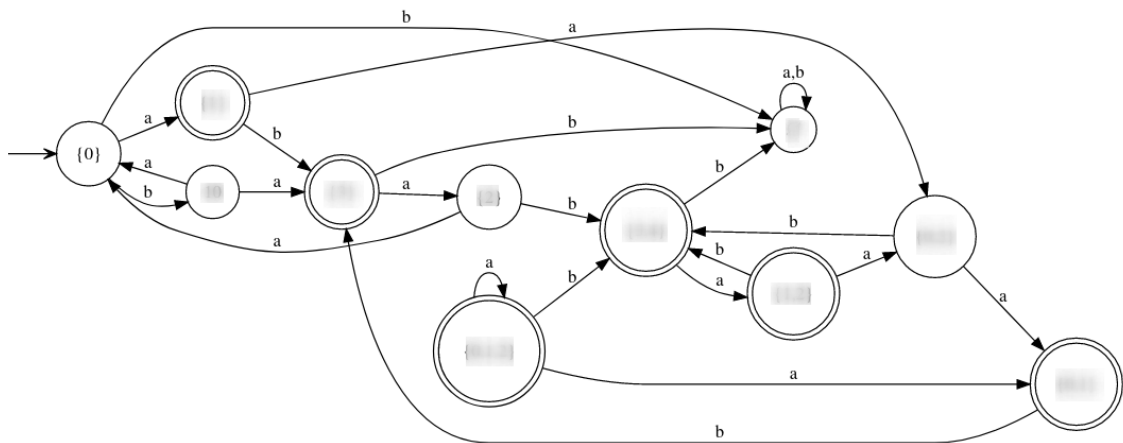
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

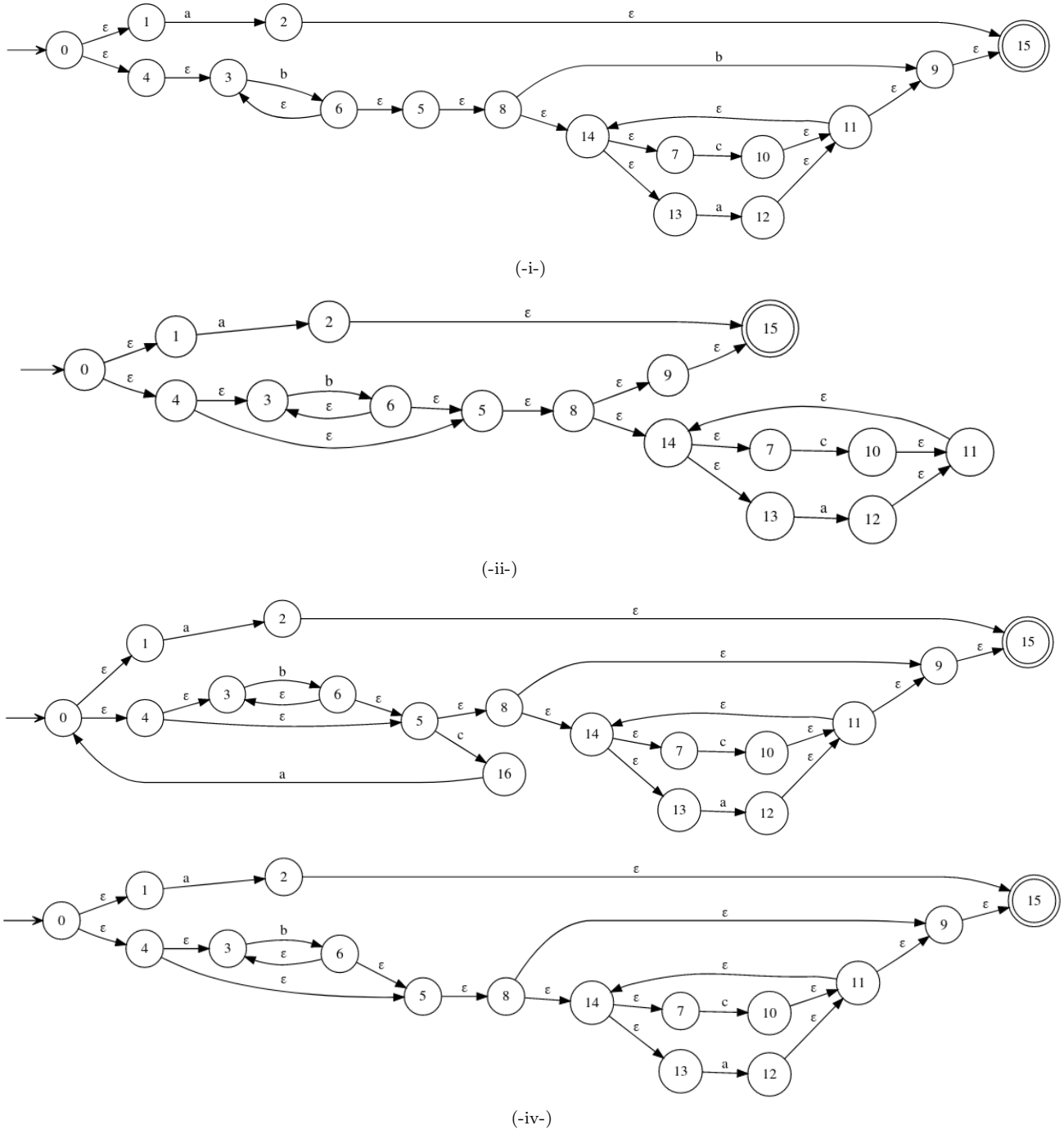


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ d ☐ g ☐ h ☐ j ☐ k

Question 3 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ f ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ c ☐ d ☐ i ☐ j ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ d ☐ e

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ e ☐ f ☐ h ☐ i ☐ k ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h

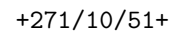
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with ten horizontal dotted lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is no text or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ b Σ est fermé par facteur.
- ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ h Σ est fermé par préfixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c A est complet.
- ☐ d A a des états accepteurs.
- ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c A possède un état puits
- ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ f Tous les états de A sont accepteurs.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'est pas complet.
☐ c A a au moins un état co-accessible. ☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☐ g A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ g Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Un mot est une fonction.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_1 = aX_1 + b$ ☒ $X_1 = aX_1 + bX_2$ ☐ c $X_4 = a + b$ ☐ d $X_4 = (a + b)X_4$
☐ e $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$ ☒ $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ g $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ h $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☒ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ j $X_3 = aX_2 + cX_4$
☒ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$ ☐ l $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ m $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = a + b$ ☐ b $X_4 = a^* + b^*$ ☒ $X_4 = (a + b)^*$ ☐ d $X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e $X_4 = (a + b)X_4$ ☐ f $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^+bX_2$ ☐ b $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^*b + \epsilon$ ☐ d $X_1 = a^*b$
☒ Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☒ $X_2 = b^*aX_3$ ☐ b $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☒ $X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ b $X_3 = (a(a + b)^*)^*$ ☐ c $X_3 = a(a + b)^*$
☐ d $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

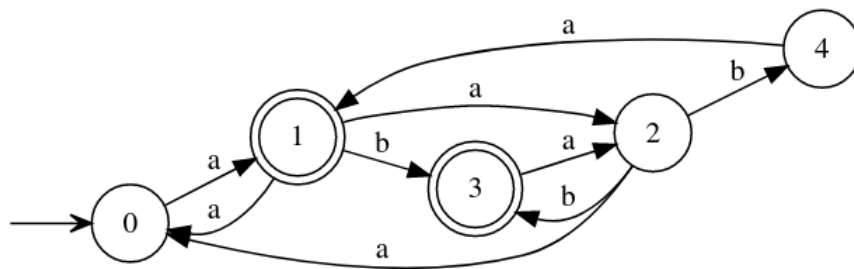
- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☒ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

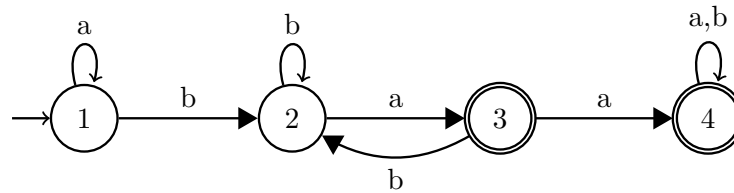
- ☐ a $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$ ☒ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$ ☐ c $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 6 ☐ e 5 ☐ f 1 ☒ 4

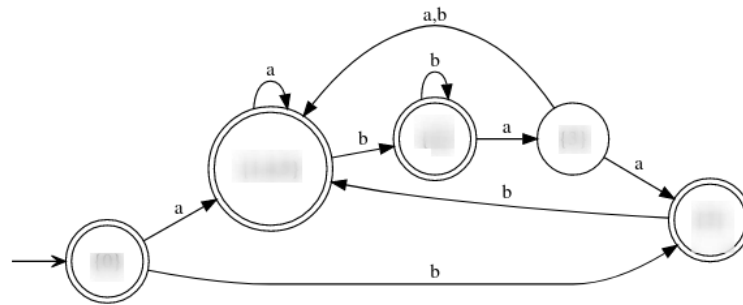
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



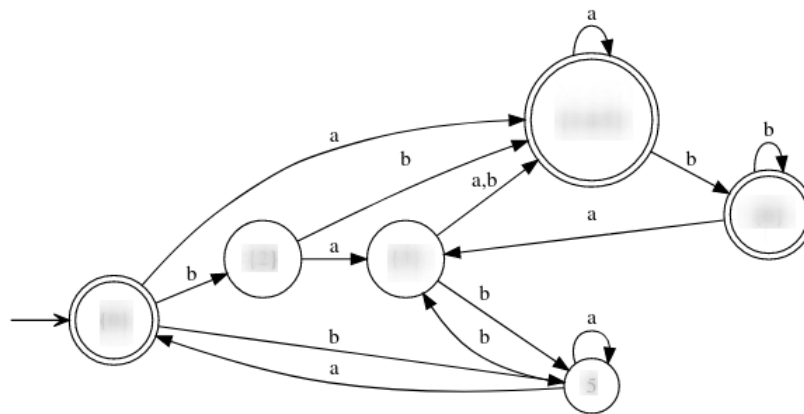
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

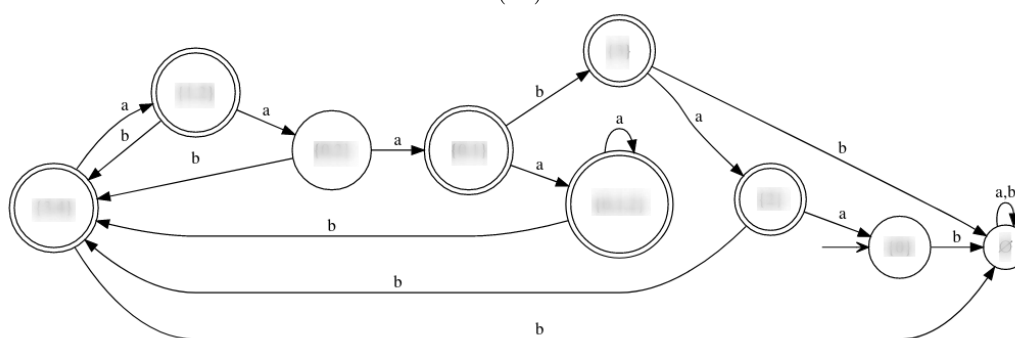
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



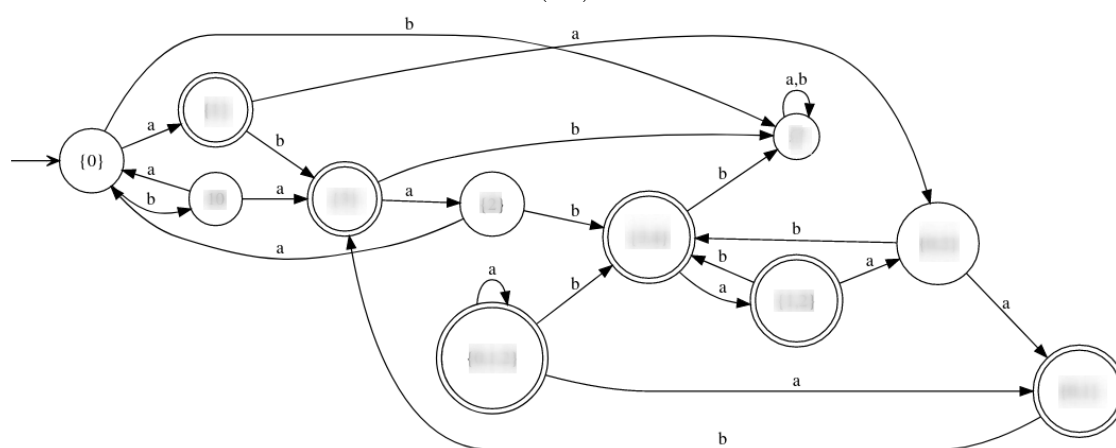
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

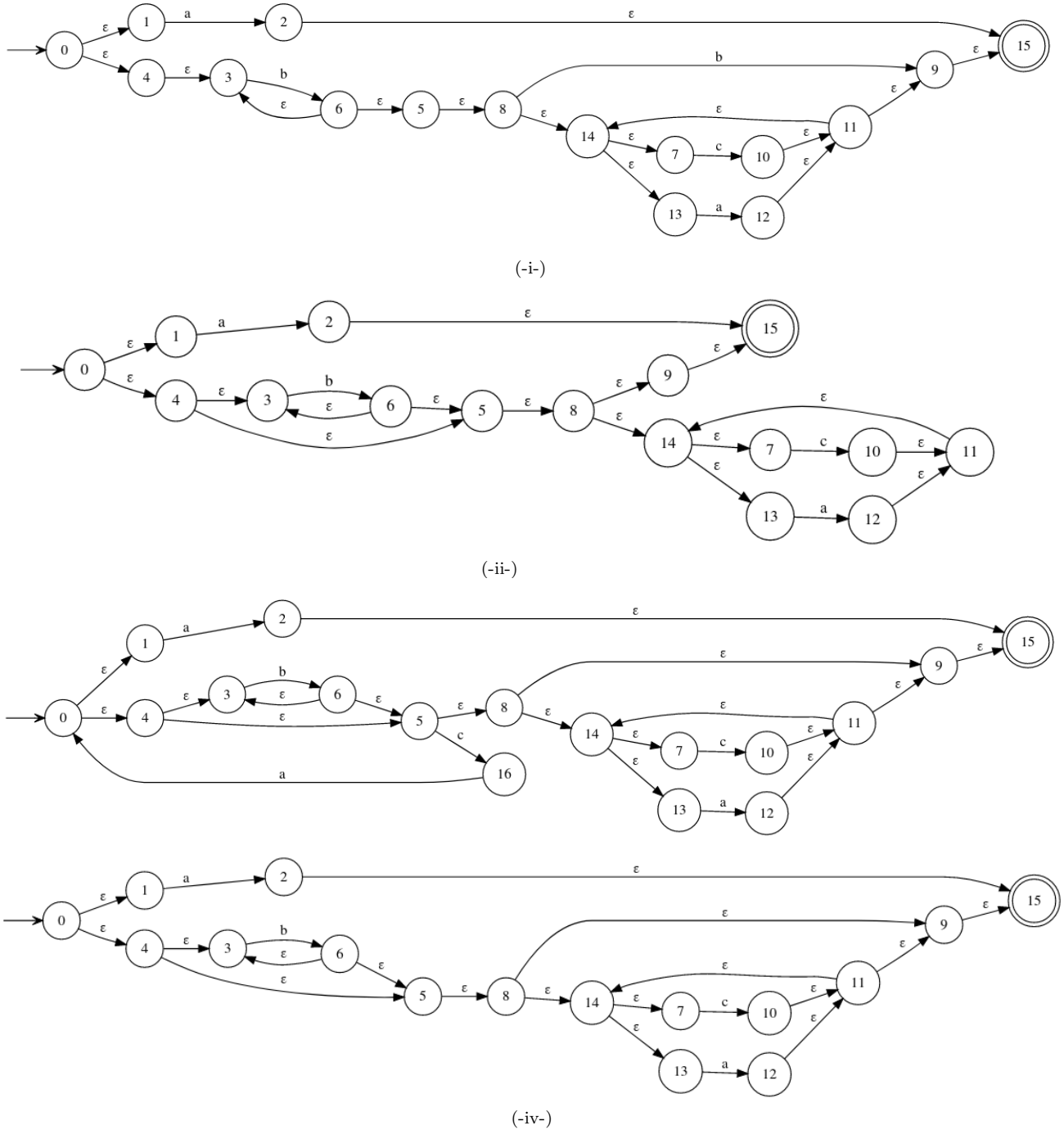


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

	b		d		f		h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 6 :

		c	d		f	g			j	k

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

			d			g			j	k		m	n

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a		c	d	e		g	h		j		l	m

Question 12 :

a	b		d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

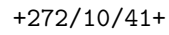
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b A accepte le langage universel.
- ☐ c A possède un état puits ☐ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ e L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c Les états de A sont tous accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.
- ☐ e u est accepté par A . ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
- ☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot est une fonction.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot peut être infini.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une application.
☒ Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ Un mot peut être vide.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
☒ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet.
☒ A a au moins un état accessible. ☐ e A a au moins un état non co-accessible.
☒ u n'est pas accepté par A .
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_4 = (a+b)X_4$
☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a+b)X_4$	☒	$X_4 = (a+b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☒	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e	Aucune des équations proposées.						
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

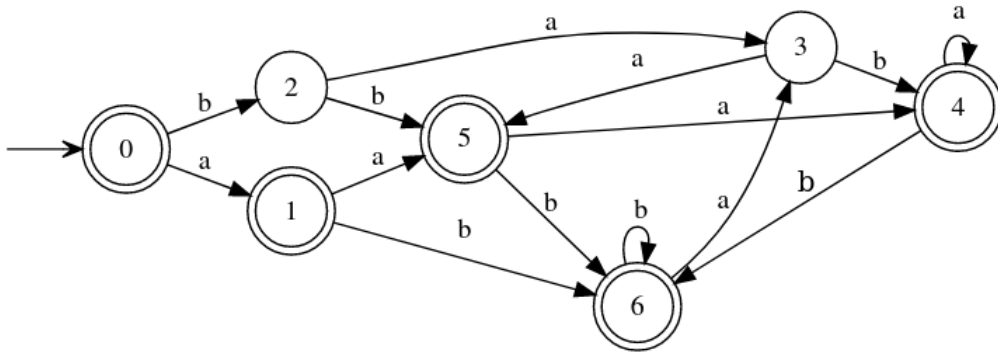
☐ a	$X_3 = a(a+b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

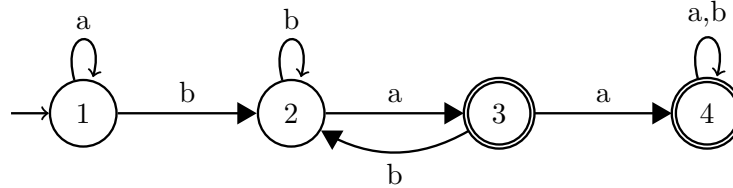
☐ a	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 1 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 2 ☐ f 6 ☐ g 5

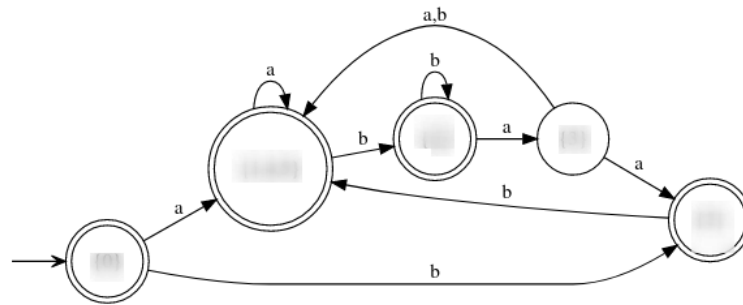
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

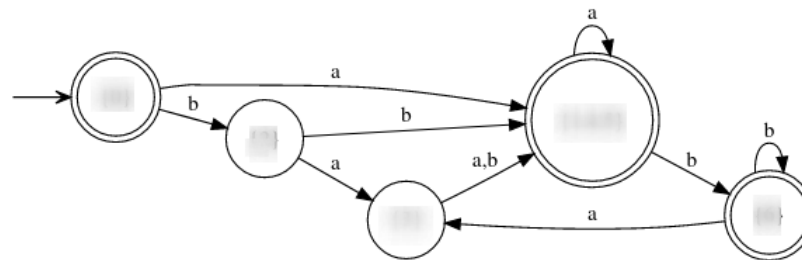
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



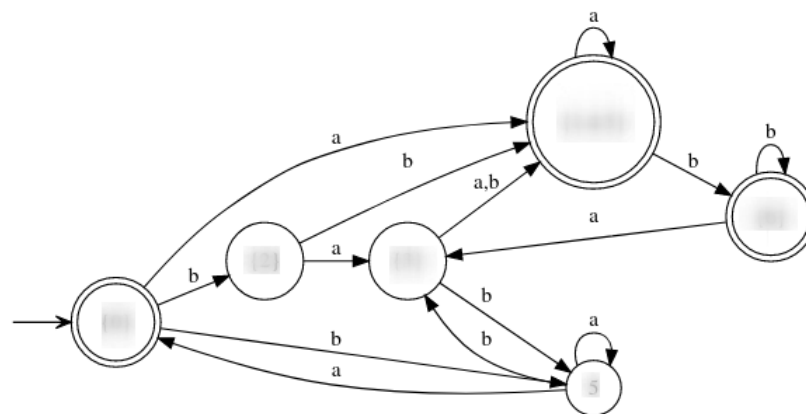
(-i-)



(-ii-)

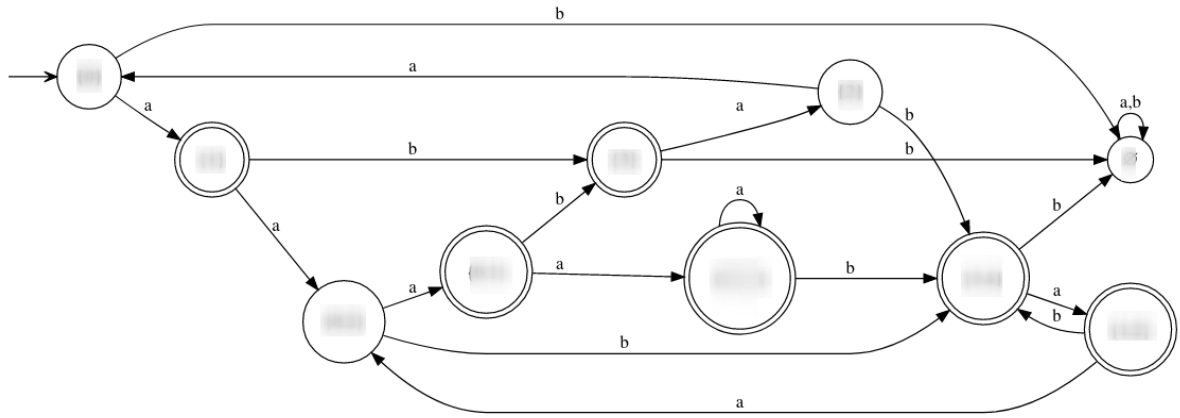


(-iii-)

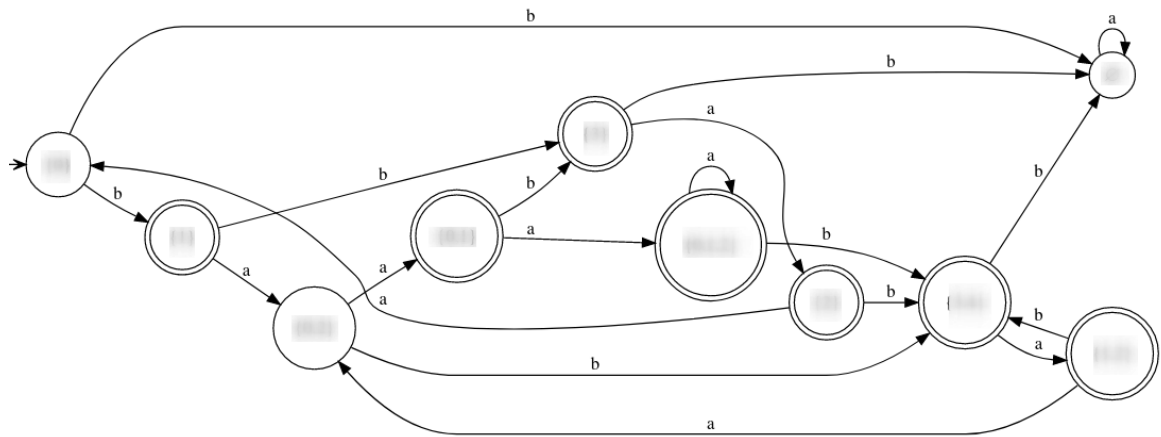


(-iv-)

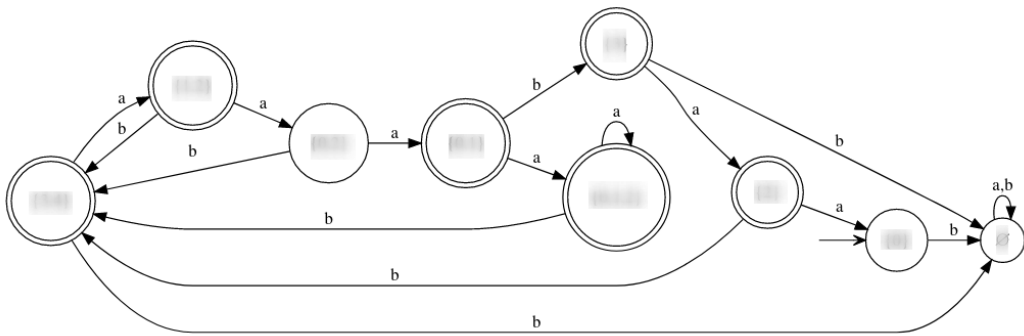
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



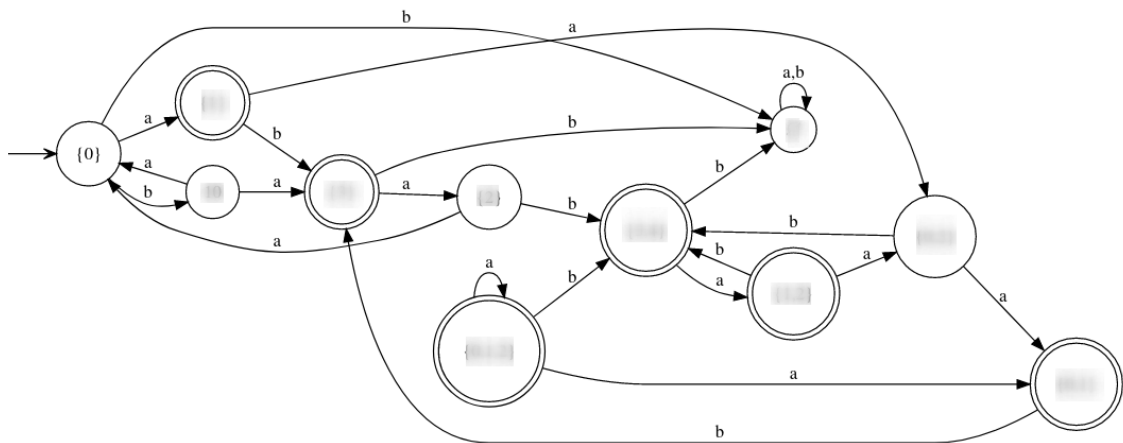
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

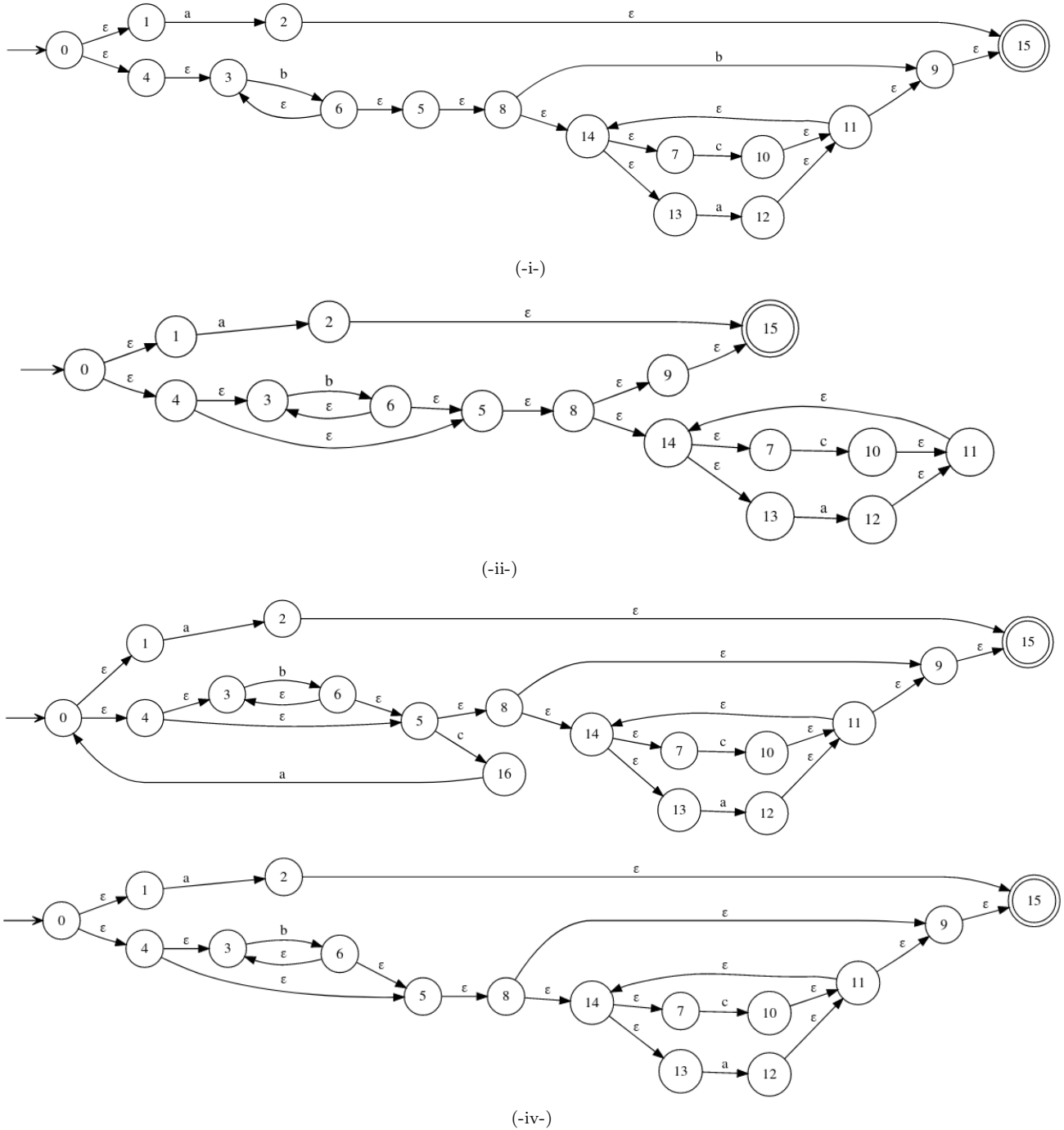


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c			f	g	h	i

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a	b	c	d	

Question 6 :

		c	d	e			h					m	n

Question 7 :

		c	d	e	f			i	j

Question 8 :

a				e			h	i	j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a	b	c		e	f	g	h	i				m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

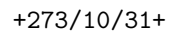
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs. ☐ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d A possède un état puits ☐ e A accepte le langage universel.
☐ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une fonction. ☐ b Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ d Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ e Un mot peut être infini. ☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ g Un mot peut être vide. ☐ h Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ i Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ k Un mot est une application. ☐ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état accessible. ☐ b A n'est pas complet.
☐ c u n'est pas accepté par A . ☐ d $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
☐ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ g A a au moins un état non co-accessible. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c A est complet. ☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur. ☒ b Σ^* est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
☒ d Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ f Σ^* est fermé par suffixe.
☐ g Σ est fermé par suffixe. ☐ h Σ est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_4 = a + b$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ k	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 6 ☐ c 2 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 0 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

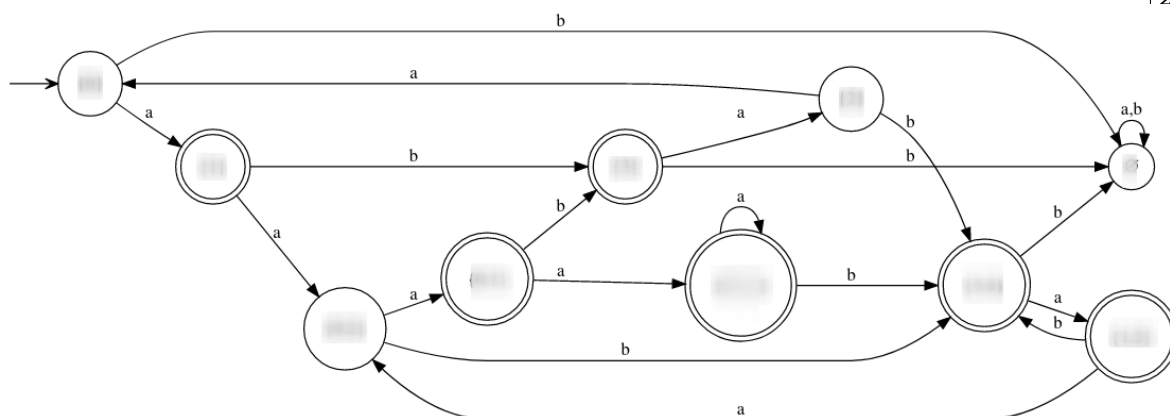


(-iii-)



(-iv-)

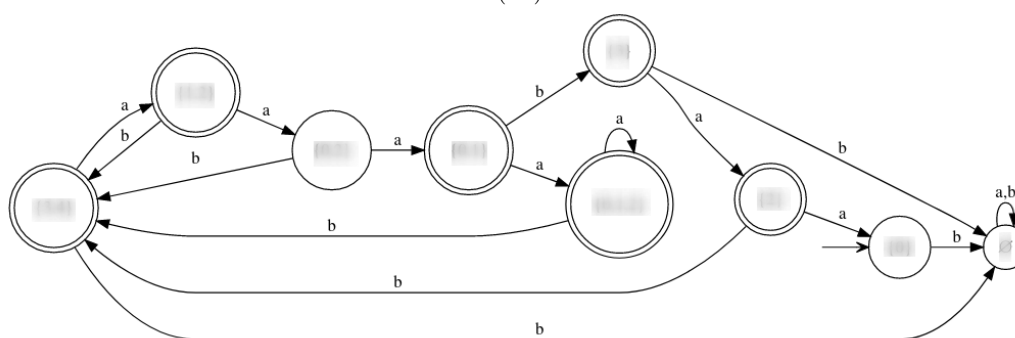
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



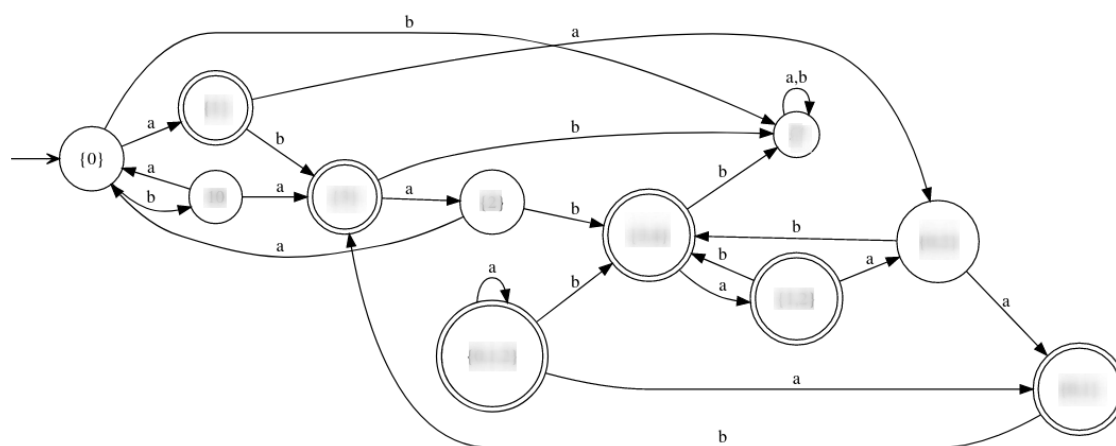
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

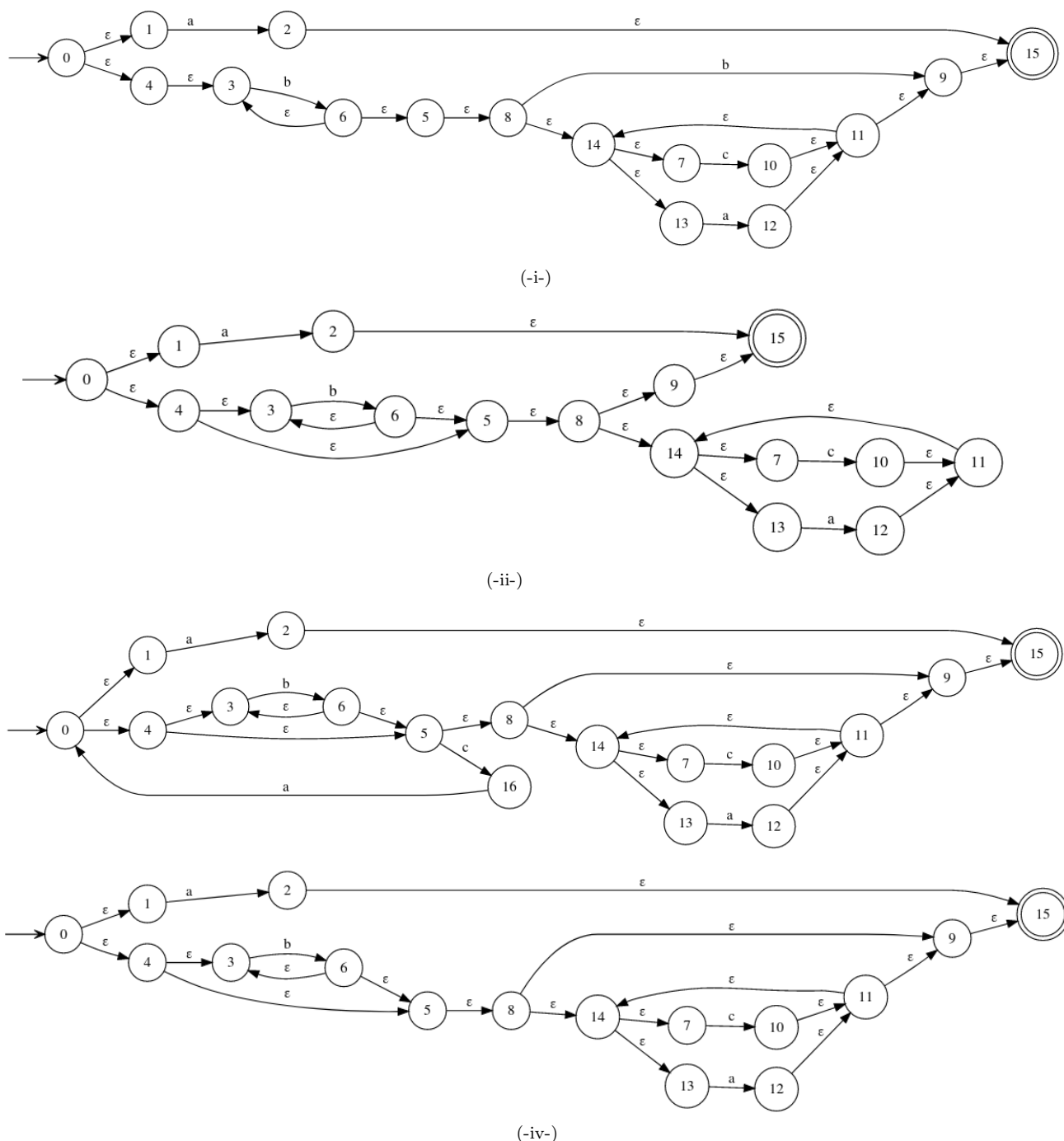
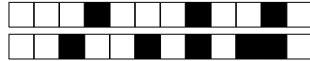


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d	e		g	h	i

Question 3 :

		c		e	f				j			m	n

Question 4 :

				e		g	h	i	j	k

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a			d	e

Question 7 :

		c		e		g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e		g			j	k		m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

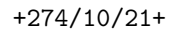
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ P est forcément déterministe.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.

☐ A est complet.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.

☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Σ^* est fermé par préfixe.

☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ est fermé par suffixe.

☐ Σ est fermé par préfixe.

- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot est une fonction.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ i Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs. ☐ c $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ f A accepte le langage universel.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ c A a au moins un état non accessible. ☐ d A n'a pas d'état accepteur.
☐ A n'est pas complet. ☐ f A a au moins un état co-accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ $X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ $X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ $X_1 = aX_1 + b$	☐ $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ $X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ $X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
	☐ $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ $X_4 = a^* + b^*$	☐ $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ $X_4 = \epsilon + a + b$	☐ $X_4 = (a + b)^*$
☐ $X_4 = a + b$	☐ $X_4 = (a + b)X_4$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ $X_1 = a^*b$	☐ $X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ $X_1 = a^+bX_2$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ $X_2 = b^*aX_3$
	☐ Aucune des équations proposées.		
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.			

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

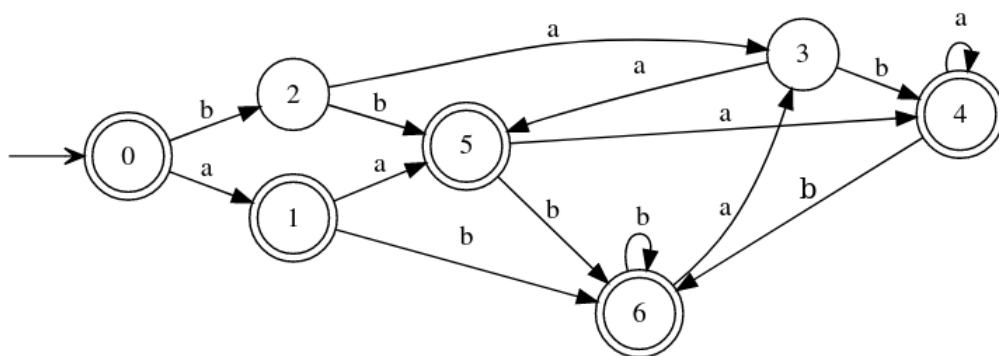
☐ $X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ $X_3 = a(a + b)^*$	☐ Aucune des équations proposées.	
☐ Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.		

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

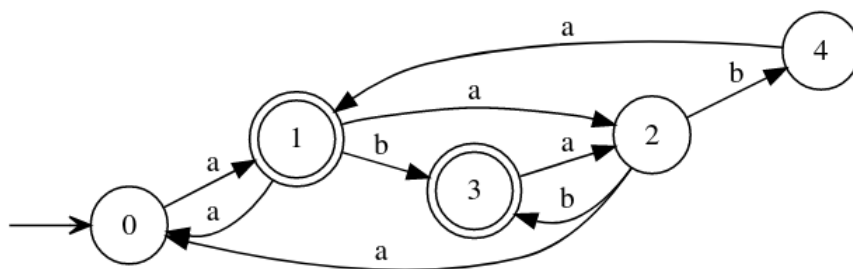
☐ celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

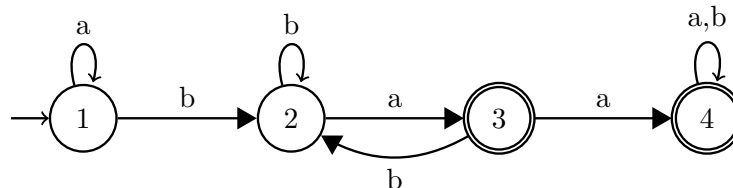
☐ $a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ $(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ Aucune des expressions régulières proposées.		



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 3 ☐ c 6 ☒ 4 ☐ e 1 ☐ f 5 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

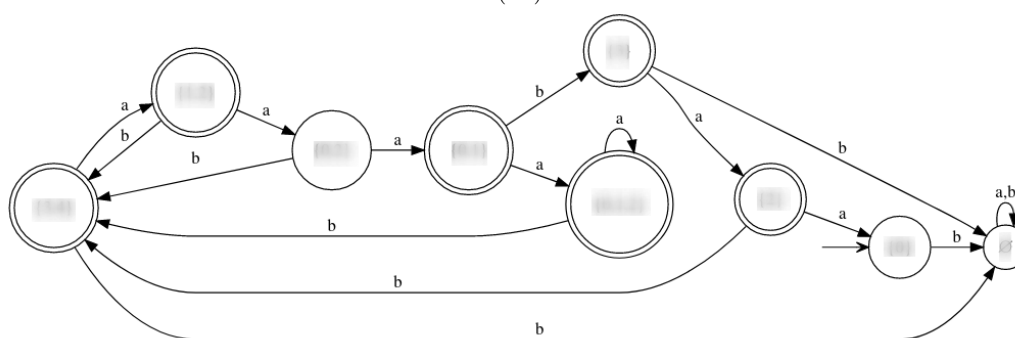
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



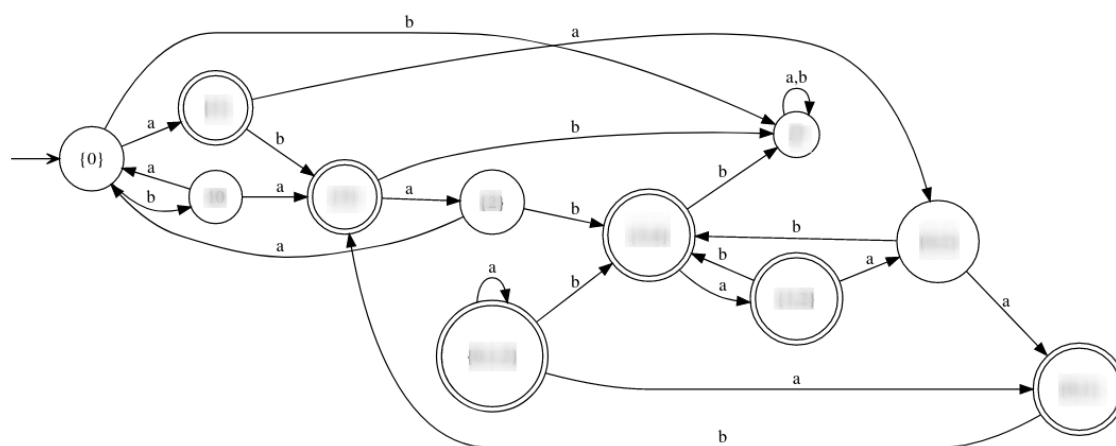
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

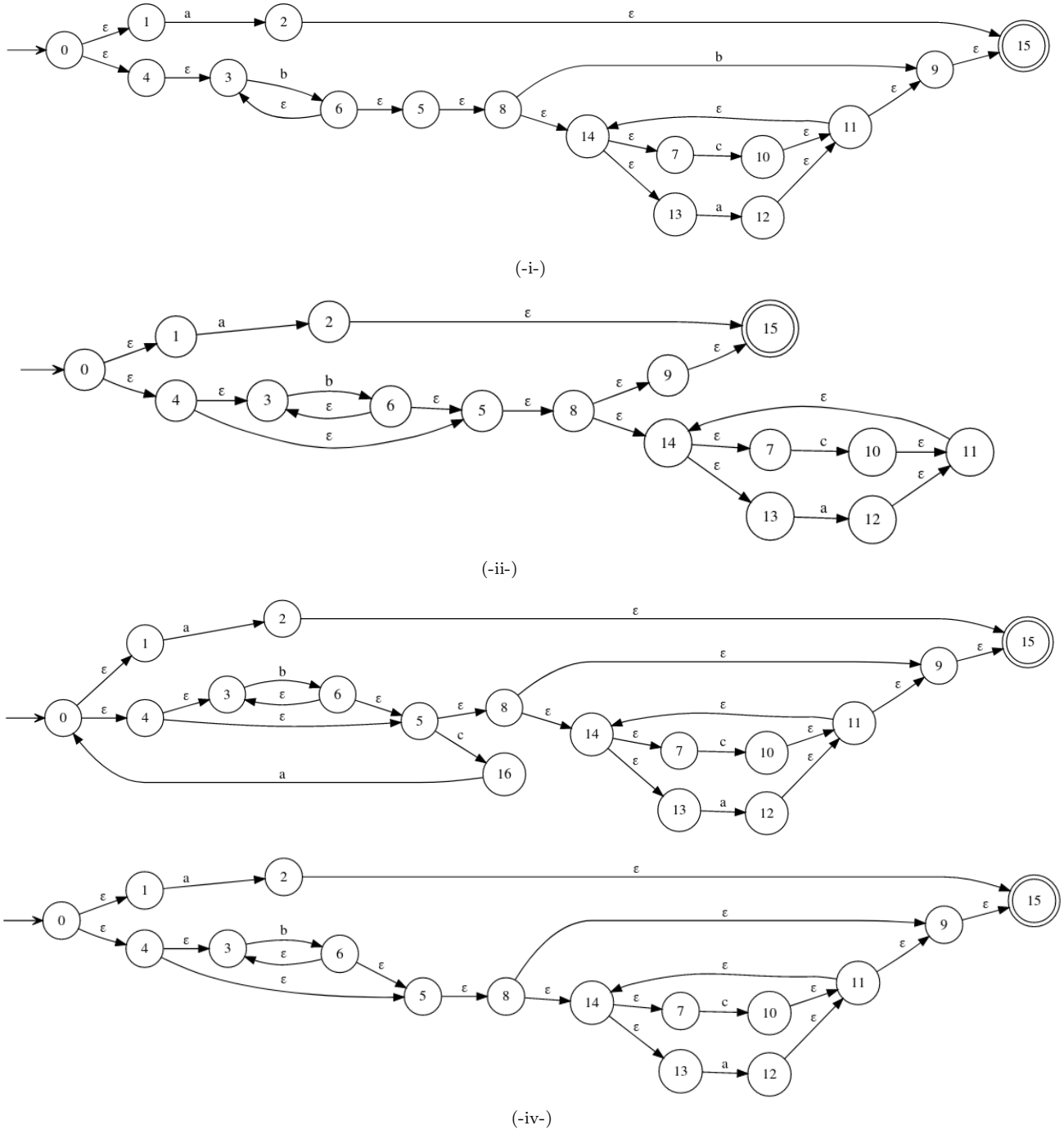
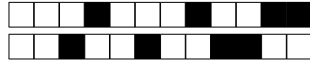


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   ☐ c ☐ d ☐ e

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g 

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d 

Question 5 : ☐ a ☐ b     ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 :     ☐ e   ☐ h ☐ i  ☐ k  ☐ m ☐ n

Question 7 :  ☐ b ☐ c  ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 :   ☐ c ☐ d  ☐ f  ☐ h  ☐ j ☐ k

Question 9 : ☐ a ☐ b  ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b  ☐ d

Question 11 :  ☐ b  ☐ d  ☐ f ☐ g  ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c  ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

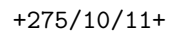
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d  ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c  ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a  ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a 

Question 17 : ☐ a ☐ b  ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of blank handwriting practice paper. It features multiple rows of horizontal lines. Each row consists of three lines: two solid outer lines and a dashed middle line, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed in a thin black border.

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une application. ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b A accepte le langage universel. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☒ A a au moins un état accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ e A a au moins un état non accessible.
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ A n'est pas complet. ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
☒ u n'est pas accepté par A .
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b u est accepté par A . ☐ c A est complet.
☐ d $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ j	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ k	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

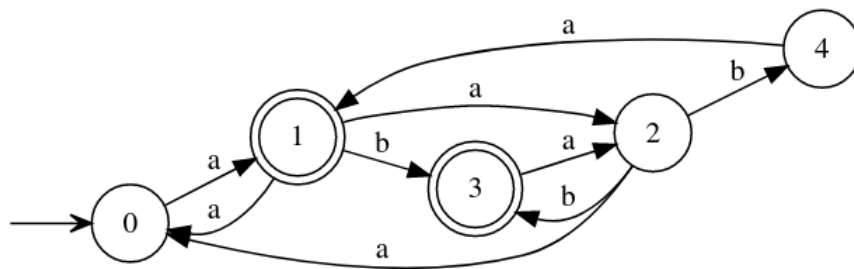
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

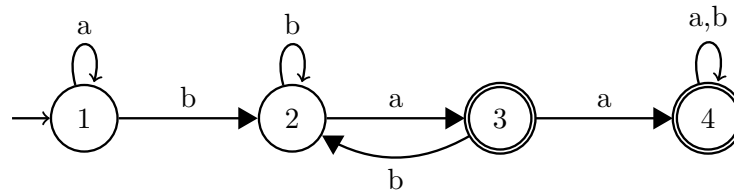
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 1 ☐ f 6 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

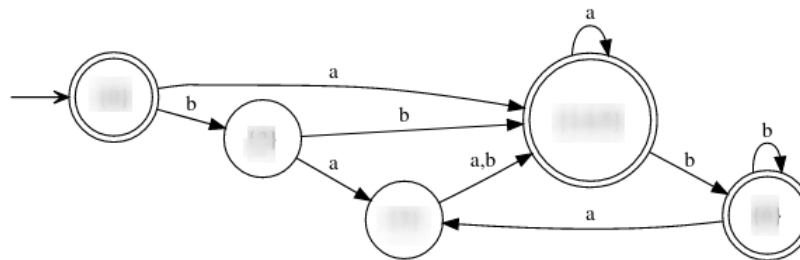
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



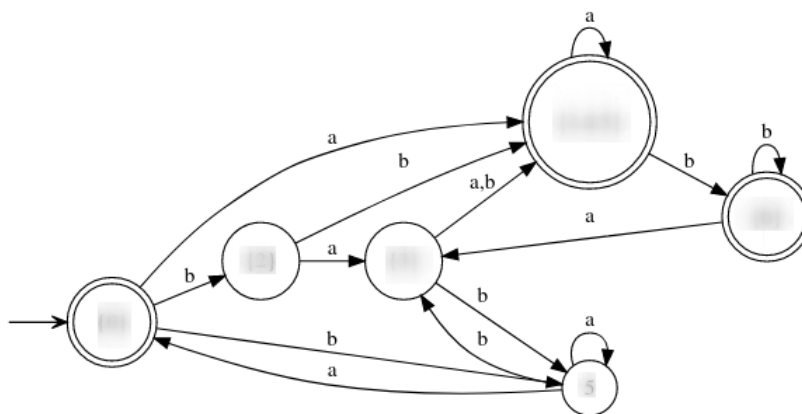
(-i-)



(-ii-)

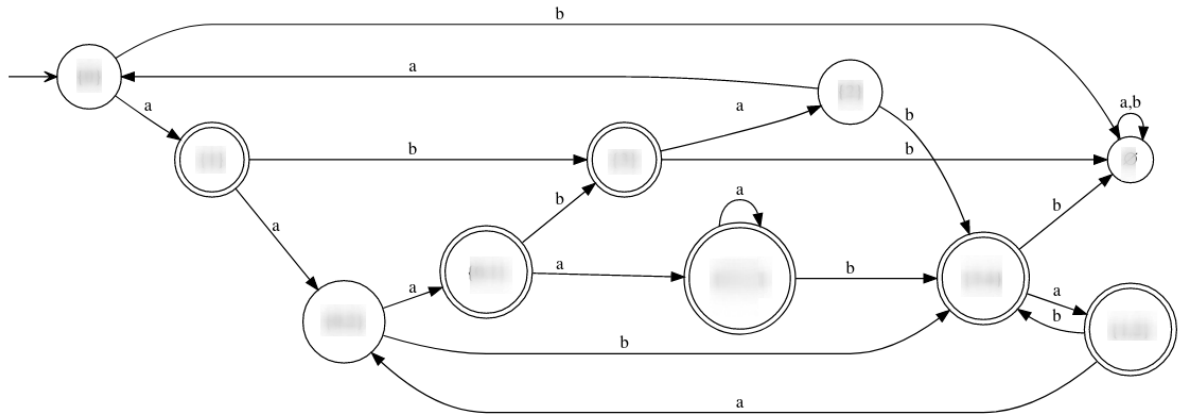


(-iii-)

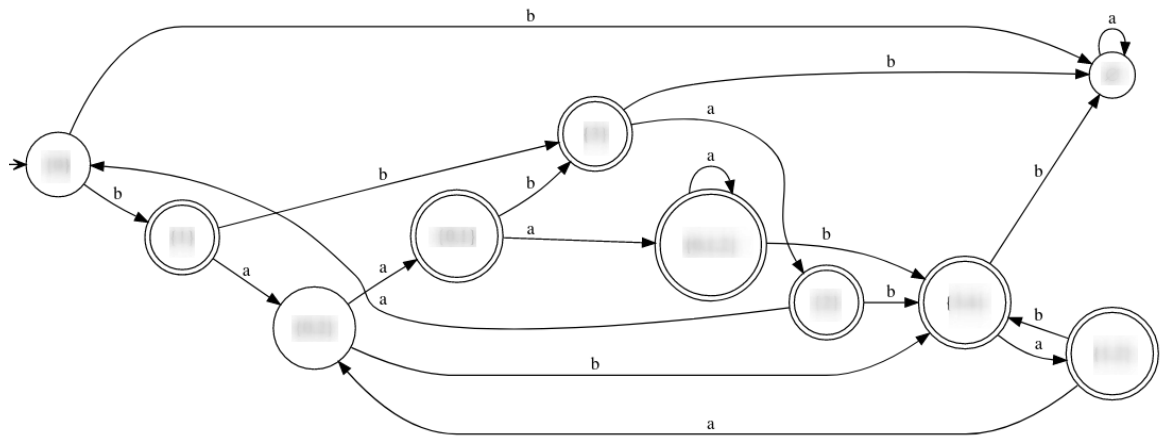


(-iv-)

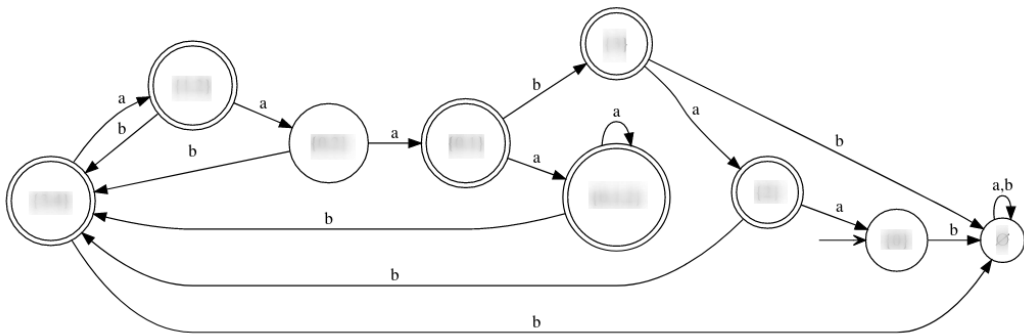
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



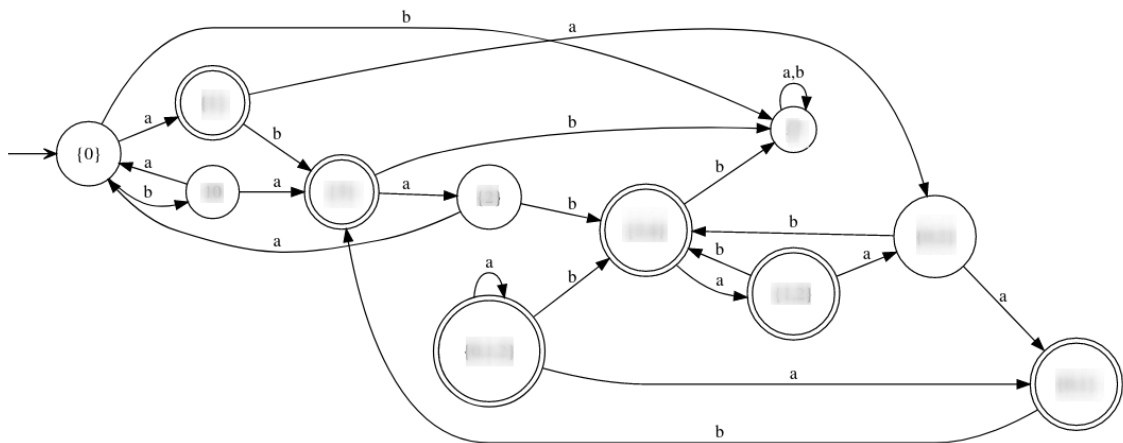
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

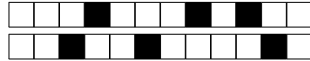


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c  e f g  i j

Question 3 :  b c d       l m n

Question 4 : a   d e

Question 5 : a b  d e  g h i

Question 6 : a b   e   h  j k

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a  c d

Question 11 : a  c d e f   i j k l 

Question 12 :  b c d e f g h

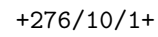
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ désigne l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.

☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ Un mot est une application.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ Un mot est une fonction.

☐ Un mot peut être infini.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut être vide.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur.

☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Σ est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par préfixe.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A . ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A est complet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A possède un état puits.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

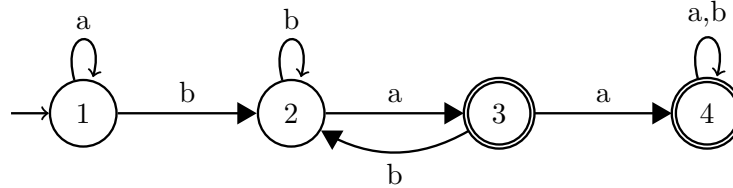
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 5 ☐ c 2 ☐ d 6 ☐ e 0 ☒ f 4 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

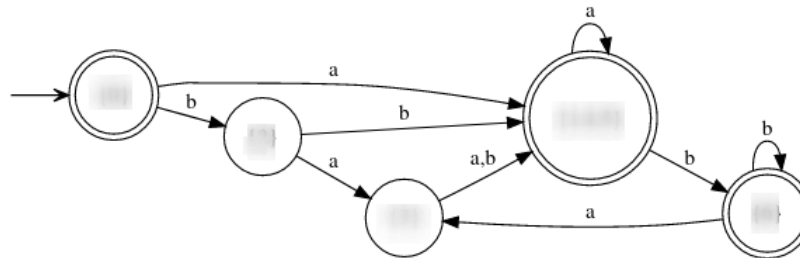
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



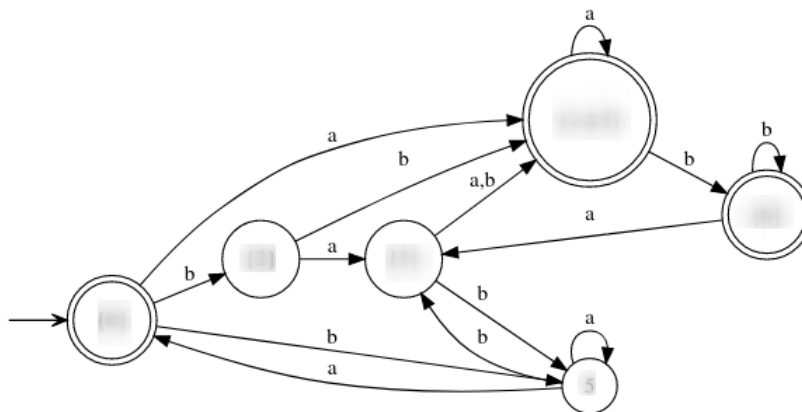
(-i-)



(-ii-)

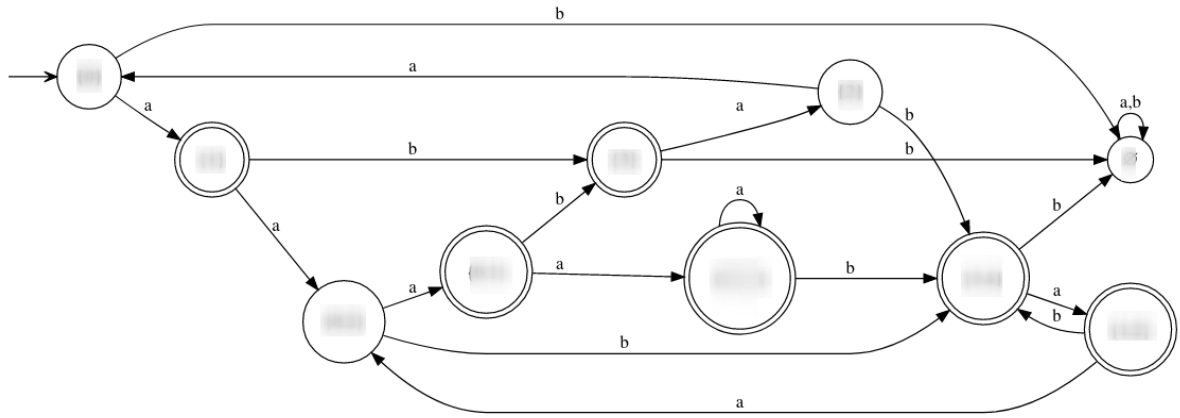


(-iii-)

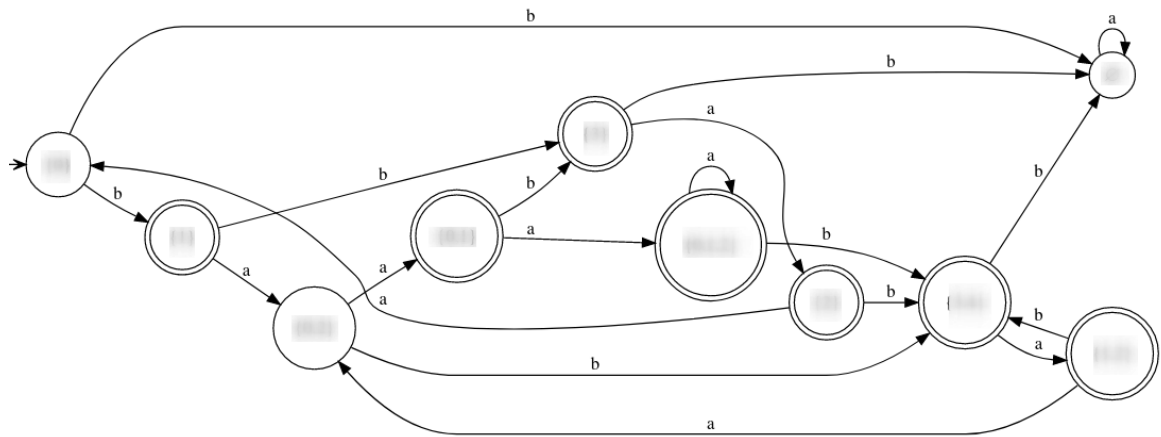


(-iv-)

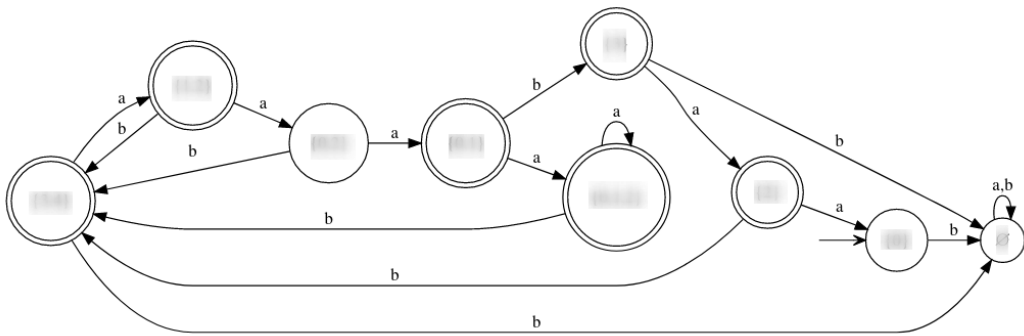
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



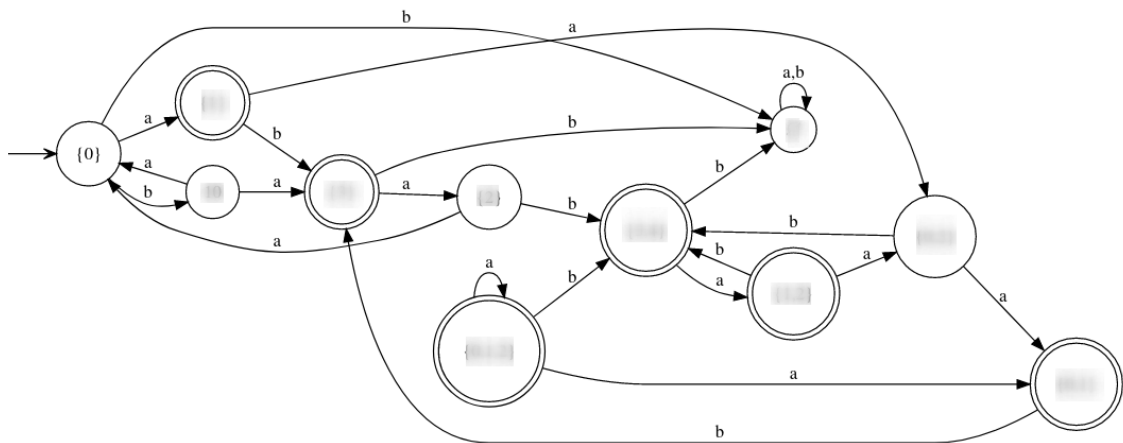
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

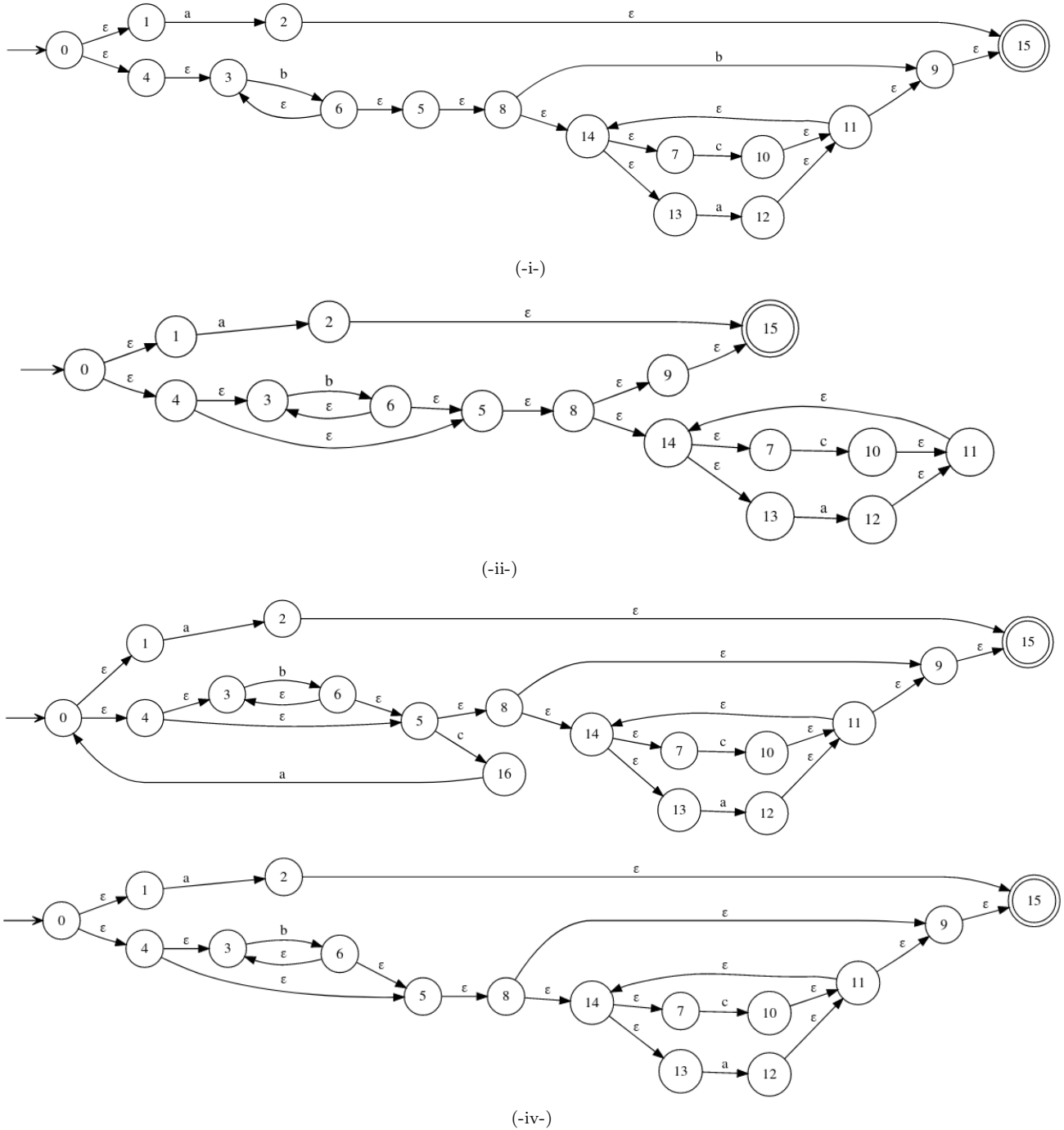


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b c d 

Question 4 :    d  f     k l m n

Question 5 :   c d   g h i j

Question 6 :  b  d   g  i j k

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 :  b c d e f  h i

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a  c d e f  h i   l m

Question 12 :  b c d e f g h

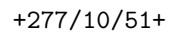
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a  c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ b Σ est fermé par facteur.
☐ c Σ^* est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ^* est fermé par facteur.
☐ f Σ^* est fermé par suffixe. ☐ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une application. ☐ b Un mot peut être vide.
☐ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ d Un mot est une fonction.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ f Un mot peut être infini.
☐ g Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ i Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ k Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a P est forcément déterministe.
☐ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c u est accepté par A .
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs.
☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ f A accepte le langage universel. ☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ b A n'est pas complet. ☐ c A a au moins un état non co-accessible.
☒ d A a au moins un état accessible. ☐ e A a au moins un état co-accessible.
☐ f A n'a pas d'état accepteur. ☒ g u n'est pas accepté par A . ☒ h $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☒ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ h	$X_4 = a + b$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a+b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

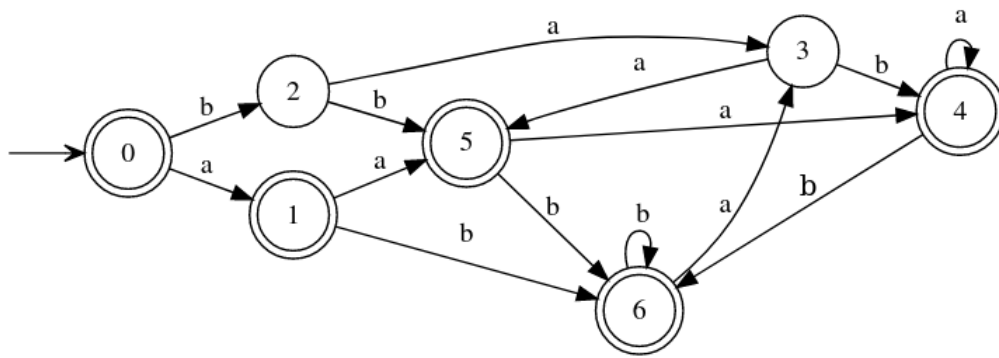
☐ a	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a+b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

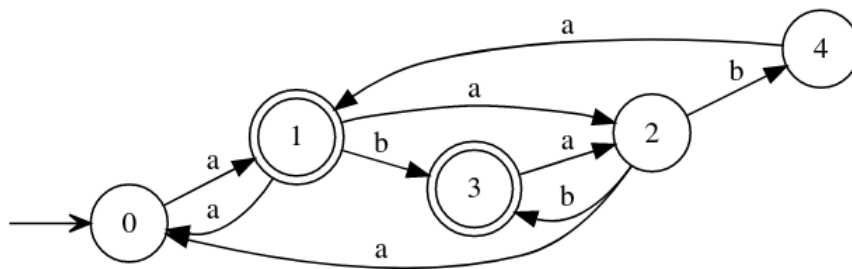
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

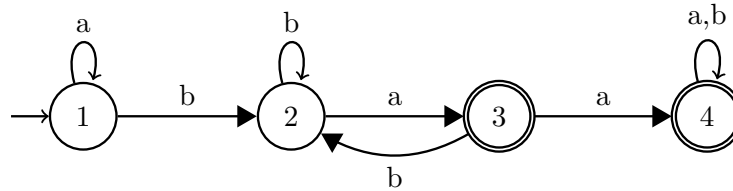
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 1 ☐ e 2 ☐ f 0 ☒ 4

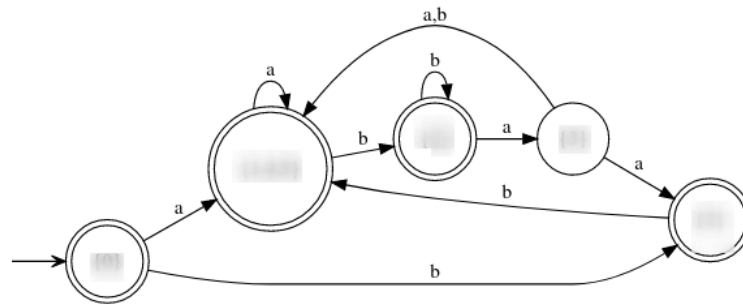
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

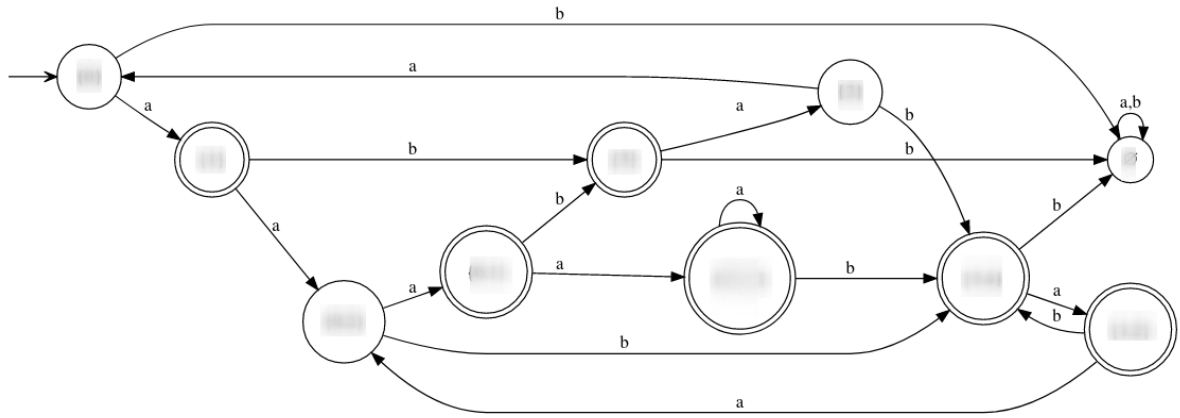


(-iii-)

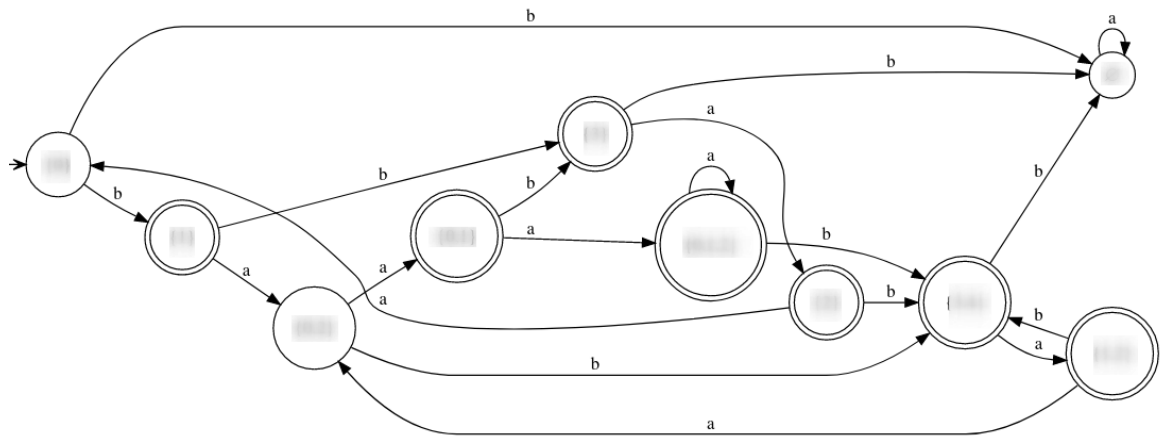


(-iv-)

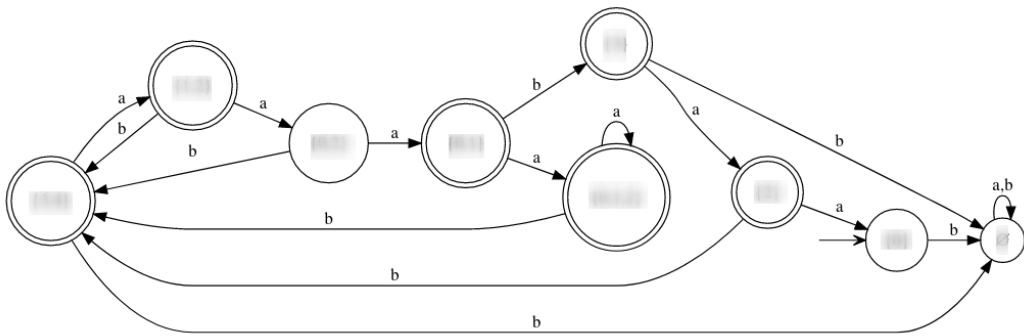
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



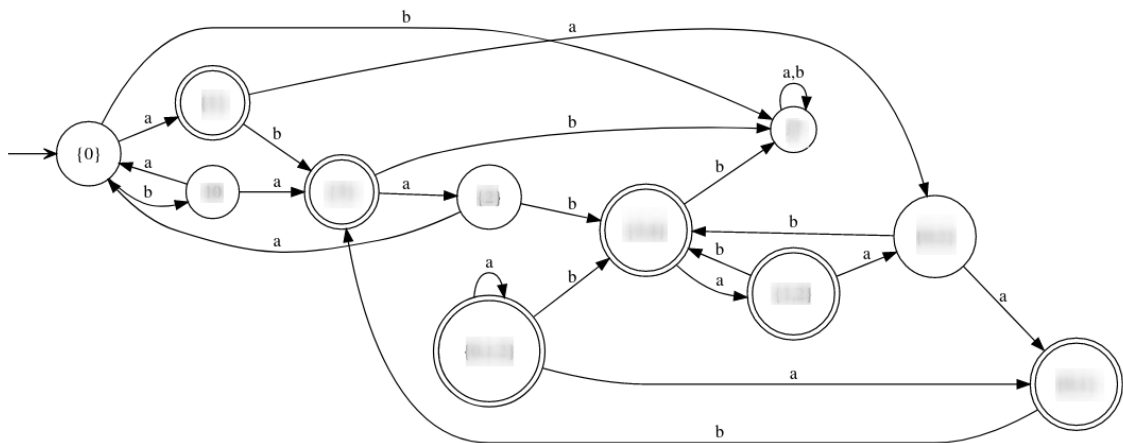
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

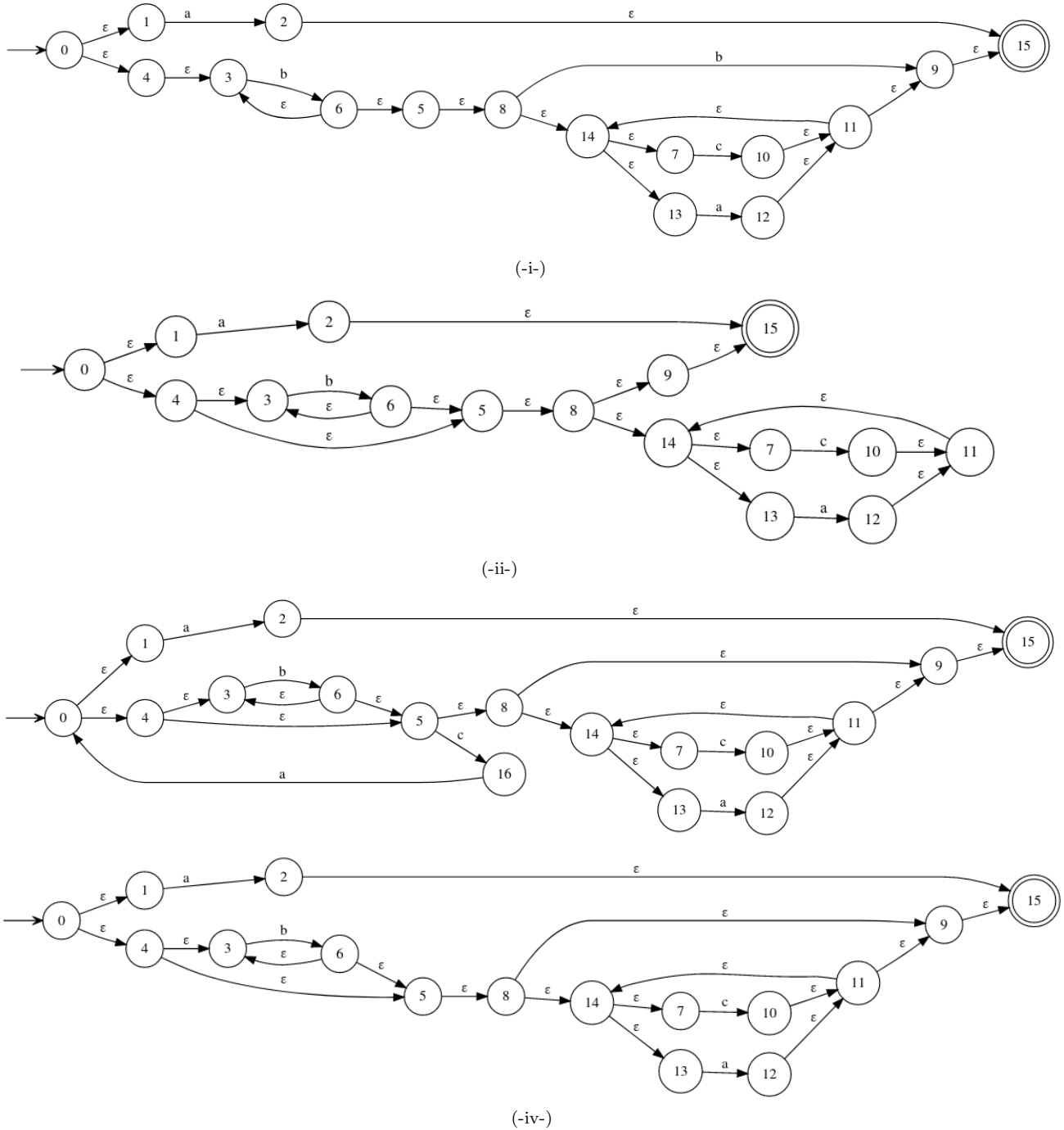


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b		d				h	i	j

Question 3 :

				e	f		h		j			m	n

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 8 :

		c		e	f			i	j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b		d

Question 11 :

a		c	d	e	f	g	h	i			l	

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

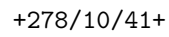
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ a	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.	☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐	Un mot est une application.	☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ e	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐ Un mot peut être vide.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot est une fonction.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ j Un mot peut être infini.
☐ k	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ m	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a Tous les états de A sont accepteurs. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ d A accepte le langage universel.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e u est accepté par A .
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ e Σ est fermé par suffixe.
☐ f Σ est fermé par facteur. ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☒ A n'est pas complet.
☐ c A n'a pas d'état accepteur. ☒ A a au moins un état accessible.
☐ e A a au moins un état non accessible. ☒ u n'est pas accepté par A .
☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

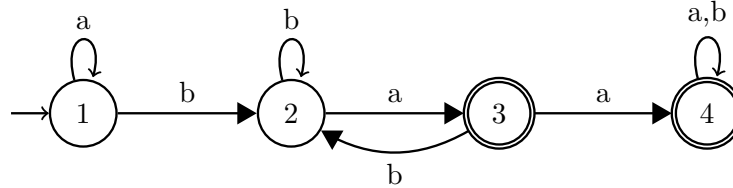
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 5 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 1 ☐ f 2 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

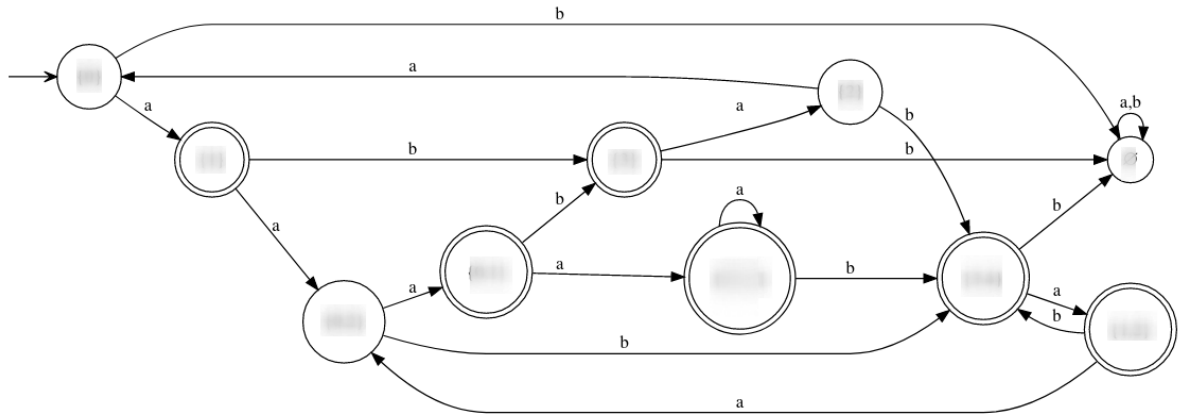


(-iii-)

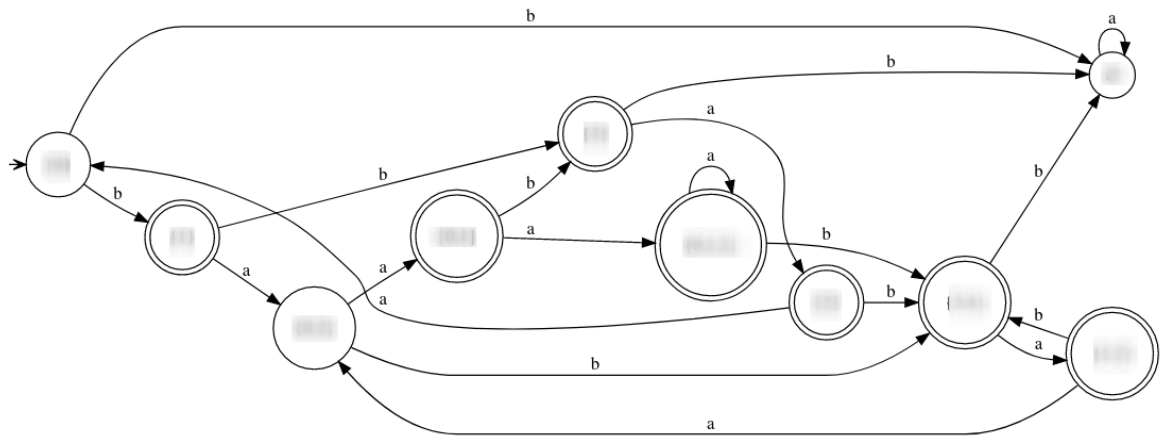


(-iv-)

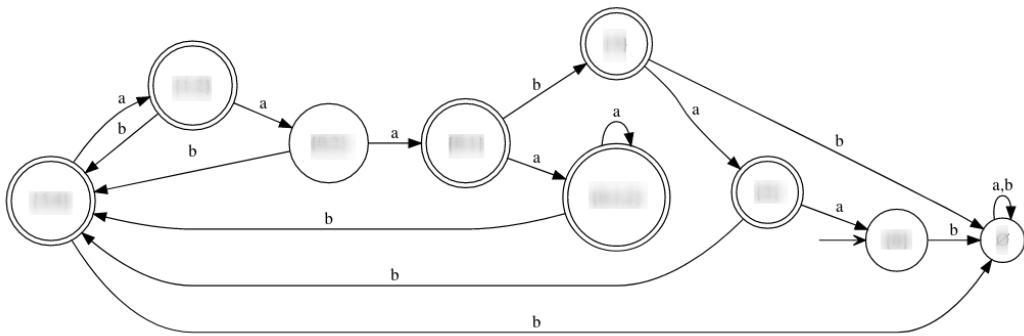
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



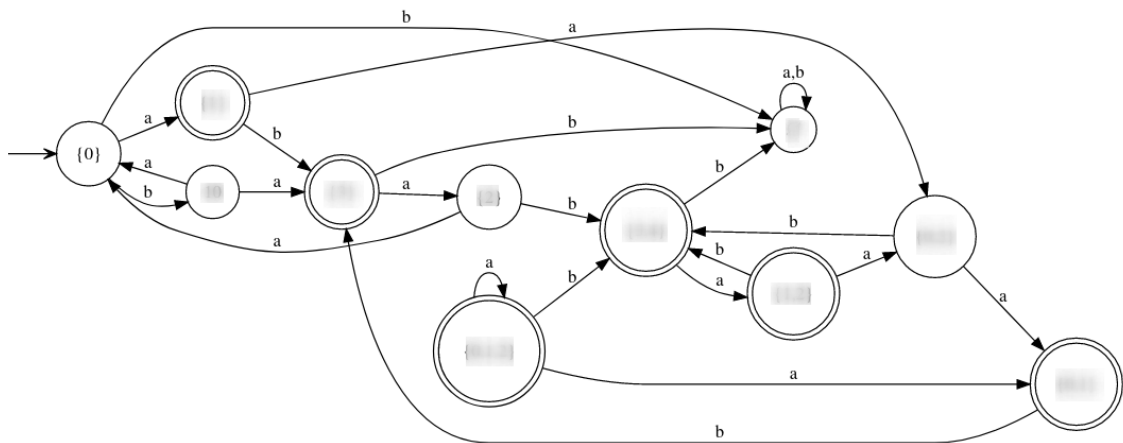
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a				e					j	k		m	n

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

		c	d	e

Question 5 :

a	b		d		f	g	h	i

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

	b			e	f	g		i	j

Question 8 :

a		c		e				i	j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b		d	e	f		h	i	j		l	

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

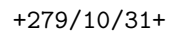
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Un mot possède une infinité de suffixe.
☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ a Σ est fermé par préfixe.	☐ b Σ est fermé par suffixe.	☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par préfixe.	☐ e Σ est fermé par facteur.	☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.		
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.		
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ $ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.	☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c A possède un état puits	

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A n'est pas complet.
- ☐ A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .
- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + b$	☐	$X_4 = a + b$
☐	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐	$X_4 = (a + b)X_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = a^* + b^*$	☐	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a + b)X_4$
☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐	$X_4 = a + b$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐	$X_1 = a^*b$	☐	$X_1 = a^+bX_2$	☐	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
☐	Aucune des équations proposées.						
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐	Aucune des équations proposées.						
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

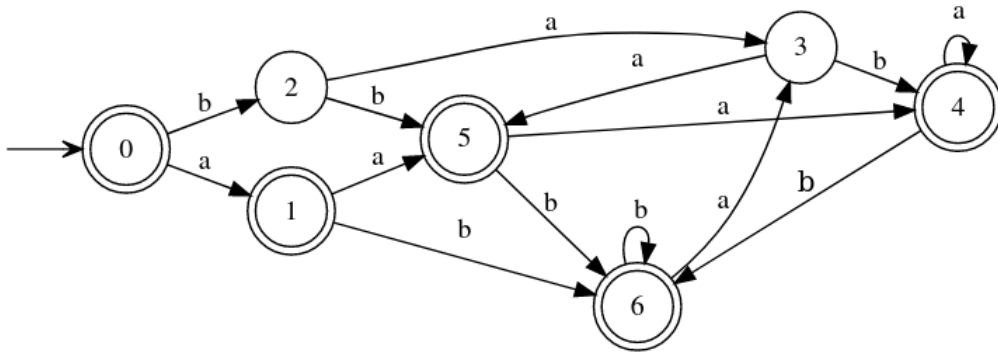
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐	$X_3 = a(a+b)^*$	☐	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$
☐	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐	Aucune des équations proposées.		
☐	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

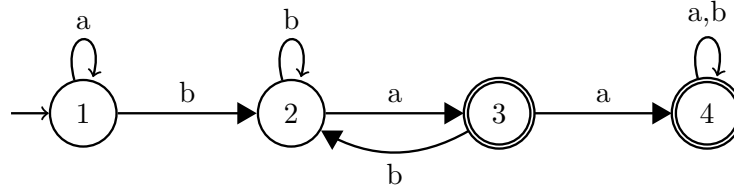
☐	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 6 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 1

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

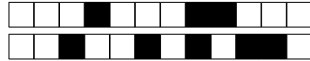


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ e ☐ ☐ ☐ h ☐ ☐ j ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ e ☐ ☐ g ☐ ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ ☐ ☐ ☐ i ☐ j ☐ k

Question 7 : ☐ a ☐ ☐ ☐ d ☐ e

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ ☐ ☐ ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f ☐ g ☐ h

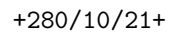
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐

Question 17 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a au moins un état non accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état accessible.

☐ f A a au moins un état non co-accessible.

☐ A n'est pas complet.

☐ u n'est pas accepté par A .

☐ i A a au moins un état co-accessible.

☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Un mot est une application.

☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.

☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts.

☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.

☐ e Un mot peut être infini.

☐ Un mot est une fonction.

☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut être vide.

☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.

☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.

- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b A est complet. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d u est accepté par A . ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ d Tous les états de A sont accepteurs. ☐ e nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ f A accepte le langage universel.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe. ☐ d Σ est fermé par suffixe. ☒ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☒ Σ^* est fermé par préfixe. ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ h Σ est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ d	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☐ g	$X_4 = a + b$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$
				☐ j	$X_4 = (a+b)X_4$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ c	$X_4 = a + b$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☒	$X_4 = (a+b)^*$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a+b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 5 ☐ f 1 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

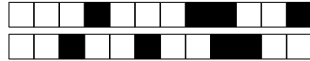


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réserve enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :   c d e

Question 3 : a  c   f   i j k

Question 4 :   c d e     l m n

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b  d e f  h i

Question 8 :  b c d    h i j

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a  c d   g h i j k  m

Question 12 : a b c d  f g h

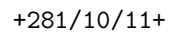
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b  d e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 :  b

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ b A a des états accepteurs.
☐ c A est complet. ☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e u est accepté par A .
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur. ☒ c $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ d A a au moins un état non co-accessible.
☒ e Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ f u n'est pas accepté par A . ☒ g A a au moins un état accessible.
☒ h A n'est pas complet. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☒ c Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ f Tous les suffixes d'un mot sont distincts.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ A possède un état puits ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

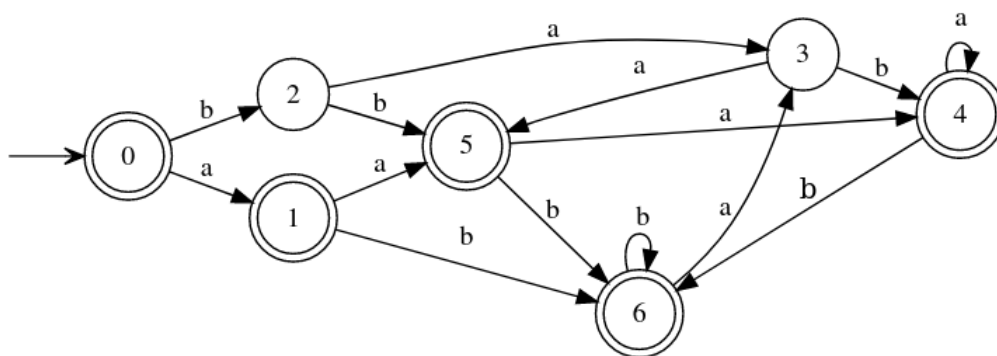
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

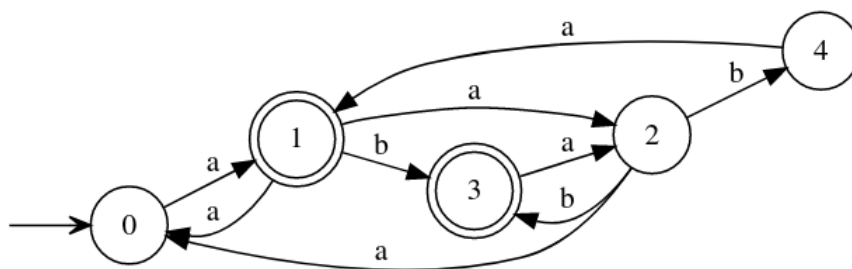
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐ b	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

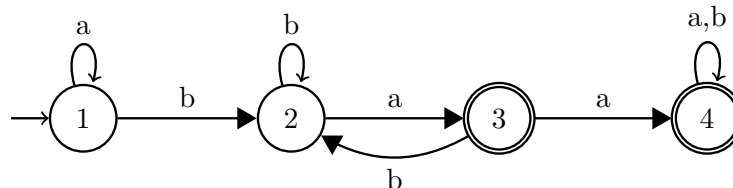
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 6 ☐ e 3 ☒ 4 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

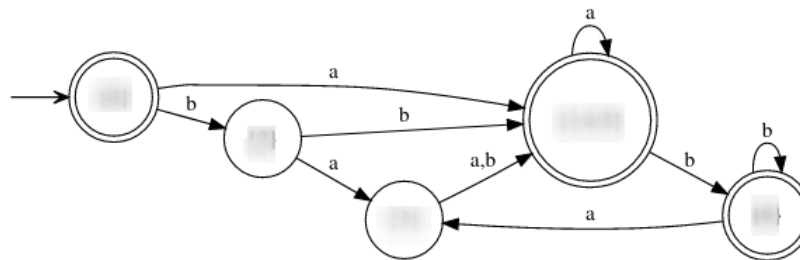
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



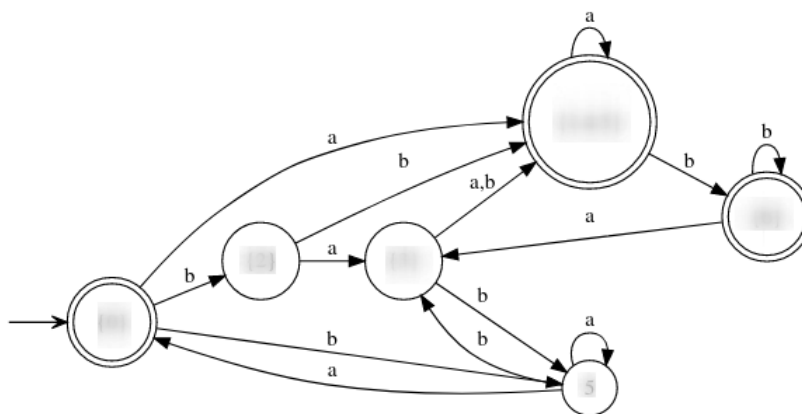
(-i-)



(-ii-)

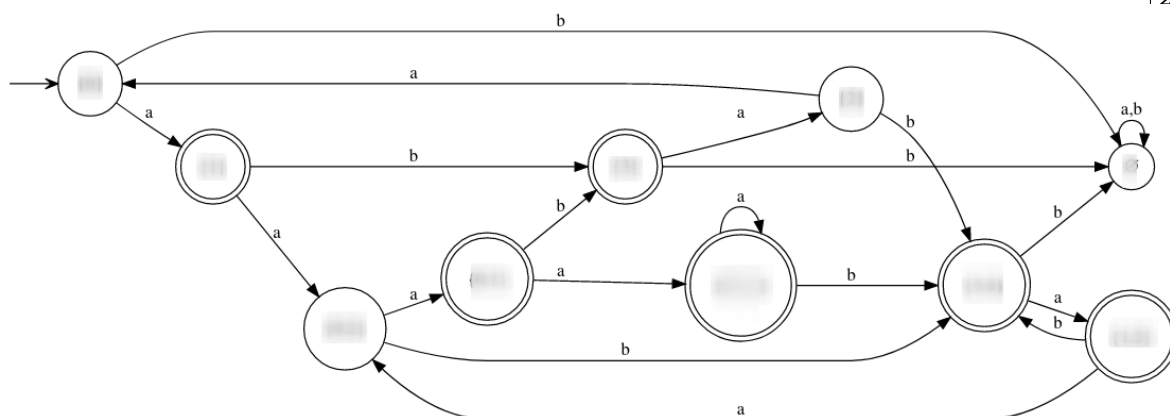


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



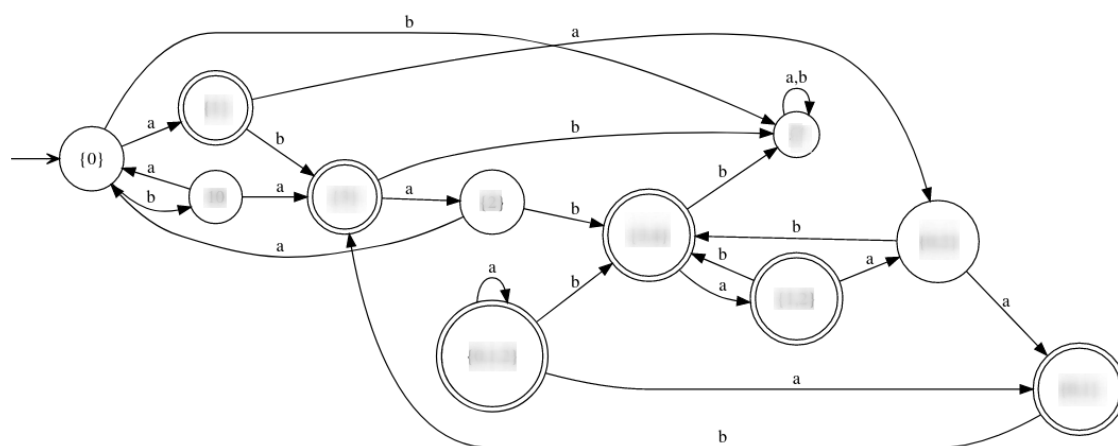
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

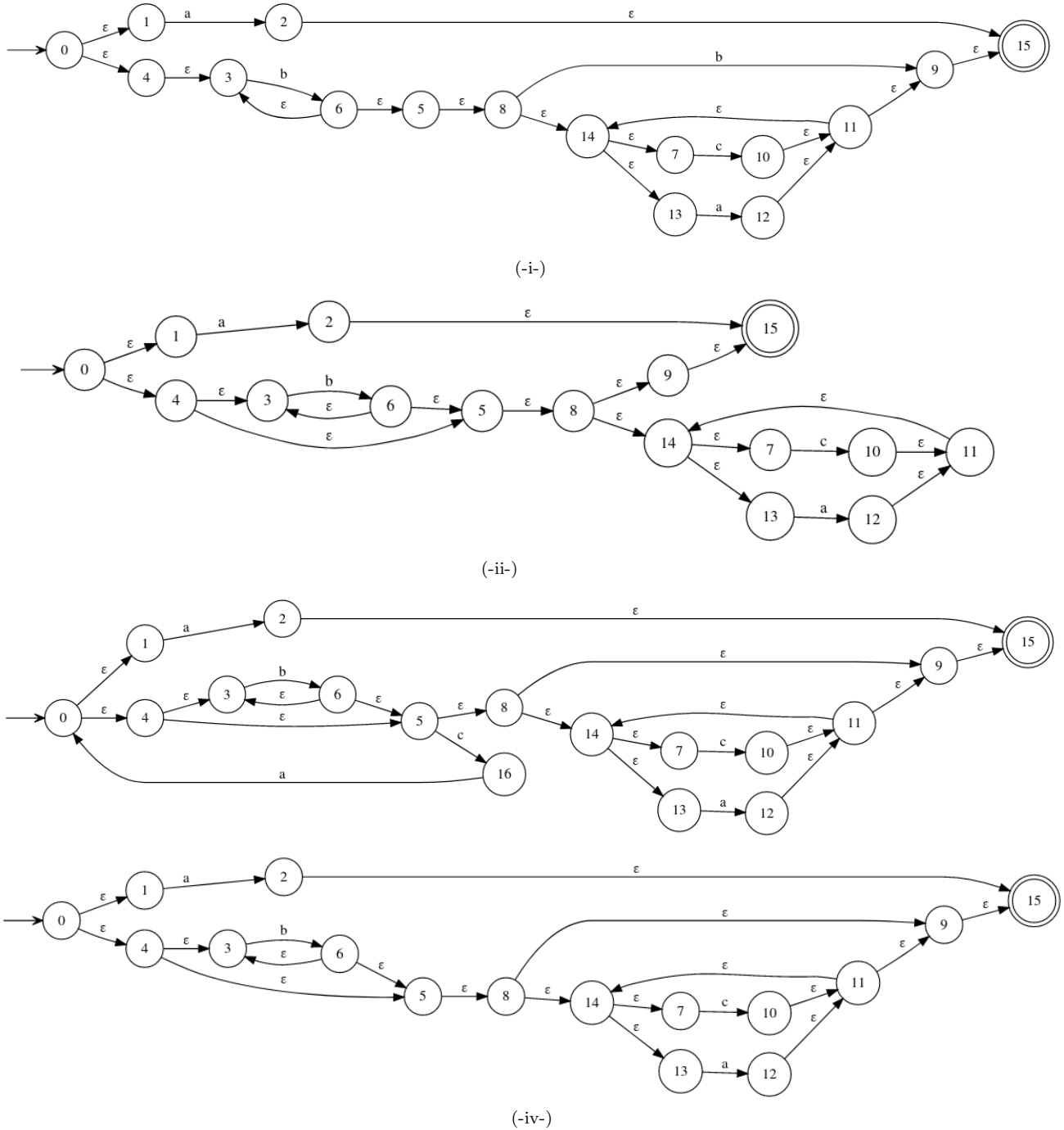
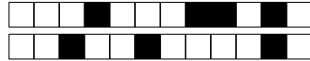


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a	b		d					i	j	k

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a	b			e						k		m	n

Question 6 :

a				e	f		h	i	j

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a		c	d		f	g	h	i

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a		c	d			g	h		j	k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

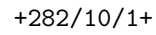
a		c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ c A accepte le langage universel. ☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ f A possède un état puits
- ☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ b Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ c Un mot est une application. ☒ d Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☒ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ f Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot peut être infini. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ i Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ j Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☒ k Un mot est une fonction. ☒ l Un mot peut être vide.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ c u est accepté par A .
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par facteur. ☒ b Σ^* est fermé par préfixe. ☐ c Σ est fermé par préfixe.
☐ d Σ est fermé par facteur. ☒ e Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ f Σ est fermé par suffixe. ☒ g Σ^* est fermé par suffixe.
☐ h Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a A a au moins un état accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
☒ c u n'est pas accepté par A .
☒ d Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ e A a au moins un état non co-accessible. ☐ f A n'a pas d'état accepteur.
☐ g A a au moins un état non accessible. ☒ h A n'est pas complet. ☒ i $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☒ c P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☒ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_1 = aX_1 + b$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^+aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^+aX_3$	☐ d	$X_2 = a^+bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

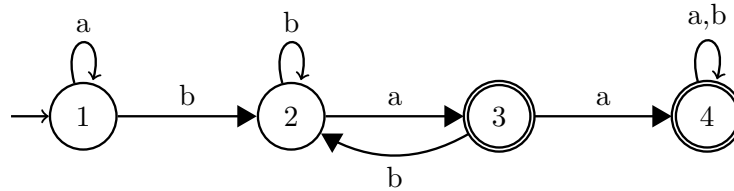
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 6 ☐ e 2 ☒ f 4 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

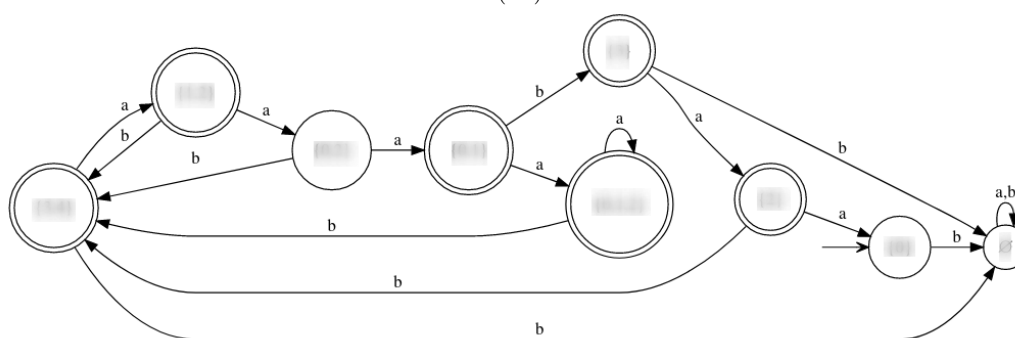
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



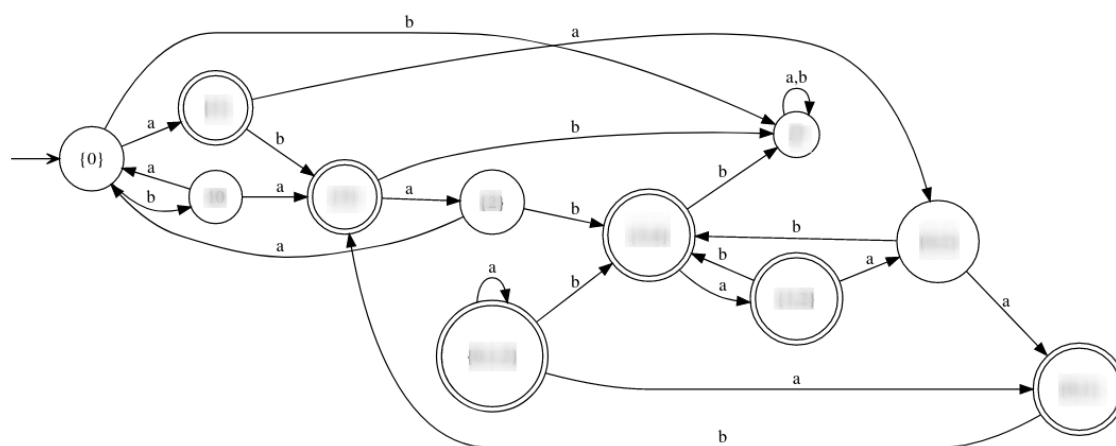
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

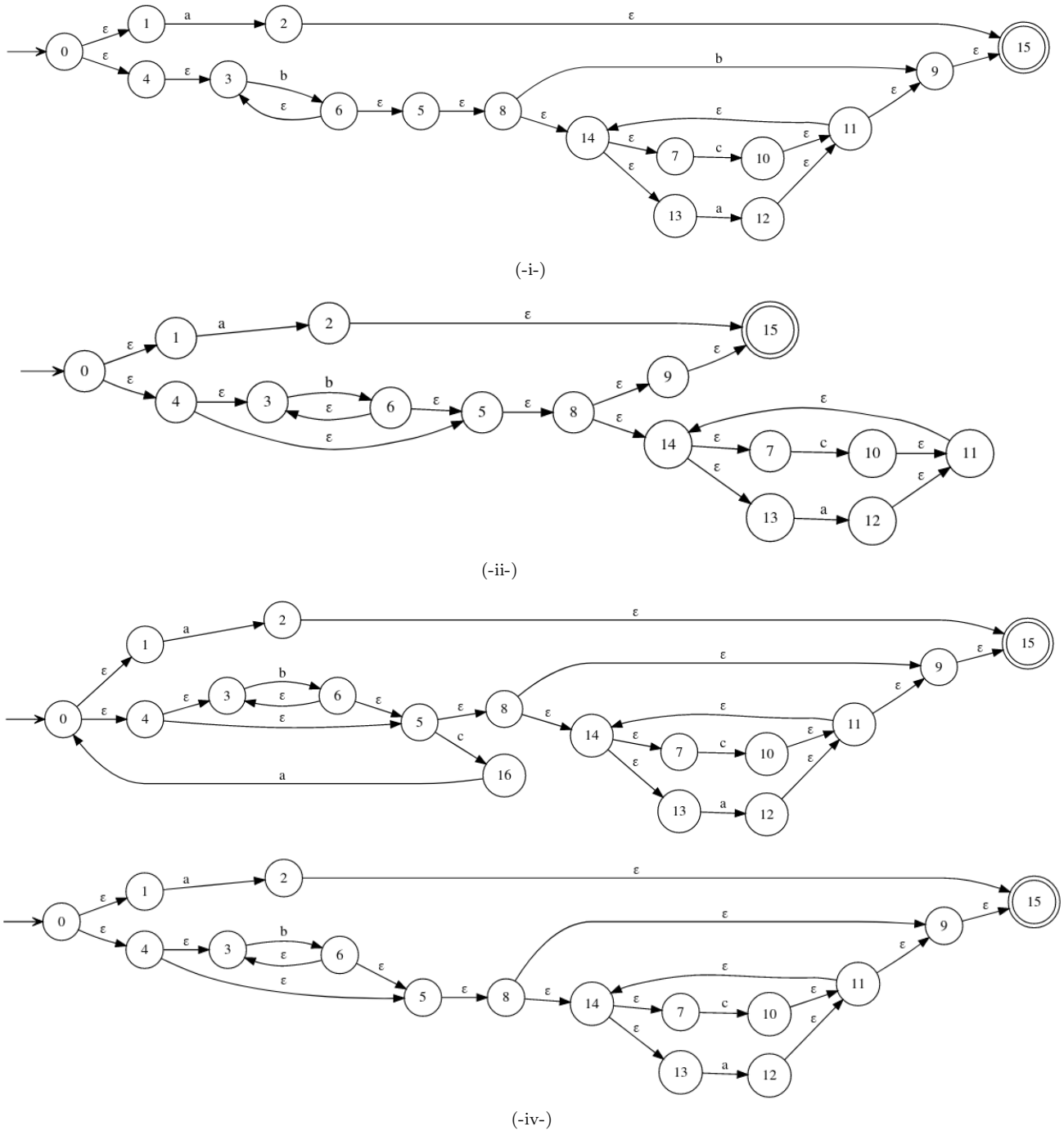


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c		e	f		h	i

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a						g	h		j			m	n

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 6 :

		c	d		f		h	i	j

Question 7 :

	b			e	f	g			j	k

Question 8 :

a			d	e

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a			d	e	f	g	h			k	l	m

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

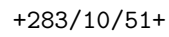
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot est une fonction.
- ☐ b Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ c Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ d Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ e Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ f Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ g Un mot peut être infini.
- ☐ h Un mot est une application.
- ☐ i Un mot peut être vide.
- ☐ j Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ k Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ l Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe.
- ☐ b Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ d Σ est fermé par facteur.
- ☐ e Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ f Σ est fermé par suffixe.
- ☐ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ h Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ b P est forcément déterministe.

- ☐ c Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ d u est accepté par A . ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☒ b L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☒ c $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ d A possède un état puits ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ f A accepte le langage universel. ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
- ☒ c Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☒ e A a au moins un état accessible.
- ☒ f A n'est pas complet. ☒ g $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ h u n'est pas accepté par A .
- ☐ i A a au moins un état non accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

- ☐ a $X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ ☐ c $X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☐ d $X_3 = aX_2 + cX_4$ ☐ e $X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$ ☐ f $X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☐ g $X_1 = aX_1 + b$ ☐ h $X_2 = bX_2 + aX_3$ ☐ i $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ j $X_4 = a + b$
☐ k $X_2 = bX_3 + aX_2$ ☐ l $X_3 = aX_3 + cX_4$ ☐ m $X_1 = aX_1 + bX_2$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_4 = a + b$ ☐ b $X_4 = (a+b)^*$ ☐ c $X_4 = \epsilon + a + b$ ☐ d $X_4 = a^* + b^*$
☐ e $X_4 = a^* + b^* + \epsilon$ ☐ f $X_4 = (a+b)X_4$ ☐ g Aucune des équations proposées.
☐ h Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_1 = a^*b$ ☐ b $X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$ ☐ c $X_1 = a^+bX_2$ ☐ d $X_1 = a^*b + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$ ☐ b $X_2 = b^*aX_3$ ☐ c $X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$ ☐ d $X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

- ☐ a $X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ b $X_3 = (a(a+b)^*)^*$ ☐ c $X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d $X_3 = a(a+b)^*$ ☐ e Aucune des équations proposées.
☐ f Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

- ☐ a celle obtenue par $X_3 + X_4$ ☐ b celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

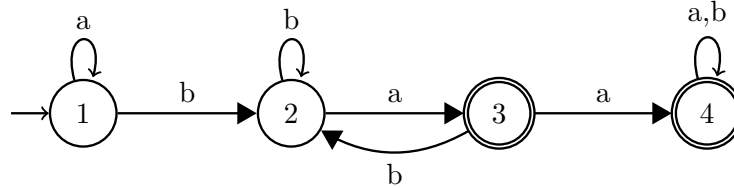
- ☐ a $a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$ ☐ b $a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$ ☐ c $(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
☐ d Aucune des expressions régulières proposées.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

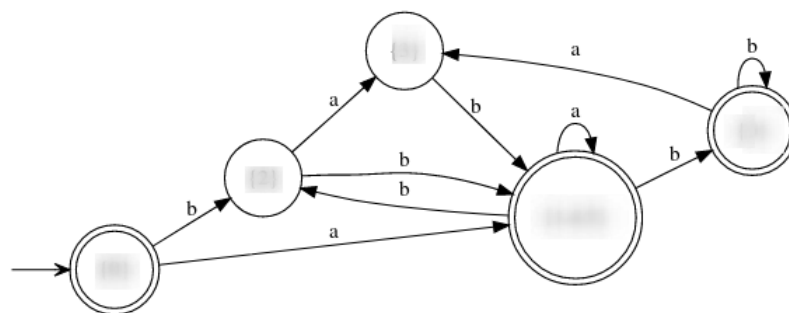
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 1 ☐ c 2 ☐ d 5 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 3

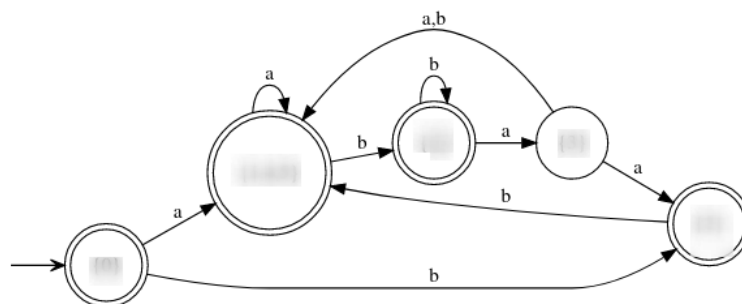
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

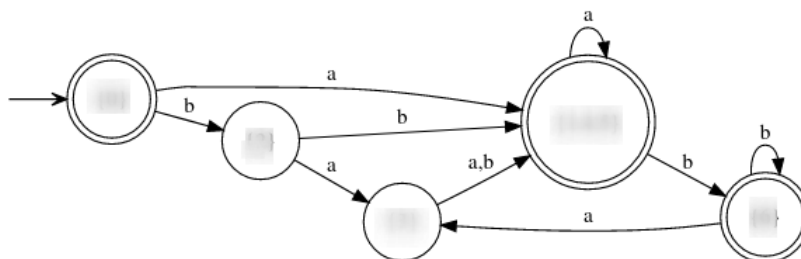
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



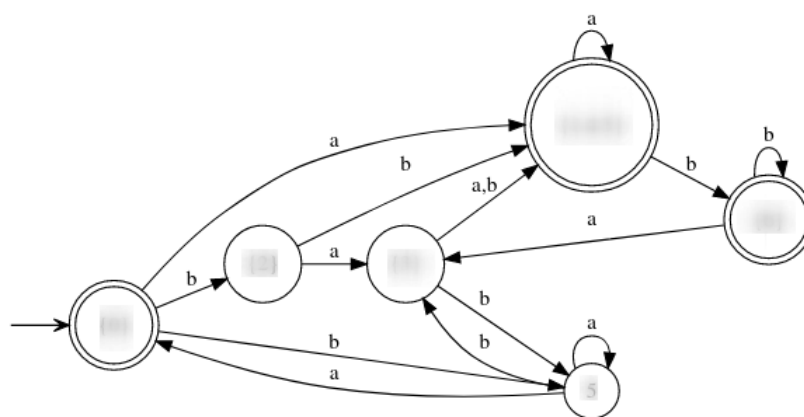
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

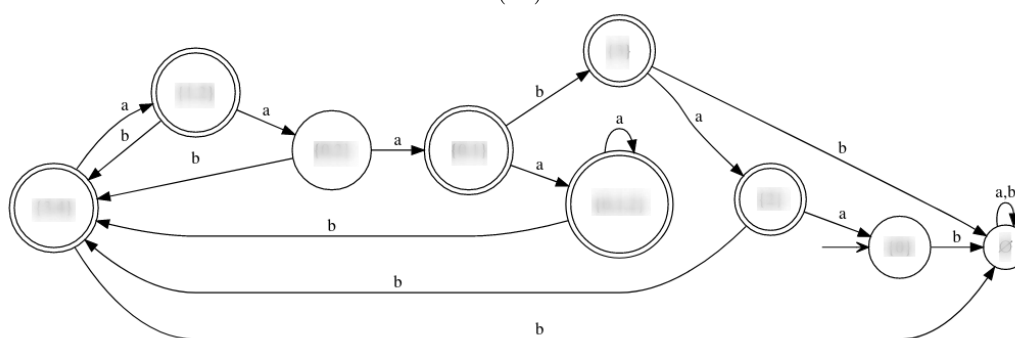
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



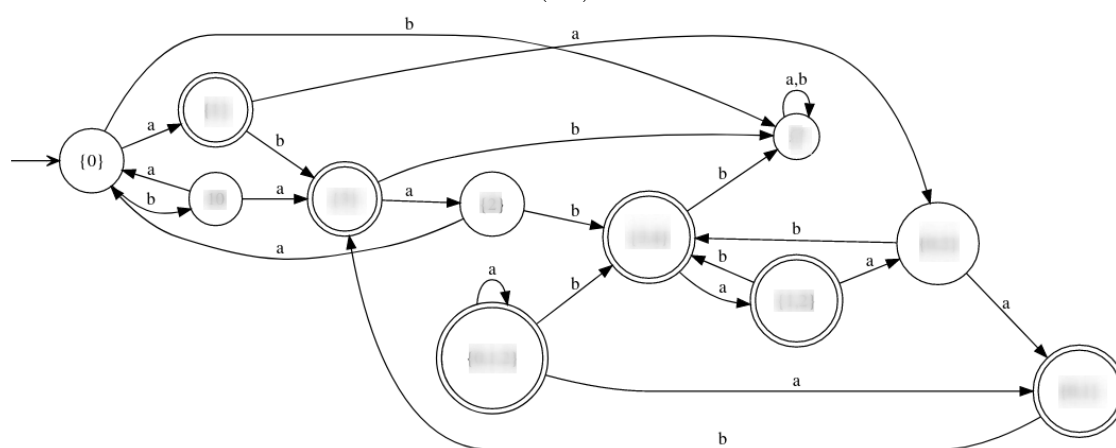
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

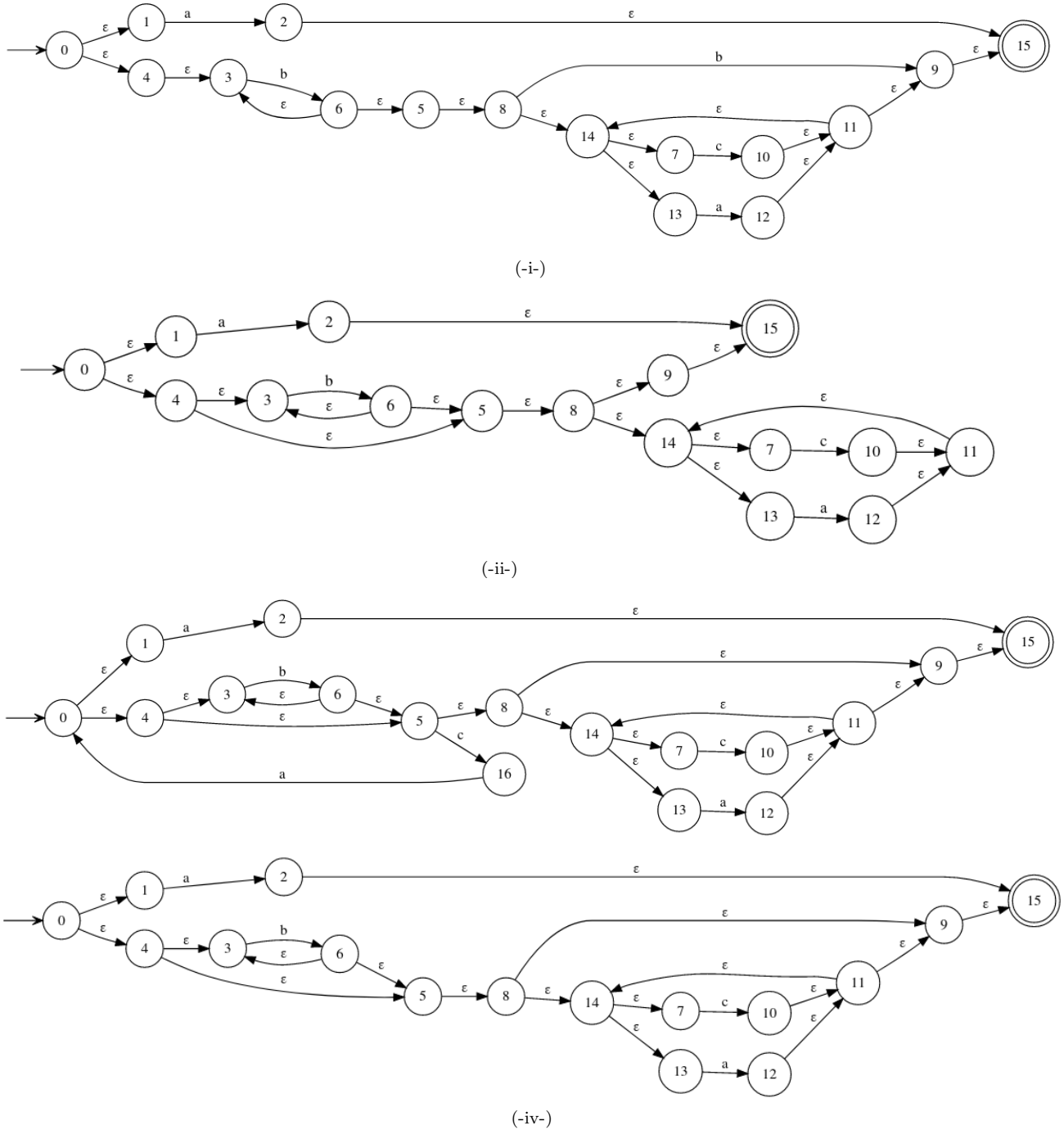


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

			d		f	g				k		m	n

Question 4 :

a		c	d		f			i	j

Question 5 :

		c	d	e

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

a			d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b		d					i	j	k

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b		d		f	g		i	j	k	l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

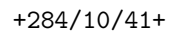
	b	c	d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b A est complet. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ b P est forcément déterministe.
☒ c $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ b u n'est pas accepté par A . ☐ c A a au moins un état non accessible.
☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☐ e A n'a pas d'état accepteur.
☒ f A n'est pas complet.
☒ g Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ h A a au moins un état accessible. ☐ i A a au moins un état co-accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ c Σ^* est fermé par facteur. ☒ d Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
 ☐ Σ est fermé par suffixe.
 ☐ Σ est fermé par facteur.
 ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
 ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
 ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
 ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
 ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
 ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
 ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
 ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
 ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
 ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
 ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
 ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-.
 ☐ la Figure 3-iii-.
 ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-iv-.
 ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iv-.
 ☐ la Figure 4-i-.
 ☐ la Figure 4-iii-.
 ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ d	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
		☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$		
☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ m	$X_1 = aX_1 + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

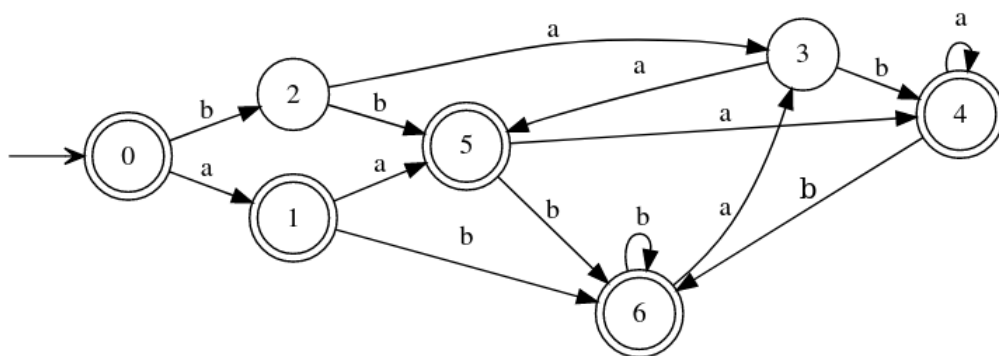
☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

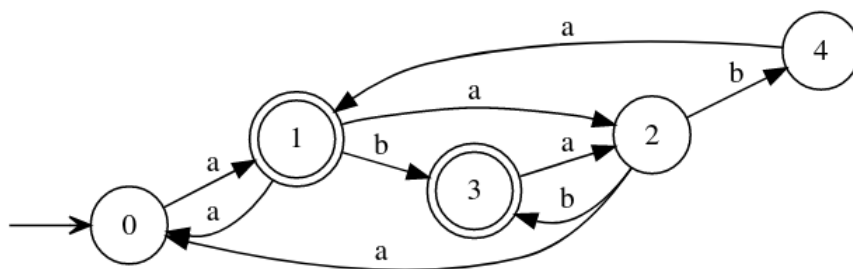
☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

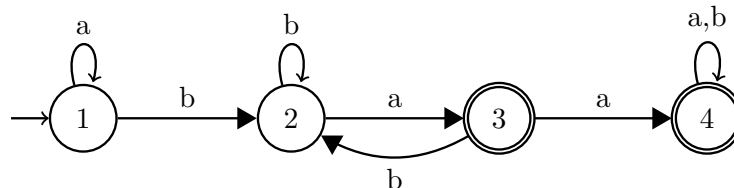
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^* a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 5 ☐ f 1 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Examen final du 5/01/2022
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2021/2022

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 3 :

a			d	e

Question 4 :

		c	d	e				i	j	k

Question 5 :

	b				f	g	h	i	j

Question 6 :

a		c	d	e		g	h	i

Question 7 :

a				e				i		k		m	n

Question 8 :

a	b	c	d	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a			d	e	f	g	h	i		k		m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

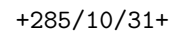
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état co-accessible.
☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.
☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot peut être infini. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot est une fonction.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Σ est fermé par suffixe.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A accepte le langage universel.
☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ u est accepté par A .
☐ A est complet. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ A a des états accepteurs.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ f	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ k	$X_4 = a + b$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

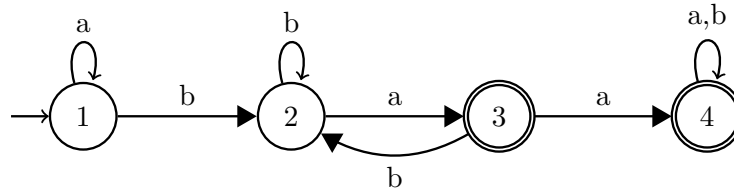
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 0 ☐ c 3 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 6 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)

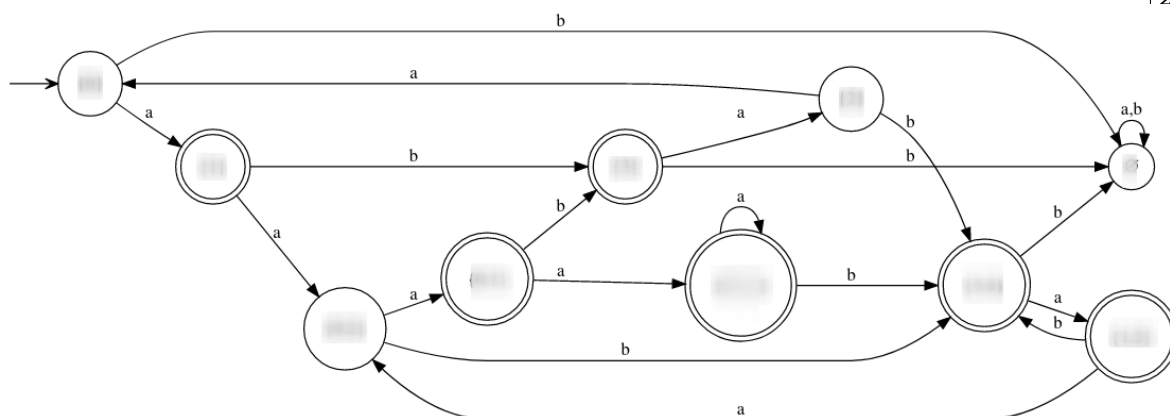


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

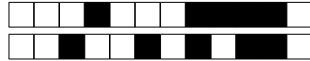


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b   e f g   j k

Question 3 :  b  d e

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a  c      i j   m n

Question 6 :   c d  f  h i j

Question 7 :  b c d e  g h i

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 :  b c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a  c   f g h i  k l m

Question 12 : a  c d e f g h

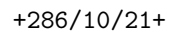
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 :  b

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction.
 ☐ Un mot est une application.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
 ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
 ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide.
 ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe.
 ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être infini.
 ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ u est accepté par A .
 ☐ A a des états accepteurs.
 ☐ A est complet.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
 ☐ Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
 ☐ A accepte le langage universel.
 ☐ A possède un état puits
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
 ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.

- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☒ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☒ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☐ c Σ est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☒ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A a au moins un état co-accessible.
- ☒ A a au moins un état accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☒ A n'est pas complet.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ g A a au moins un état non accessible. ☐ h A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_1 = aX_1 + b$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

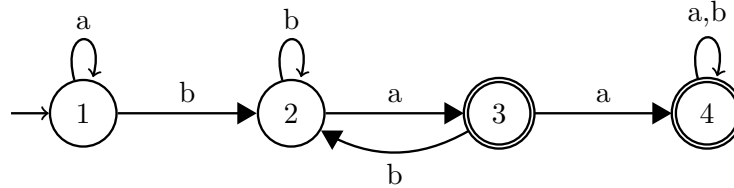
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 2 ☒ c 4 ☐ d 3 ☐ e 6 ☐ f 1 ☐ g 0

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

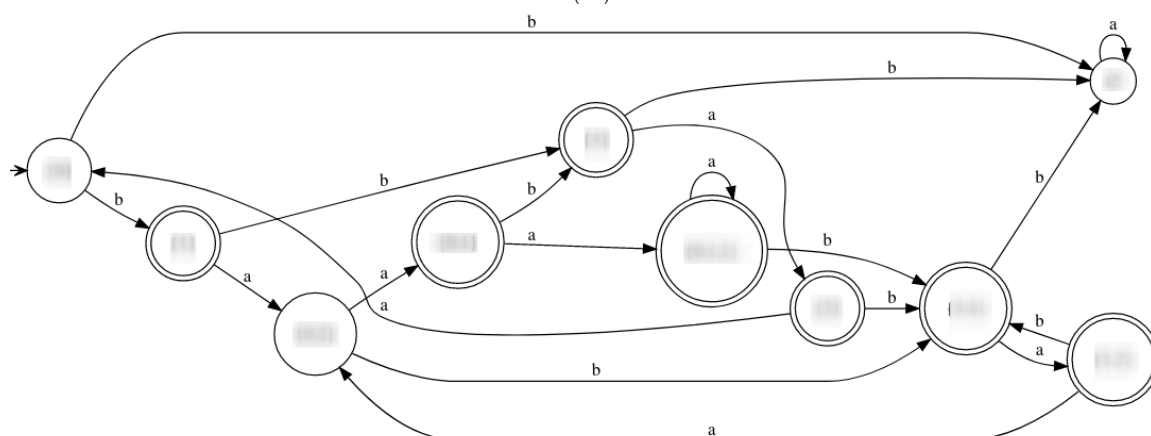


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

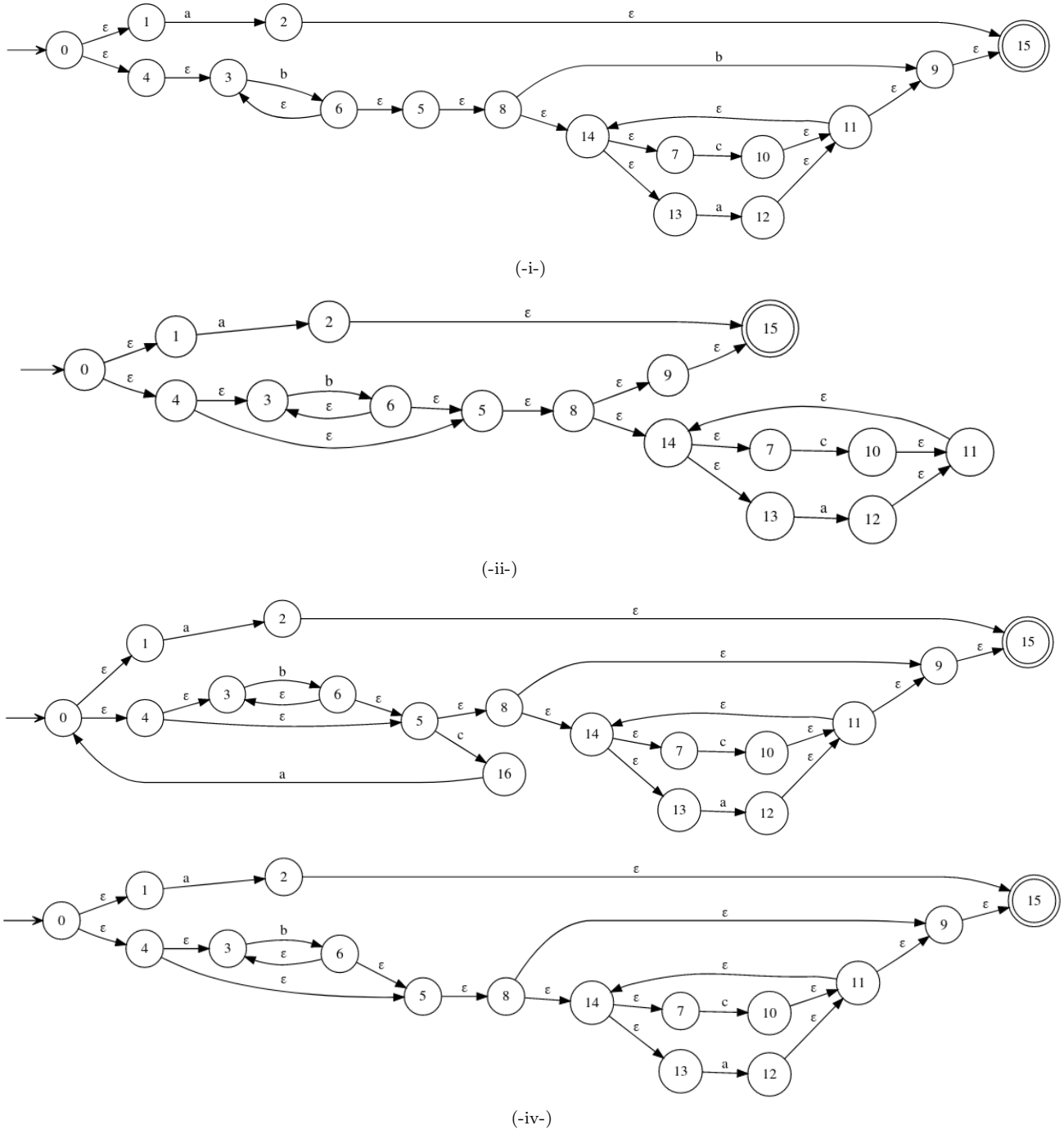
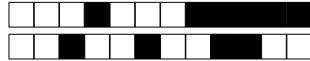


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :        h i j k  m n

Question 3 : a b c d e f g 

Question 4 : a   d e f g h i

Question 5 : a b c d 

Question 6 : a   d e

Question 7 :  b c d e    i j

Question 8 : a b     g h  j k

Question 9 : a b c  e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d  f g  i   l m

Question 12 : a b  d e f g h

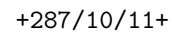
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ c A n'a pas d'état accepteur.
- ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ h A a au moins un état co-accessible.
- ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ f nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ g A possède un état puits
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFND A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ c A a des états accepteurs. ☐ d u est accepté par A . ☐ e A est complet.
☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ a Un mot peut être vide. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ d Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☒ e Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☒ g Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ h Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☒ i Un mot est une application. ☒ j Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ k Un mot est une fonction. ☐ l Un mot peut être infini.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☒ c Σ^* est fermé par préfixe.
☐ d Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ e Σ^* est fermé par suffixe.
☒ f Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ g Σ est fermé par facteur.
☒ h Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☒ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☒ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + b$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ d	$X_4 = a + b$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

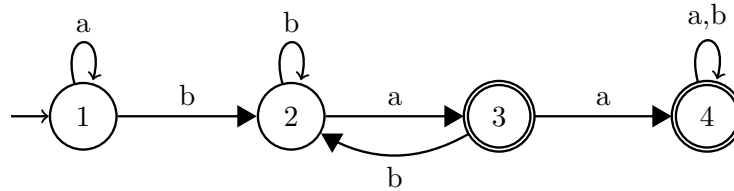
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 2 ☐ c 6 ☒ d 4 ☐ e 0 ☐ f 1 ☐ g 5

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

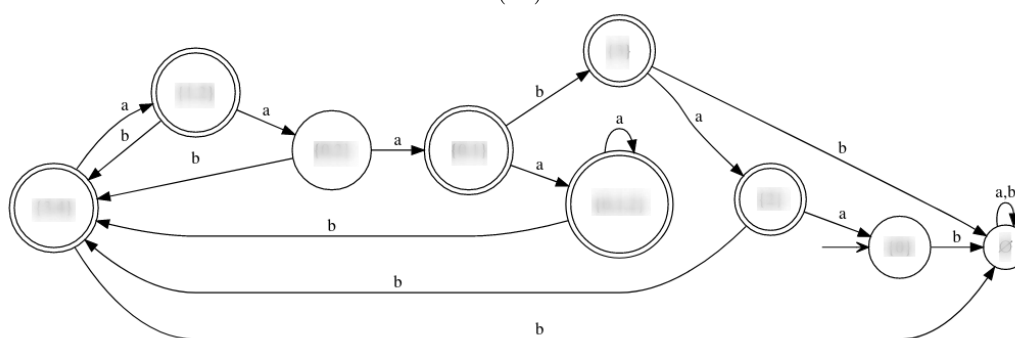
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



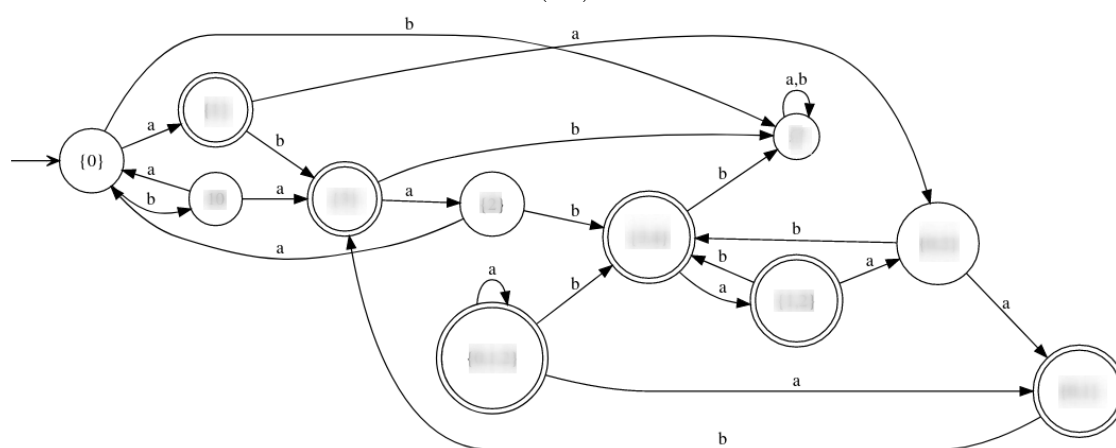
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

a		c				h	i	j	k

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

a	b			e	f	g	h	i

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

	b	c			f					l	m	n

Question 8 :

a	b		d			g		i	j

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a	b	c	d	e				i		k	l	m

Question 12 :

	b	c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

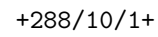
a	b		d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ c A a au moins un état co-accessible.
- ☐ d A a au moins un état non accessible. ☐ e A a au moins un état non co-accessible.
- ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☒ A n'est pas complet. ☒ u n'est pas accepté par A .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A est complet. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ c Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une fonction.
- ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☒ Un mot est une application.

- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A possède un état puits
☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ f	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
		☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

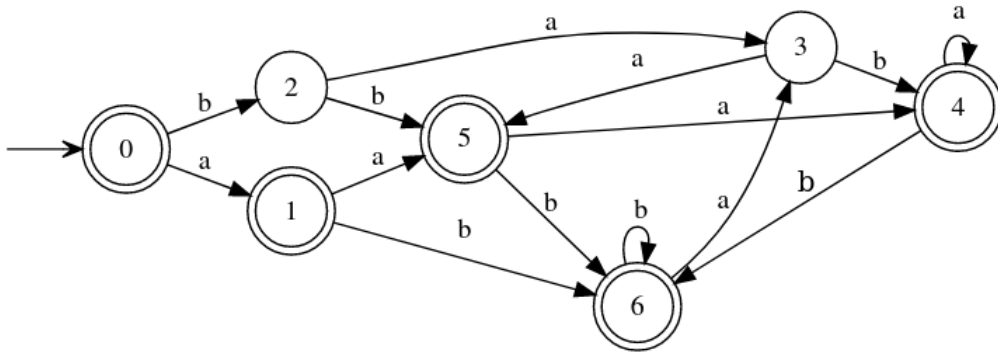
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☒ c 4 ☐ d 5 ☐ e 2 ☐ f 0 ☐ g 1

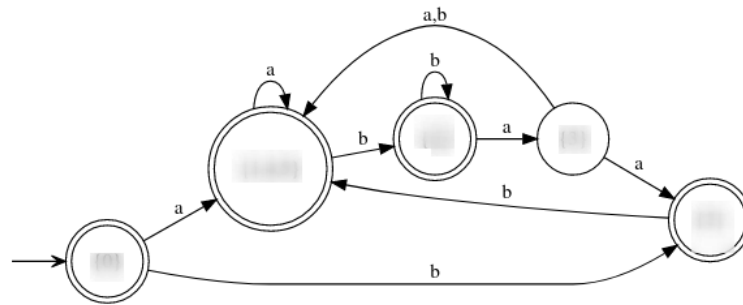
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



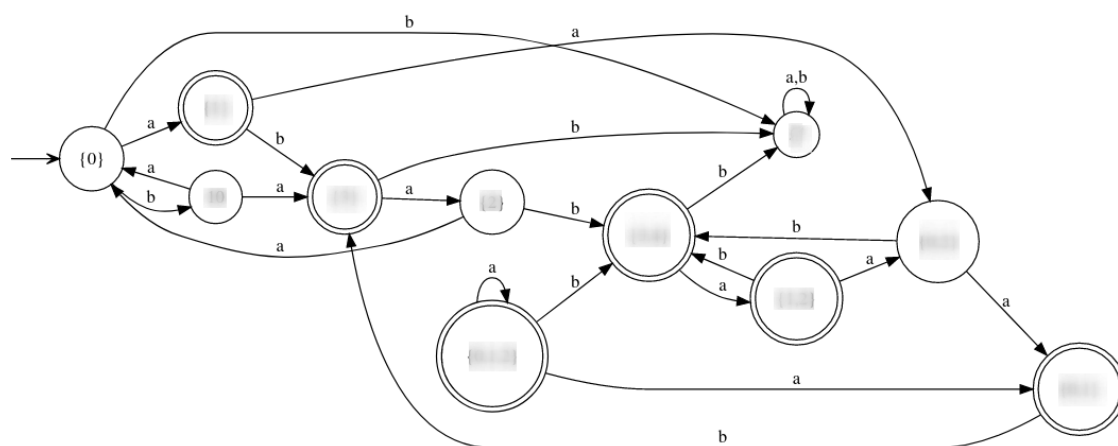
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	

Question 3 :

a		c	d	e					j	k

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 5 :

a		c						i			l	m	n

Question 6 :

	b		d	e	f	g	h	i

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a		c			f	g		i	j

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b		d	e	f	g		i		k	l	

Question 12 :

a		c	d	e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a		c	d	e	f

Question 15 :

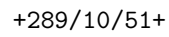
a	b	c		e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☐ Un mot est une fonction.
- ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ Un mot est une application.
- ☐ e Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ h Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ Un mot peut être vide.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ k Un mot peut être infini.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par suffixe.
- ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ c Σ est fermé par préfixe.
- ☐ d Σ est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a au moins un état non co-accessible. ☐ b A n'a pas d'état accepteur.
- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ d A a au moins un état co-accessible. ☒ u n'est pas accepté par A . ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g A a au moins un état non accessible. ☒ A a au moins un état accessible.
- ☒ A n'est pas complet.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e A accepte le langage universel.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A a des états accepteurs. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c u est accepté par A .
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A est complet.
- ☐ f Les états de A sont tous accessibles.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☒ la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = aX_1 + b$
☐ d	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ h	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_2$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$
☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$				
☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

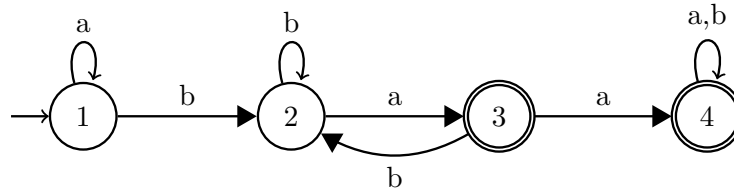
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 6 ☐ c 2 ☐ d 1 ☒ 4 ☐ f 5 ☐ g 3

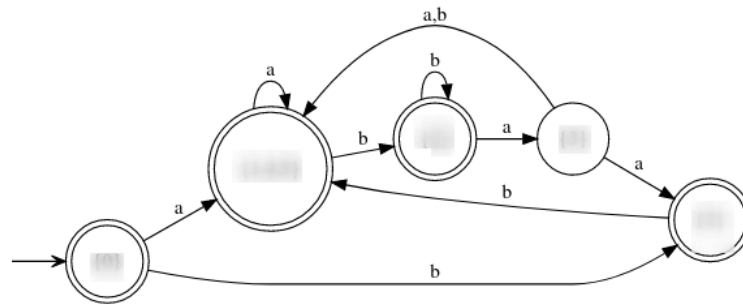
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

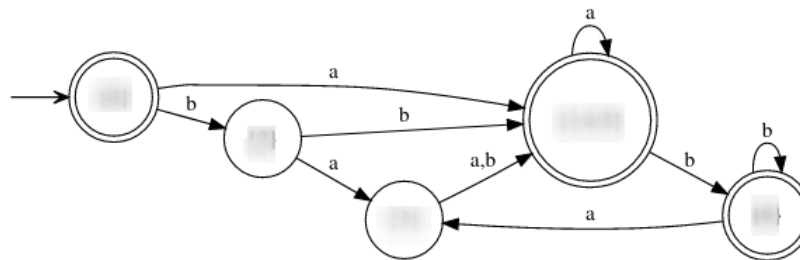
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



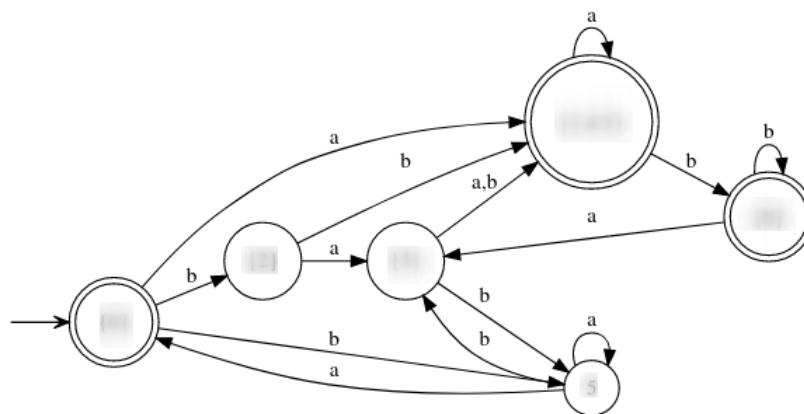
(-i-)



(-ii-)

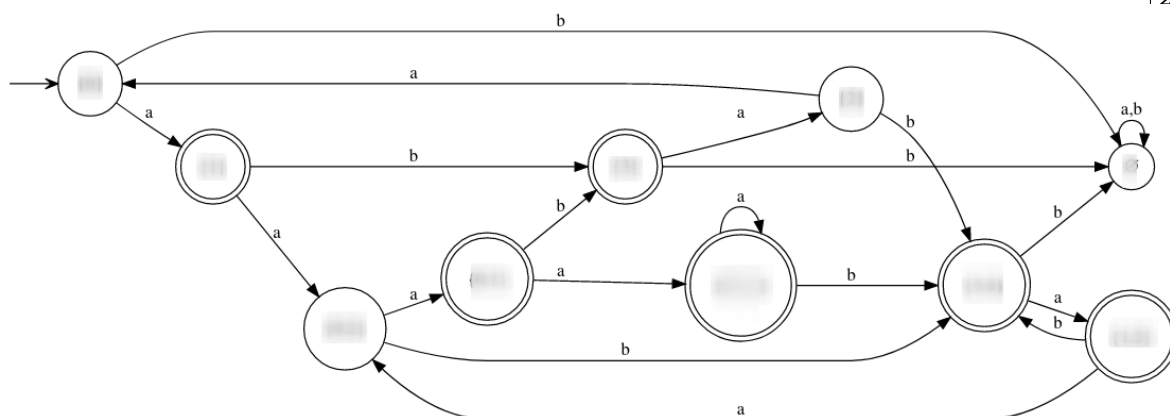


(-iii-)



(-iv-)

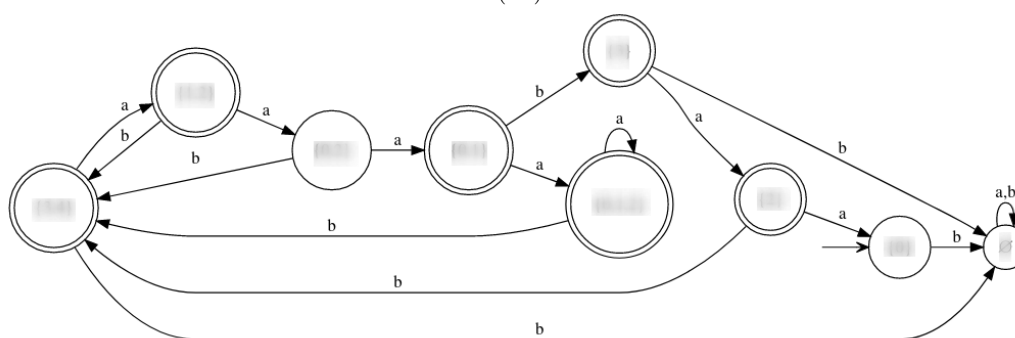
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



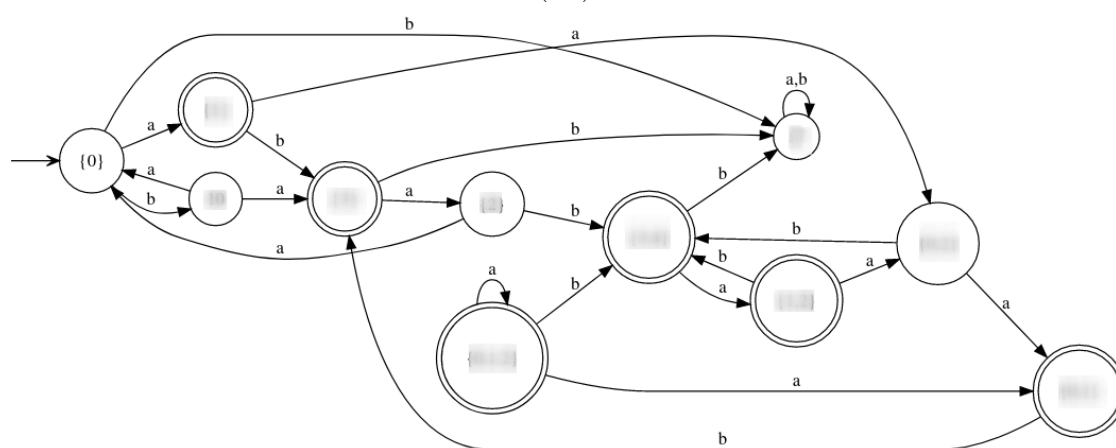
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e

Question 3 :

				e		g	h			k		m	n

Question 4 :

a	b	c	d					i	j

Question 5 :

a	b		d			g			j	k

Question 6 :

a	b	c	d	

Question 7 :

a	b		d	e		g	h	i

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b		d	e

Question 10 :

a		c	d

Question 11 :

a		c	d	e		g	h	i			l	m

Question 12 :

a	b	c	d		f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b		d	e	f

Question 15 :

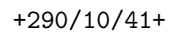
a	b	c		e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ d Σ est fermé par facteur. ☐ e Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ h Σ est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b Tous les états de A sont accepteurs.
☐ c A possède un état puits
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ e A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ b Un mot peut être infini.
☐ c Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Un mot est une application. ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.

- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une fonction. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ A a des états accepteurs. ☐ A est complet.
☐ Les états de A sont tous accessibles.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état non co-accessible.
☐ A n'est pas complet.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A a au moins un état accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A a au moins un état non accessible.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = a + b$	☐ b	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ j	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ k	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a + b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

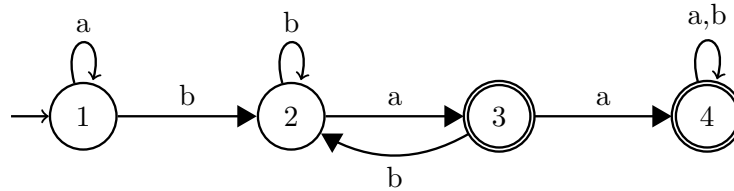
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 6 ☐ b 3 ☐ c 0 ☐ d 5 ☐ e 1 ☒ f 4 ☐ g 2

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

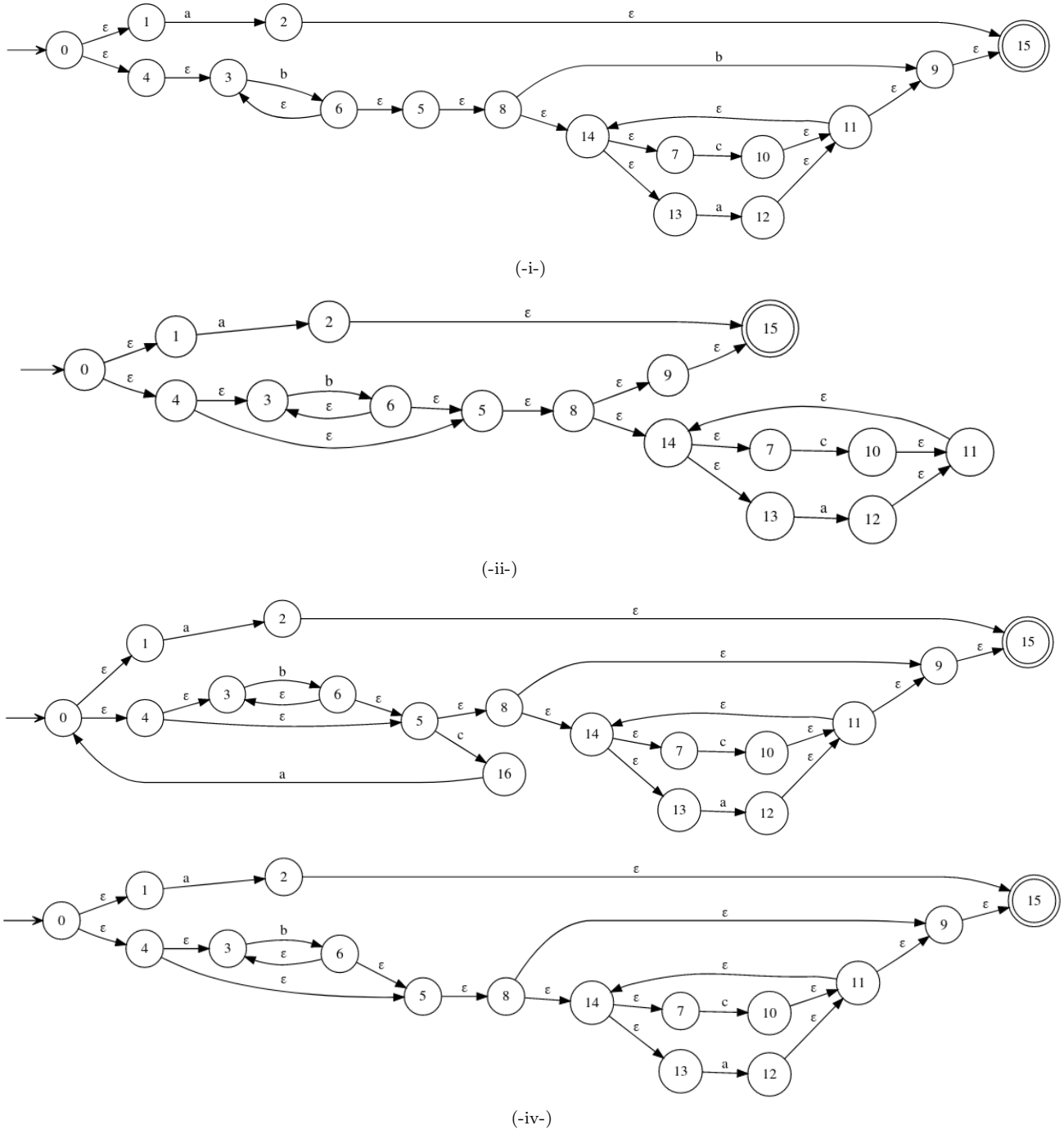


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e			h	i	j

Question 3 :

a	b	c		e		g	h	i

Question 4 :

a	b	c	d	

Question 5 :

	b	c						j		l	m	n

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a	b					g		i	j	k

Question 9 :

	b	c	d	e

Question 10 :

	b	c	d

Question 11 :

a	b	c	d			g	h		j	k	l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

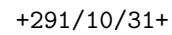
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a		c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐	Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot est une fonction.
☐	Un mot possède une infinité d'extensions.	☐	Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐	Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐	Un mot peut être vide.
☐	Un mot possède une infinité de suffixe.	☐	Un mot est une application.
☐	Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐	Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐	Un mot possède une infinité de préfixe.	☐	Un mot peut être infini.
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.		

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐	L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.		
☐	$ \delta = Q \times \Sigma $.	☐	Tous les états de A sont accepteurs.
☐	A possède un état puits	☐	$ \delta = Q ^2 \times \Sigma $.
☐	☐		A accepte le langage universel.
☐	☐		
☐	nécessairement $ Q \geq 2$.		
☐	Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.		
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.		

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

☐	L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐	Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐	Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐	Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐	Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ A est complet.
☐ A a des états accepteurs. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ u est accepté par A .

☐ Les états de A sont tous accessibles.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.

☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.

☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.

☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état non accessible.

☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.

☐ A a au moins un état accessible. ☐ A n'a pas d'état accepteur.

☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état co-accessible.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.

☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ c	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_4 = a + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

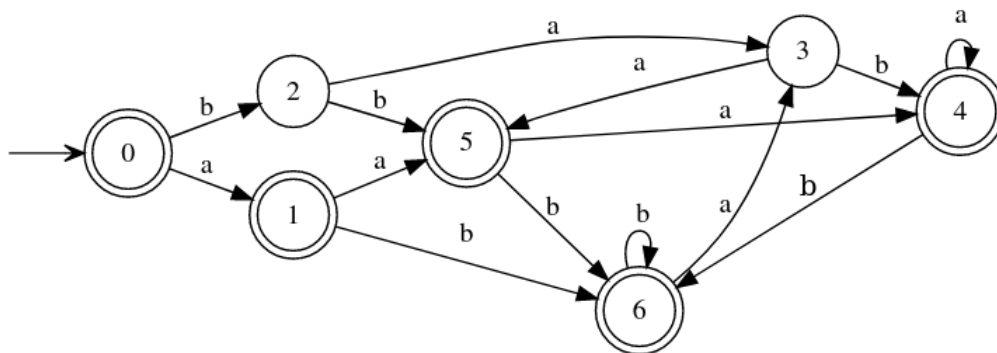
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

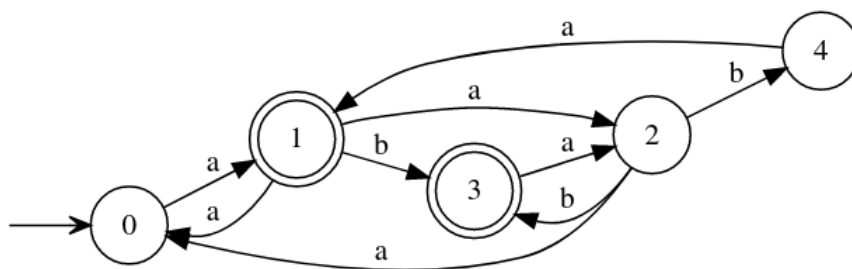
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

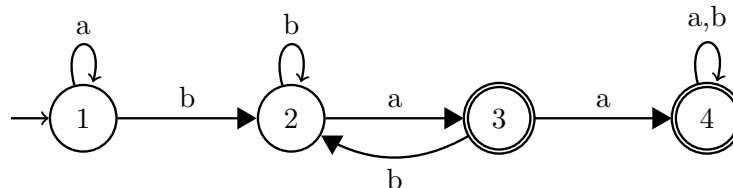
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

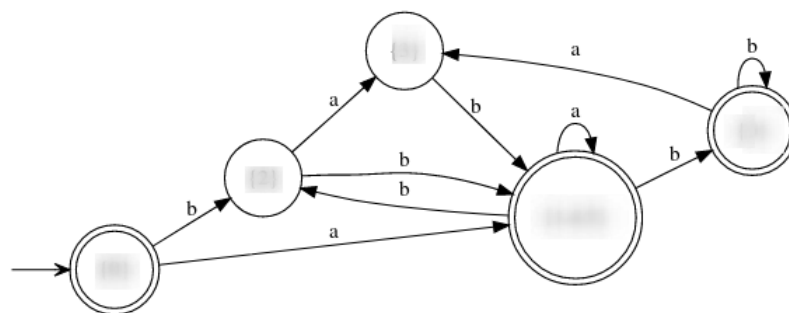
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 6 ☒ c 4 ☐ d 0 ☐ e 2 ☐ f 3 ☐ g 1

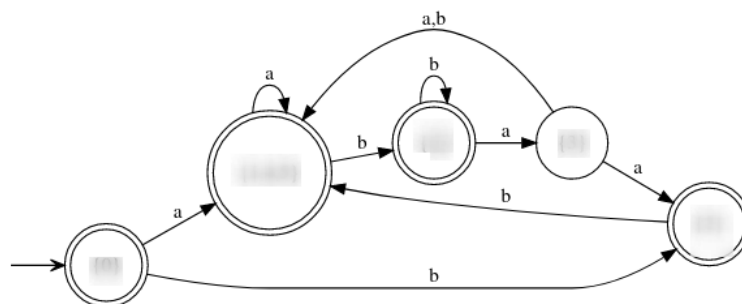
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

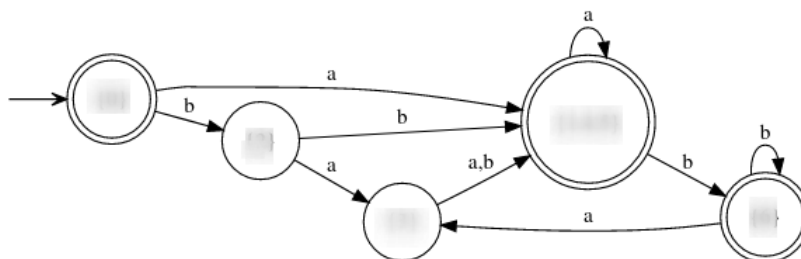
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



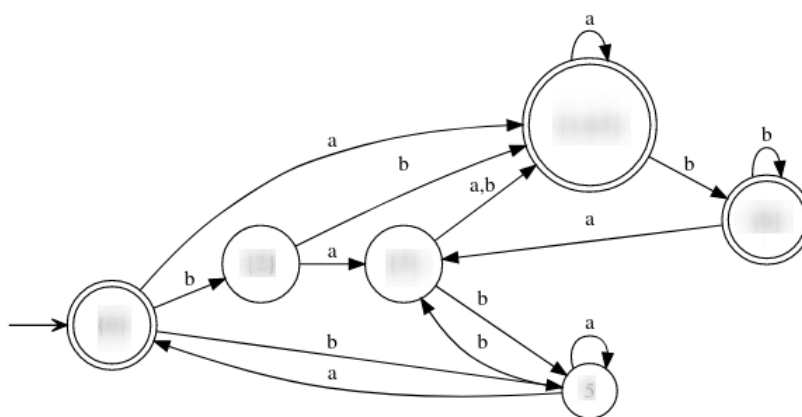
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

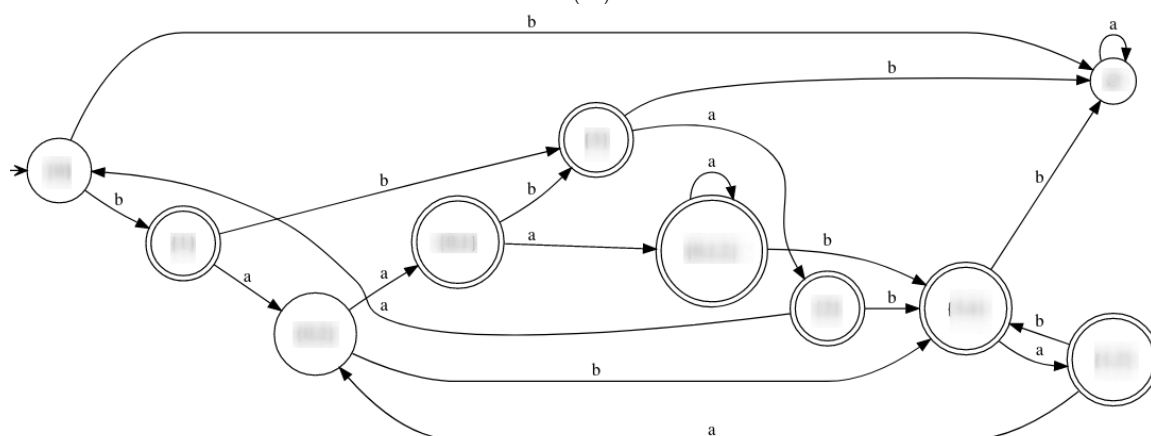


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

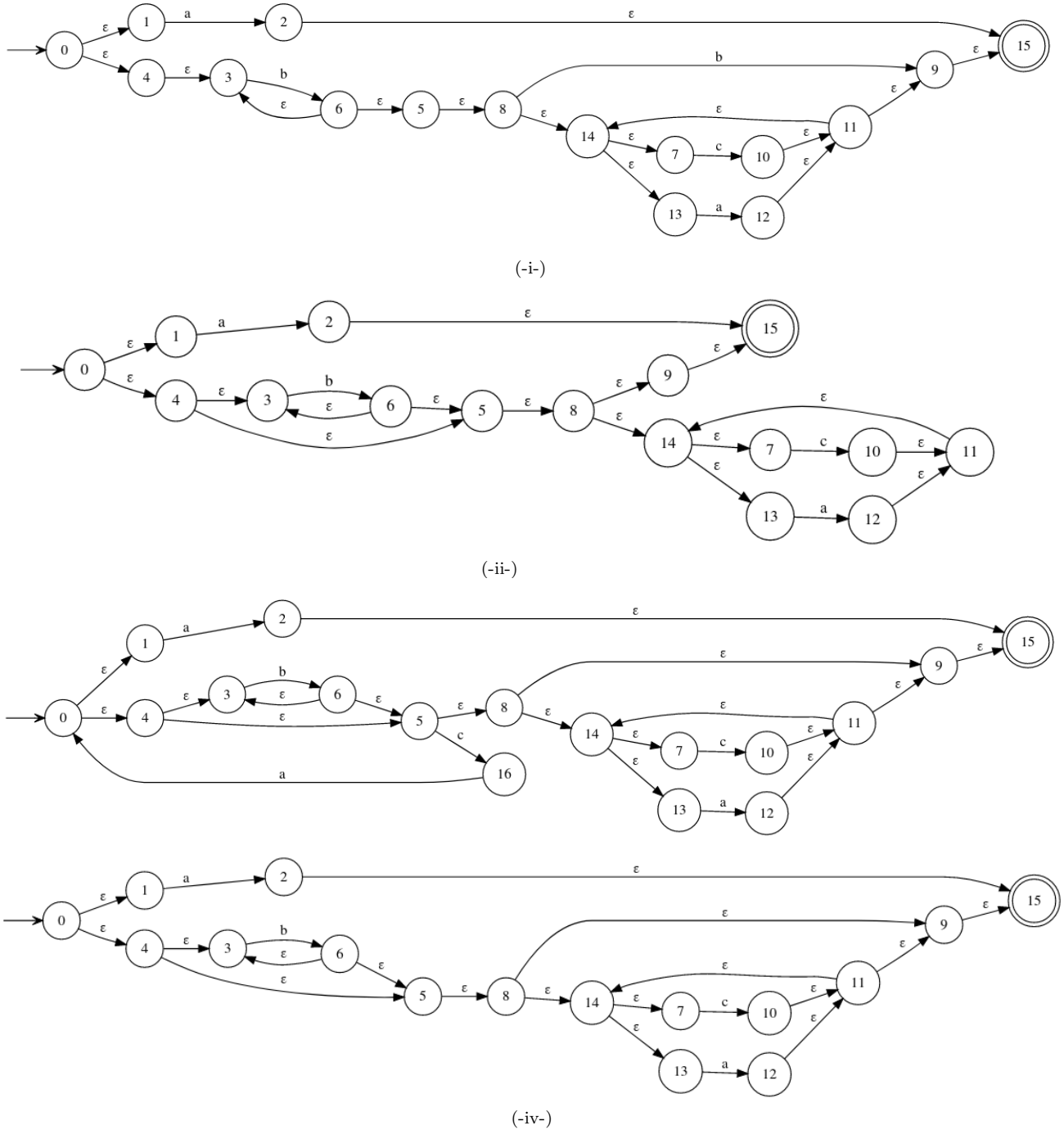


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d   g    k l m n

Question 3 :  b c d  f g h i

Question 4 : a b c d 

Question 5 : a   d e

Question 6 : a b c d e f g 

Question 7 : a b  d   g  i j

Question 8 :   c d   g  i j k

Question 9 :  b c d e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a b c d e f  h   k  m

Question 12 :  b c d e f g h

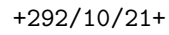
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 : a b  d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ f A possède un état puits ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ a Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☐ P est forcément déterministe.
☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ c Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ d A a des états accepteurs.
- ☐ e A est complet. ☐ f u est accepté par A .
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ a $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ b A a au moins un état co-accessible. ☒ c A n'est pas complet.
- ☐ d A a au moins un état non accessible. ☒ e u n'est pas accepté par A .
- ☒ f Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ g A n'a pas d'état accepteur. ☒ h A a au moins un état accessible.
- ☐ i A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ b Un mot est une application.
- ☒ c Un mot possède une infinité d'extensions. ☒ d Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ e Un mot peut être infini. ☒ f Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ g Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ i Un mot peut être vide. ☒ j Un mot est une fonction.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ l Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii- ☒ b la Figure 3-iii- ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-iv- ☐ e la Figure 3-i-

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii- ☐ b la Figure 4-iv- ☒ c la Figure 4-i- ☐ d la Figure 4-iii-

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ e	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ l	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
		☐ m	$X_1 = aX_1 + b$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

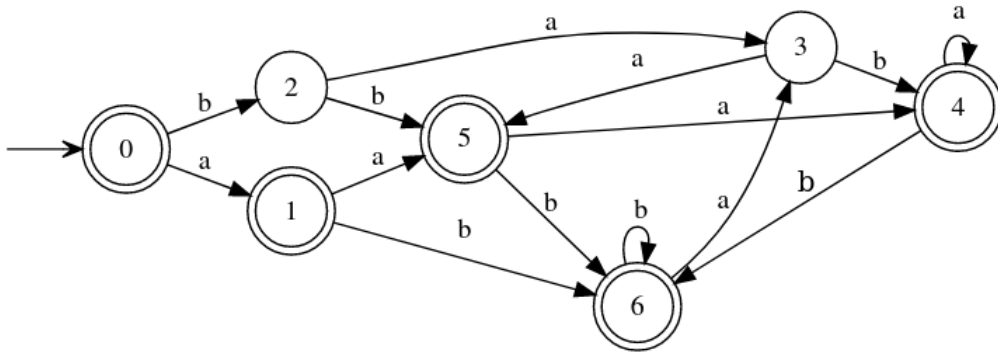
☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☐ b 1 ☐ c 5 ☐ d 3 ☐ e 2 ☒ f 4 ☐ g 6

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

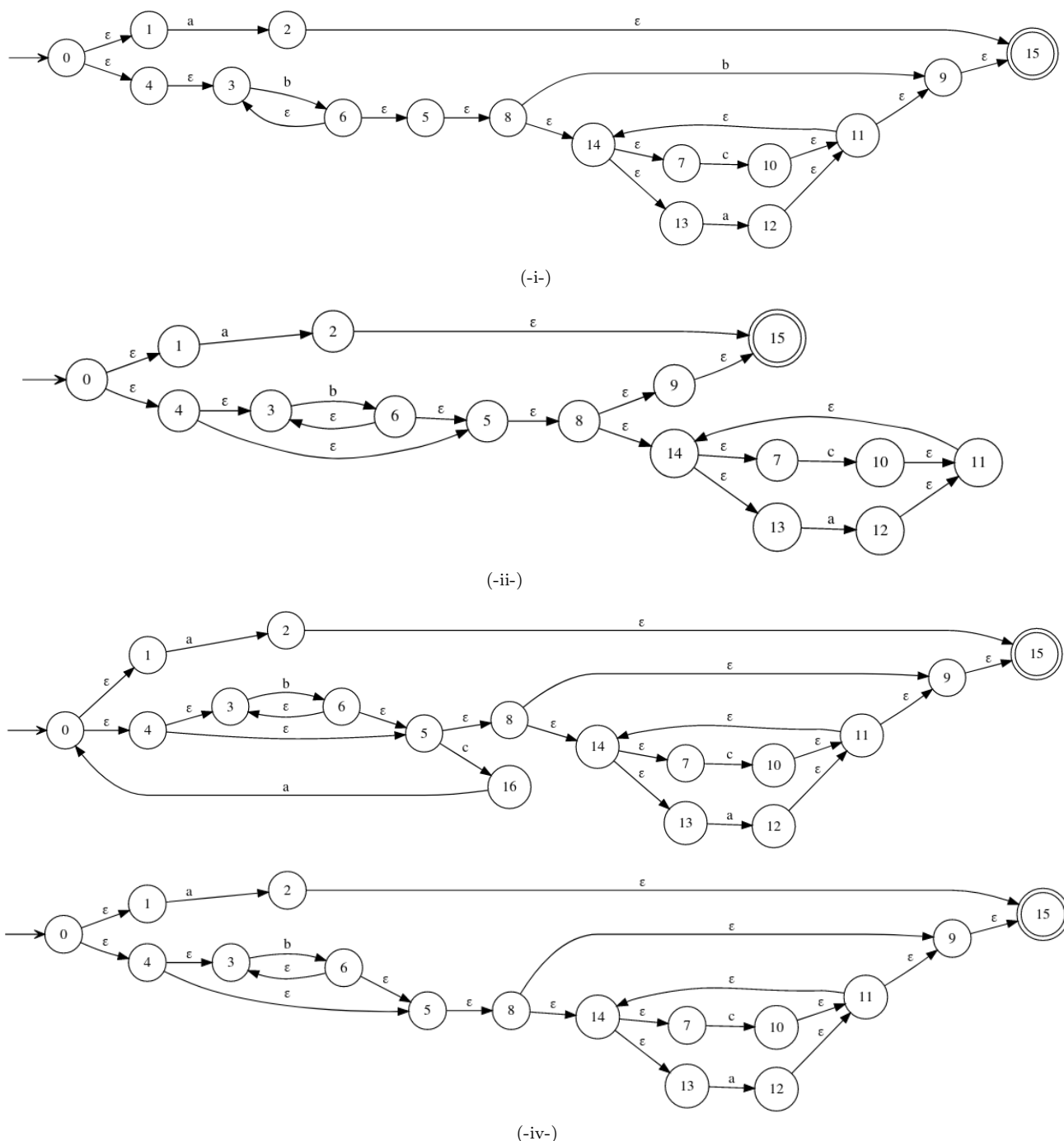


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ e ☐ ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ ☐ ☐ d ☐ e

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 7 : ☐ ☐ b ☐ ☐ d ☐ ☐ ☐ g ☐ ☐ i ☐ j ☐ k

Question 8 : ☐ a ☐ ☐ ☐ ☐ e ☐ ☐ ☐ h ☐ ☐ ☐ k ☐ ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ ☐ ☐ ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ ☐ g ☐ h

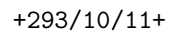
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ ☐ b

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par suffixe.
- ☐ Σ est fermé par facteur. ☐ Σ est fermé par préfixe.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A n'est pas complet.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ A a au moins un état non accessible. ☐ u n'est pas accepté par A . ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ A accepte le langage universel.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.
- ☒ Un mot est une application. ☐ Un mot peut être infini.
- ☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☒ Un mot est une fonction. ☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☒ Un mot peut être vide. ☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ u est accepté par A . ☐ A est complet.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$
☐ g	$X_4 = a + b$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_1 = aX_1 + b$	☐ k	$X_4 = (a+b)X_4$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
		☐ m	$X_3 = aX_2 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐	$X_4 = (a+b)^*$	☐ d	$X_4 = (a+b)X_4$
☐ e	$X_4 = a^* + b^*$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☐ b	$X_3 = a(a+b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$
☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.				



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☐ b 0 ☐ c 5 ☐ d 6 ☐ e 2 ☐ f 3 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

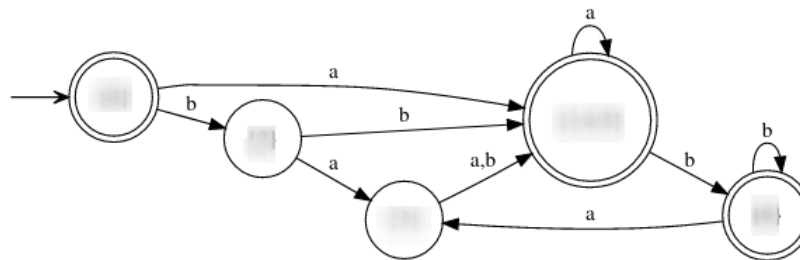
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



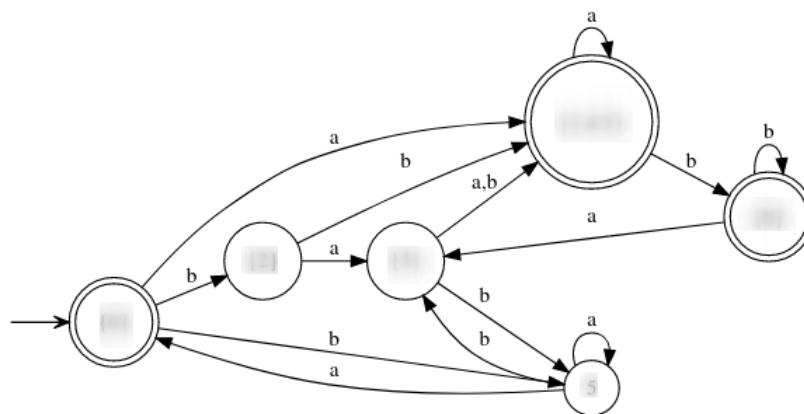
(-i-)



(-ii-)

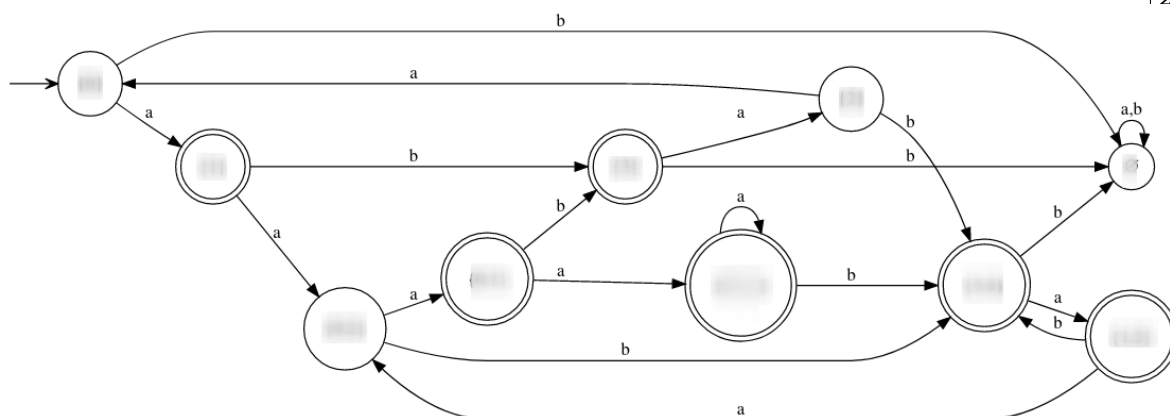


(-iii-)

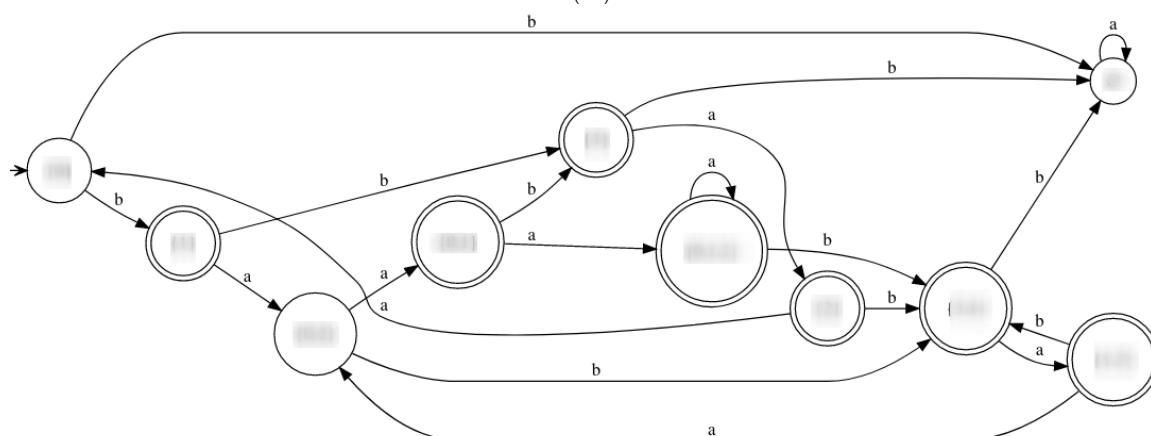


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :    d e f g  i j

Question 3 :   c d e

Question 4 : a b   e   h  j k

Question 5 : a   d e f g h i

Question 6 : a  c   f    j   m n

Question 7 : a b c d 

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a  c d e

Question 10 : a b c 

Question 11 : a b  d e  g  i j k  m

Question 12 : a b  d e f g h

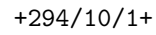
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a b c  e f

Question 16 : a 

Question 17 :  b c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par suffixe.
☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ f Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ b Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ c Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A a au moins un état non co-accessible.
☐ u n'est pas accepté par A . ☐ A a au moins un état accessible.
☐ e A a au moins un état non accessible. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ g A a au moins un état co-accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☐ A n'est pas complet.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A accepte le langage universel. ☐ b A possède un état puits
☐ c Tous les états de A sont accepteurs. ☐ d $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
☒ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☒ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ g nécessairement $|Q| \geq 2$.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ P est forcément déterministe.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☒ Un mot est une application. ☒ Un mot possède une infinité d'extensions.
☒ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ e Un mot possède une infinité de préfixe. ☒ Un mot peut être vide.
☐ g Un mot peut être infini. ☐ h Un mot possède une infinité de suffixe.
☒ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☒ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☒ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☒ Un mot est une fonction.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A est complet. ☐ b A a des états accepteurs. ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e Les états de A sont tous accessibles.
☐ f u est accepté par A .
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☒ la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = (a + b)X_4$
☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ h	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ i	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ k	$X_1 = aX_1 + b$	☐ l	$X_3 = aX_3 + cX_4$
				☐ m	$X_4 = a + b$

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$
☐ e	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^*b$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

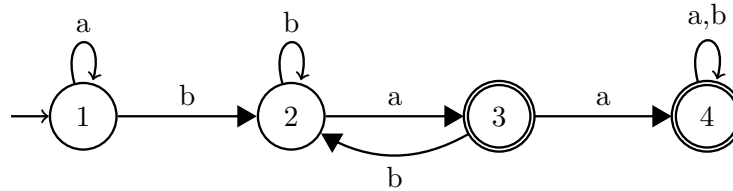
☐ a	$(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^* (a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

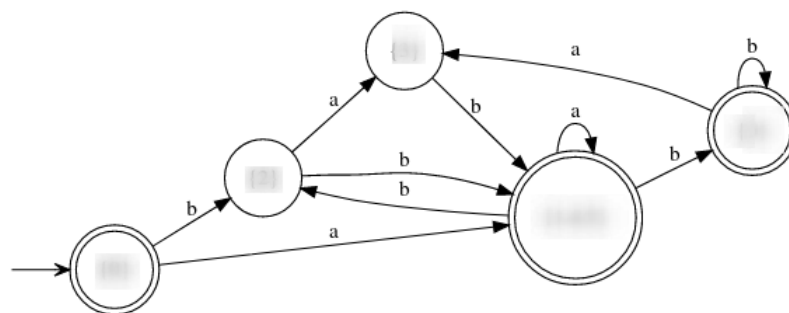
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 3 ☐ b 5 ☐ c 2 ☒ 4 ☐ e 1 ☐ f 6 ☐ g 0

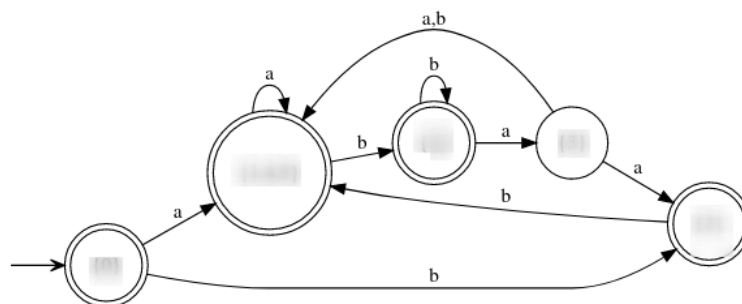
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

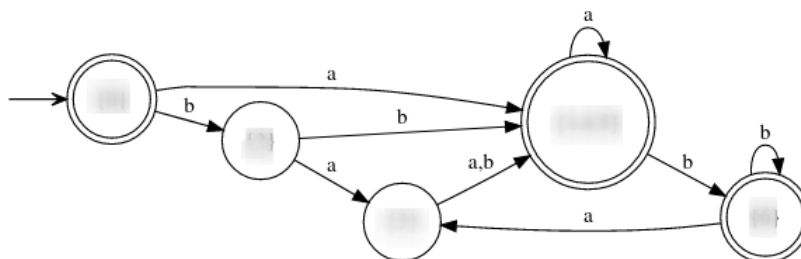
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



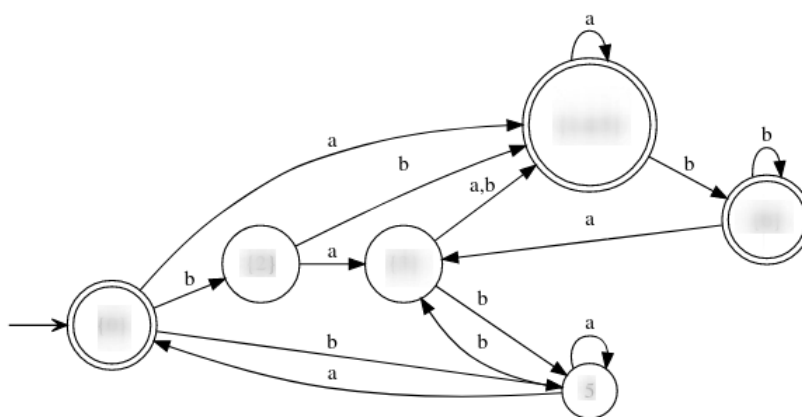
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

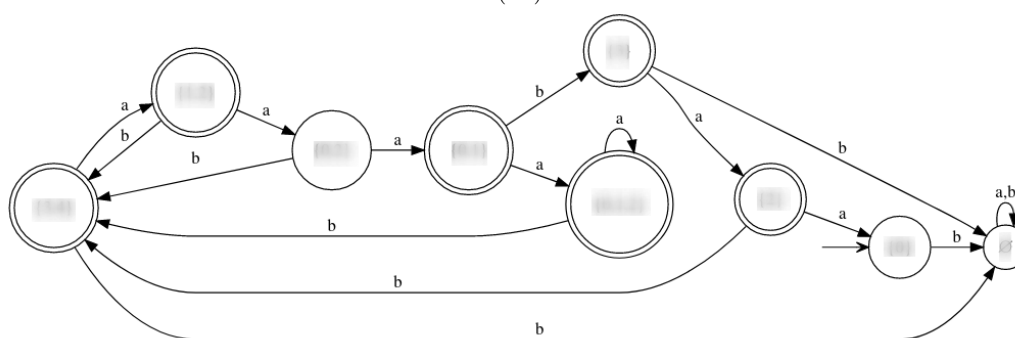
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



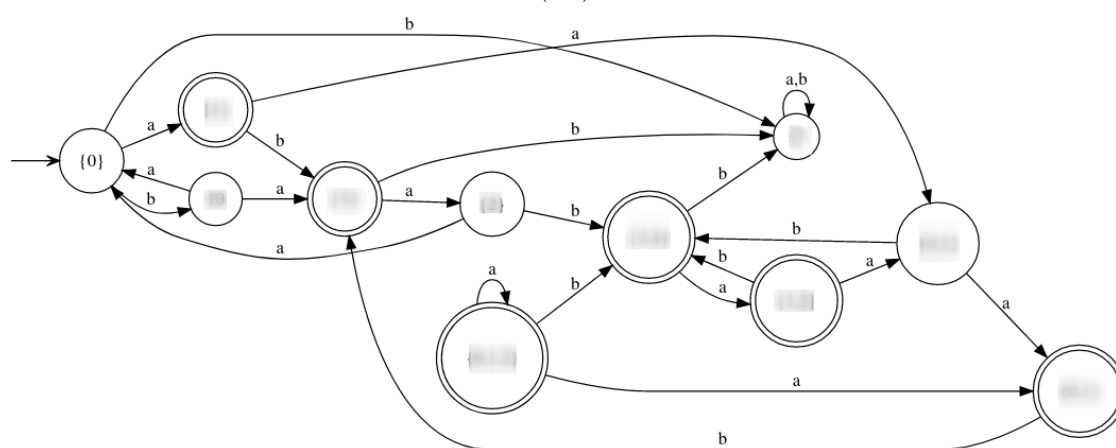
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

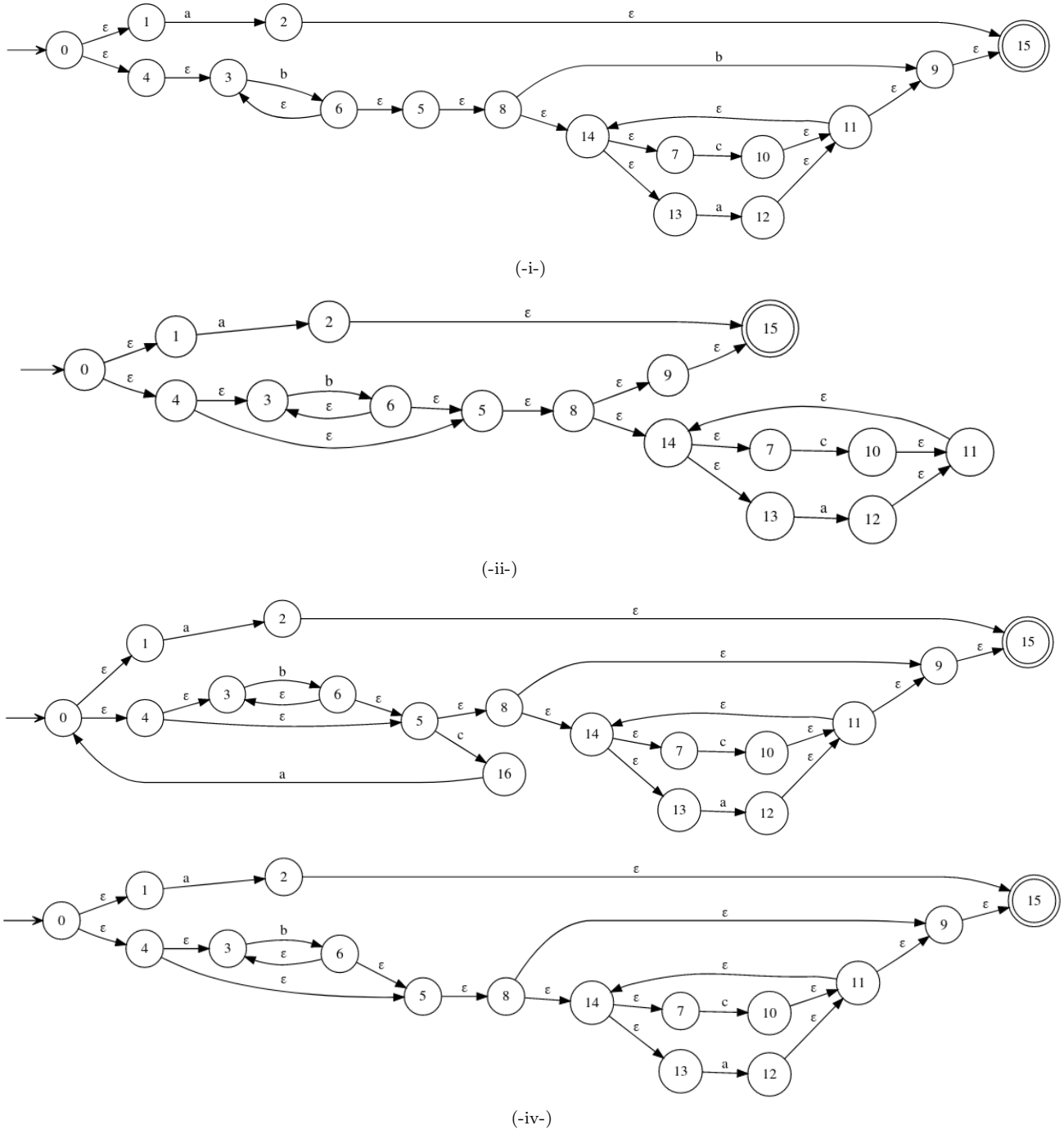


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 :

a			d	e	f			i	j

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

a	b			e		g			j	k

Question 5 :

a	b	c	d			g	h	i

Question 6 :

	b		d	e

Question 7 :

			d	e		g	h					m	n

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a		c	d	e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b			e	f		h	i		k	l	m

Question 12 :

a	b	c		e	f	g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

	b	c	d	e	f

Question 15 :

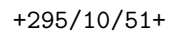
a		c	d	e	f

Question 16 :

	b

Question 17 :

a	b		d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
- ☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe. ☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ est fermé par préfixe. ☐ Σ est fermé par facteur.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui-même.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ A accepte le langage universel. ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$.
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b u est accepté par A .
- ☐ c A a des états accepteurs. ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles.
- ☐ e A est complet. ☐ f $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a A n'a pas d'état accepteur. ☐ b A n'est pas complet. ☐ c u n'est pas accepté par A .
- ☐ d A a au moins un état co-accessible. ☐ e A a au moins un état accessible.
- ☐ f A a au moins un état non accessible. ☐ g $u \notin \mathcal{L}(A)$.
- ☐ h A a au moins un état non co-accessible.
- ☐ i Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut être infini. ☐ b Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
- ☐ c Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ d Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ e Tous les préfixes d'un mot sont distincts. ☐ f Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ g Un mot est une fonction. ☐ h Un mot est une application.
- ☐ i Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ j Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ k Un mot possède une infinité de préfixe. ☐ l Un mot peut être vide.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ d la Figure 3-ii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_4 = (a+b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☐ i	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a+b)^*$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☐ c	$X_4 = (a+b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ f	$X_4 = a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ d	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

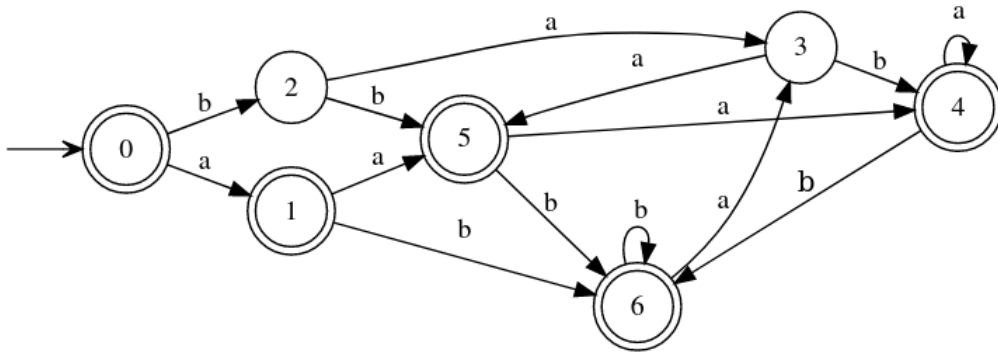
☐ a	$X_3 = (a(a+b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = a(a+b)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☒	celle trouvée pour X_1	☐ b	celle obtenue par $X_3 + X_4$

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

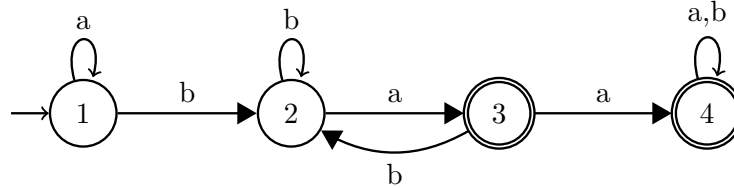
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$	☐ b	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a+b)^*$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a+b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 0 ☒ b 4 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 2 ☐ f 5 ☐ g 3

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

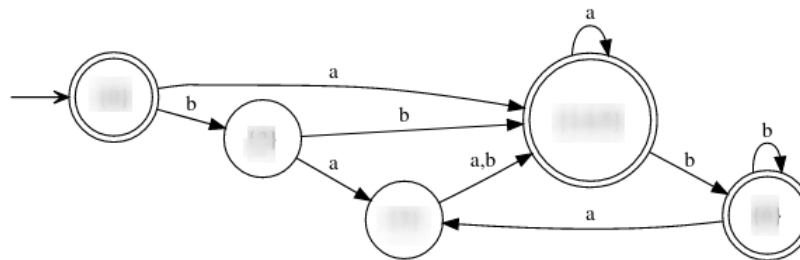
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



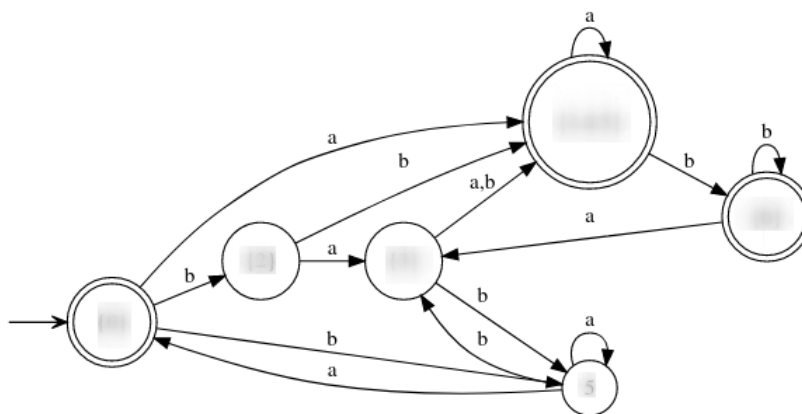
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



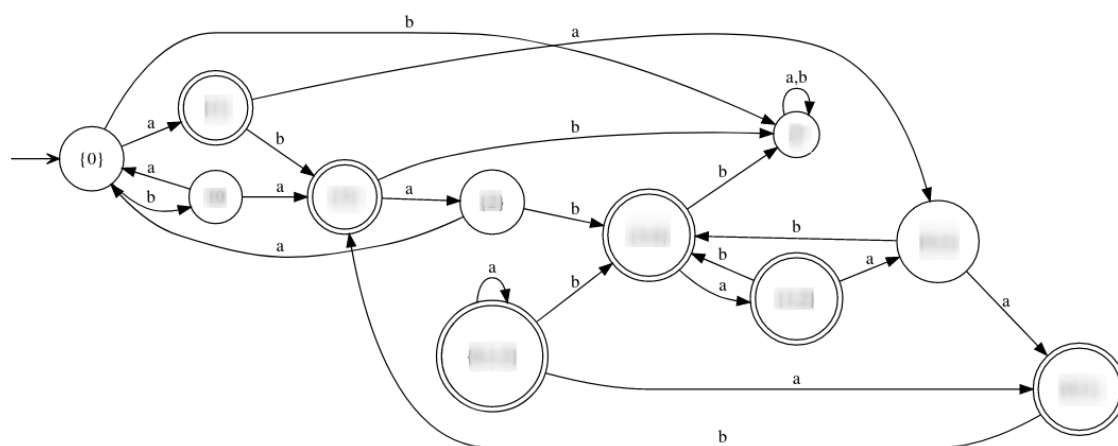
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

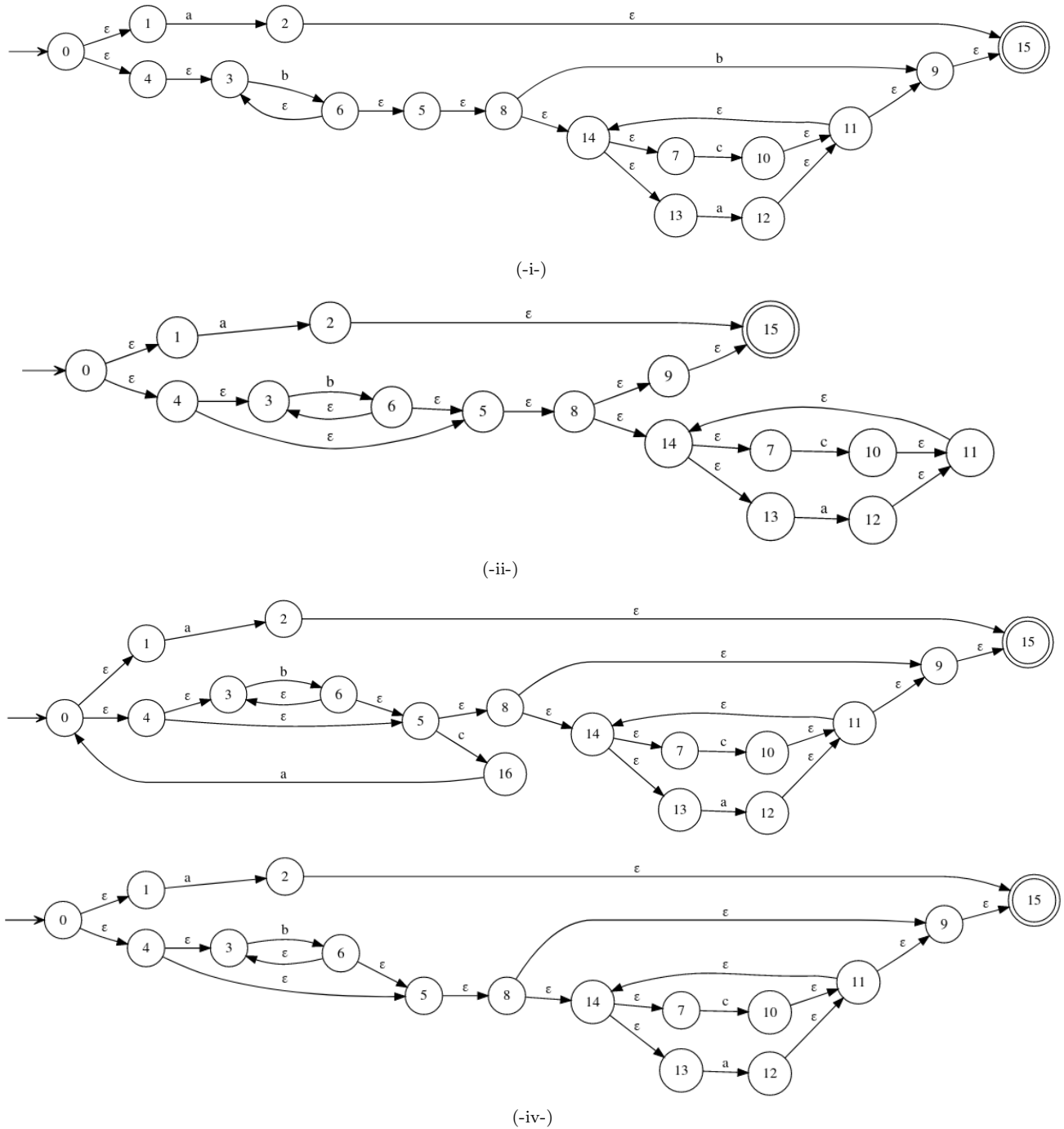


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ b ☐ ☐ e ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐

Question 4 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐

Question 7 : ☐ a ☐ ☐ d ☐ f ☐ h ☐ j ☐ k

Question 8 : ☐ a ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ i ☐ j ☐ k ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ e

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ e ☐ f ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐

Question 12 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

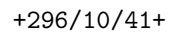
Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ b

Question 17 : ☐ b ☐ c ☐ d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ désigne l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

☐ Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.

☐ P est forcément déterministe.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

☐ nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ A possède un état puits ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.

☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.

☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ Tous les états de A sont accepteurs.

☐ A accepte le langage universel.

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ A a au moins un état co-accessible. ☐ A a au moins un état non accessible.

☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ A n'est pas complet.

☐ A a au moins un état accessible.

☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .

☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ u n'est pas accepté par A .

☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ Un mot peut être infini.
☐ Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ Un mot peut être vide.
☐ Un mot possède une infinité d'extensions. ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
☐ Tous les facteurs d'un mot sont distincts. ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ Un mot possède une infinité de préfixe.
☐ Un mot est une application. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 7 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ A a des états accepteurs. ☐ Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ Les états de A sont tous accessibles. ☐ A est complet. ☐ u est accepté par A .
☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ Σ est fermé par préfixe.
☐ Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
☐ Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☐ Σ est fermé par facteur.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$
☐ d	$X_1 = aX_1 + b$	☐ e	$X_3 = aX_3 + cX_4$	☐ f	$X_2 = bX_3 + aX_2$
☐ g	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ h	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ i	$X_3 = aX_2 + cX_4$
☐ j	$X_4 = a + b$	☐ k	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐	$X_1 = aX_1 + bX_2$
		☐	$X_2 = bX_2 + aX_3$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ d	$X_4 = \epsilon + a + b$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^*b$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$
		☐	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐	$X_2 = b^*aX_3$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

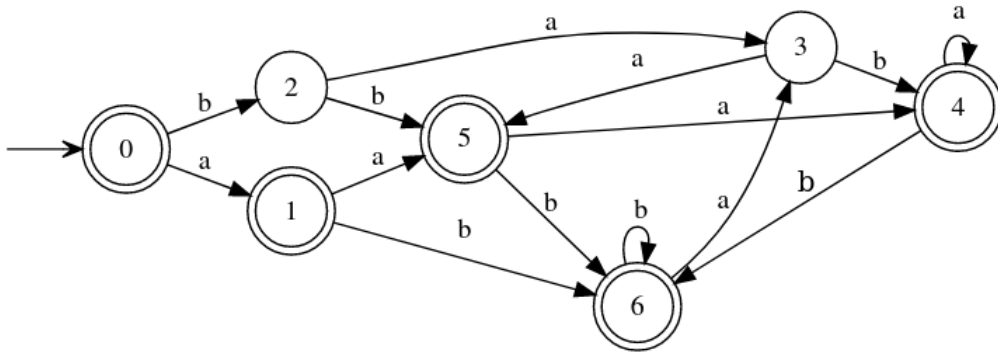
☐	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.		
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☐	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

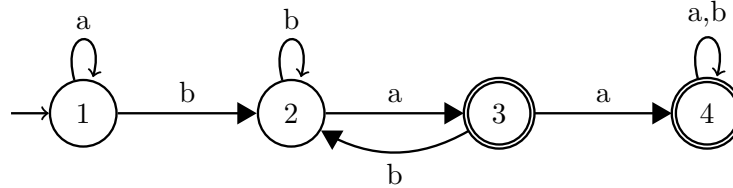
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 2 ☐ b 1 ☐ c 6 ☐ d 3 ☐ e 0 ☐ f 5 ☒ 4

Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



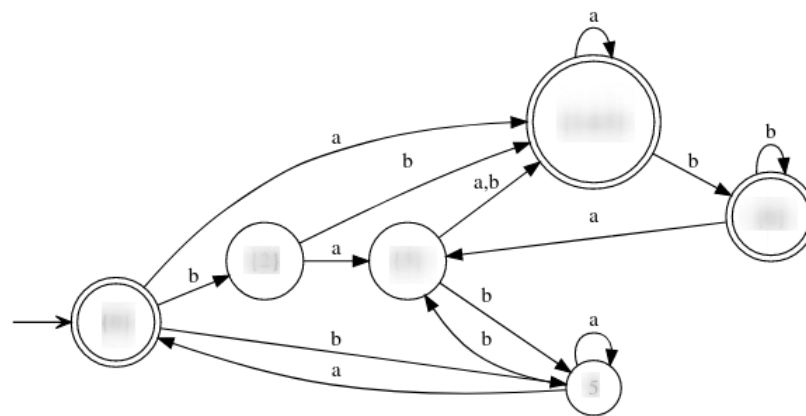
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

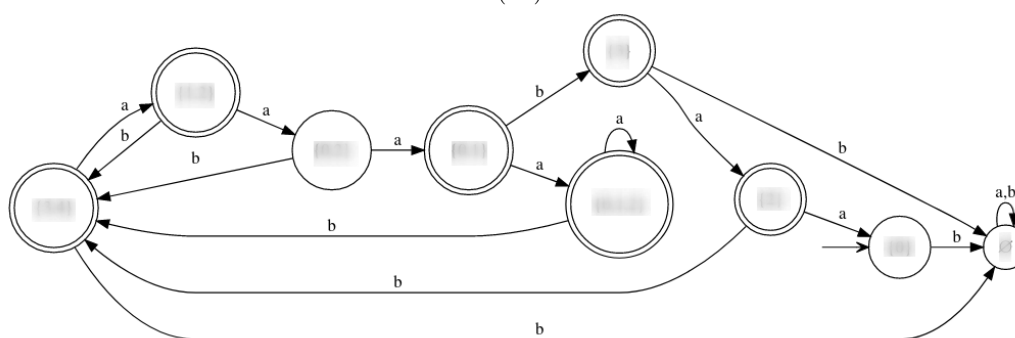
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



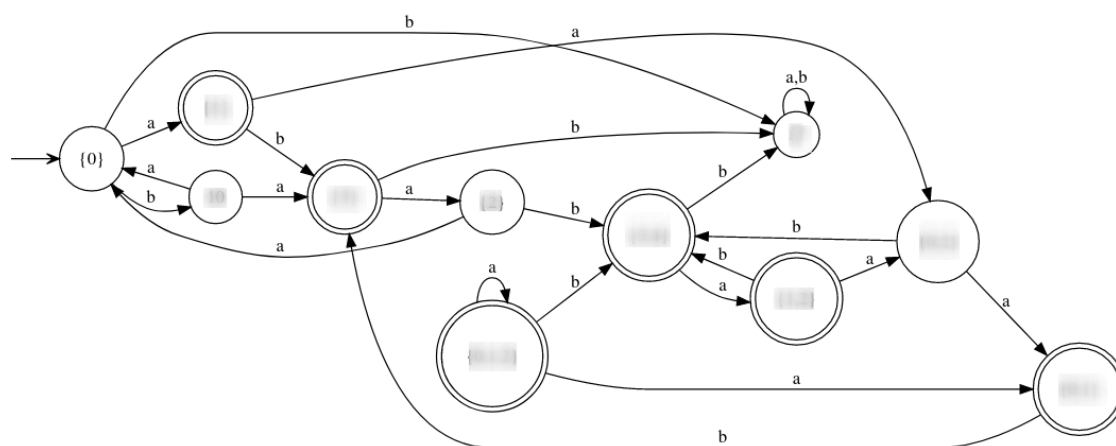
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

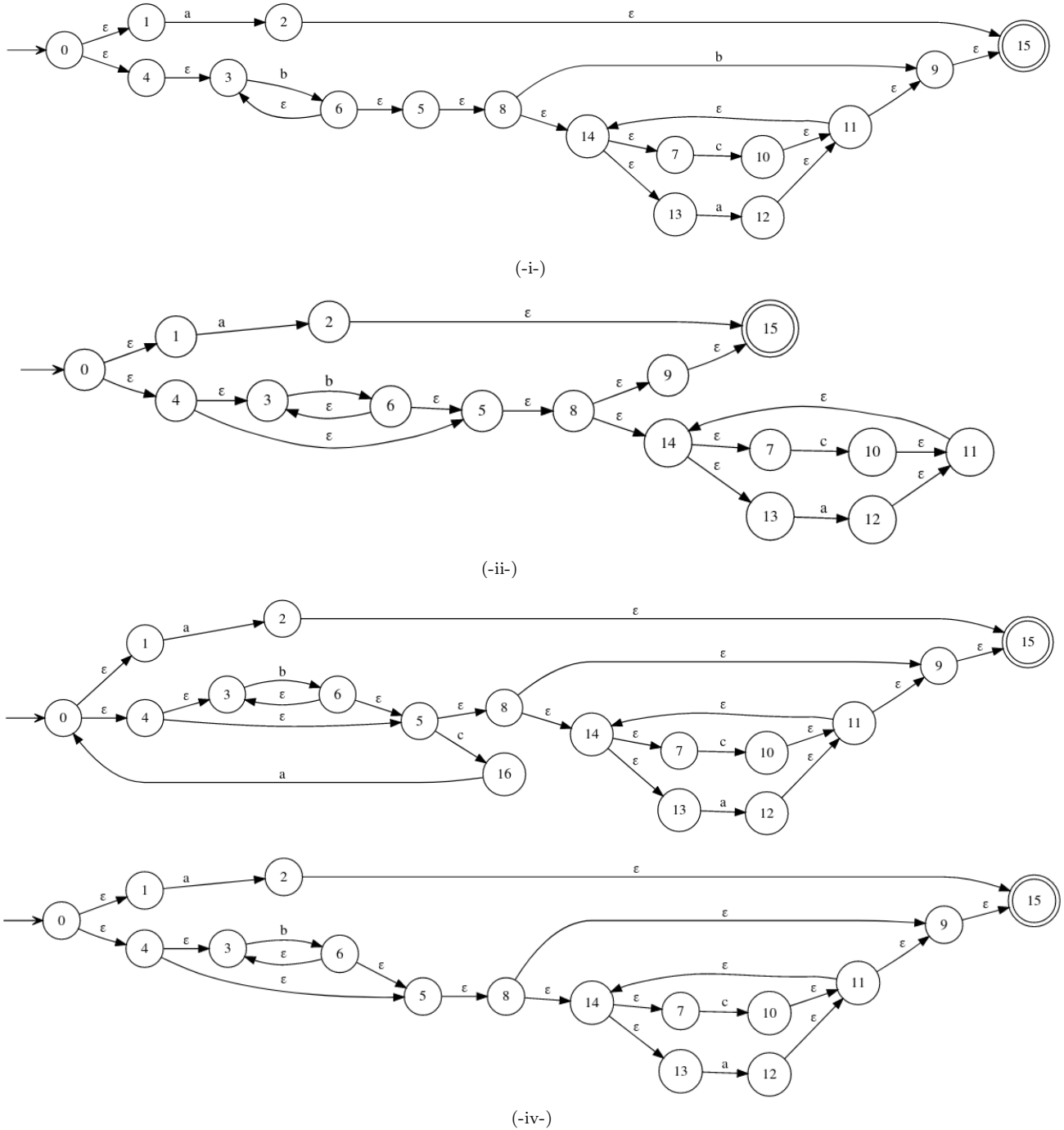


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b  d e

Question 3 : a b   e f g h i

Question 4 : a b c     h  j k

Question 5 :  b c    g   j   m n

Question 6 : a b c d 

Question 7 : a b c d e f g 

Question 8 :    d e  g h i j

Question 9 : a b  d e

Question 10 : a b  d

Question 11 : a   d e f g h i j k  

Question 12 :  b c d e f g h

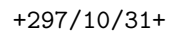
Question 13 : a b c d  f

Question 14 :  b c d e f

Question 15 :  b c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a b  d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ A accepte le langage universel. ☐ nécessairement $|Q| \geq 2$.
- ☐ Tous les états de A sont accepteurs. ☐ $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ A possède un état puits
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ A a au moins un état non co-accessible. ☐ A a au moins un état accessible.
- ☐ A n'est pas complet. ☐ A a au moins un état co-accessible.
- ☐ A n'a pas d'état accepteur. ☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$. ☐ u n'est pas accepté par A .
- ☐ A a au moins un état non accessible.
- ☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
- ☐ Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 4 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 5 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.

- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ Un mot est une fonction. ☐ b Un mot possède une infinité de suffixe.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ d Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ Un mot peut être vide. ☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ g Un mot peut être infini. ☐ Un mot est une application.
- ☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes. ☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ l Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ Σ^* est fermé par facteur. ☐ b Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
- ☐ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☐ d Σ est fermé par facteur.
- ☐ e Σ est fermé par préfixe. ☐ f Σ est fermé par suffixe. ☐ Σ^* est fermé par préfixe.
- ☐ Σ^* est fermé par suffixe.
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a Les états de A sont tous accessibles. ☐ b u est accepté par A . ☐ c $u \in \mathcal{L}(A)$.
- ☐ d Les états de A sont tous co-accessibles. ☐ e A a des états accepteurs.
- ☐ f A est complet.
- ☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ e la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
- ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☐ c	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$
☐ d	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ e	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ f	$X_4 = a + b$
☐ g	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$	☐ h	$X_1 = aX_1 + b$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ l	$X_3 = aX_2 + cX_4$
		☐ m	$X_3 = aX_3 + cX_4$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ b	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ c	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ d	$X_4 = a^* + b^*$
☐ e	$X_4 = a + b$	☐ f	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2$	☐ b	$X_1 = a^*b$	☐ c	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = b^+aX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^+aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

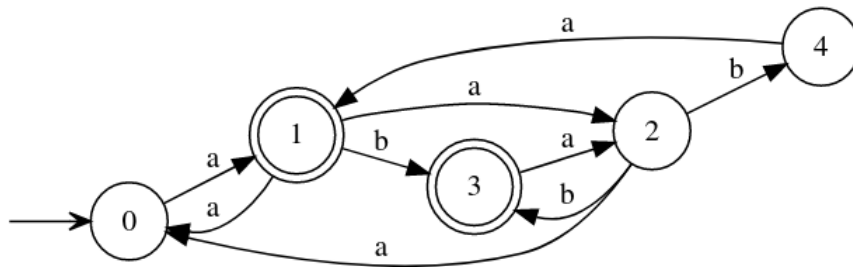
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

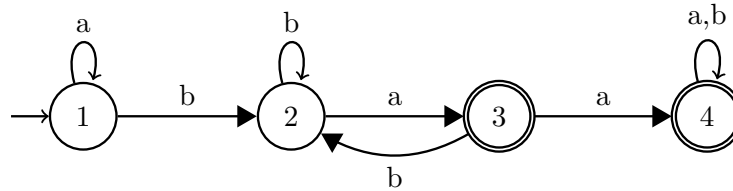
☐ a	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☒ 4 ☐ b 3 ☐ c 6 ☐ d 1 ☐ e 0 ☐ f 5 ☐ g 2

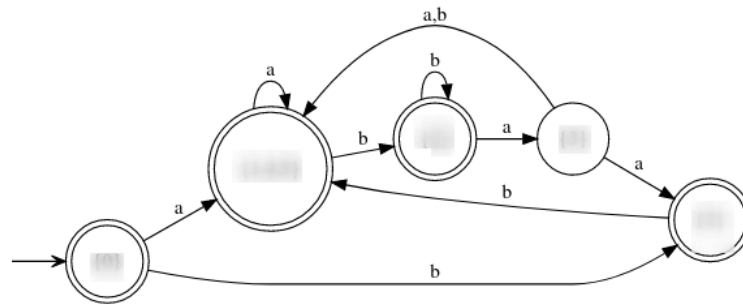
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

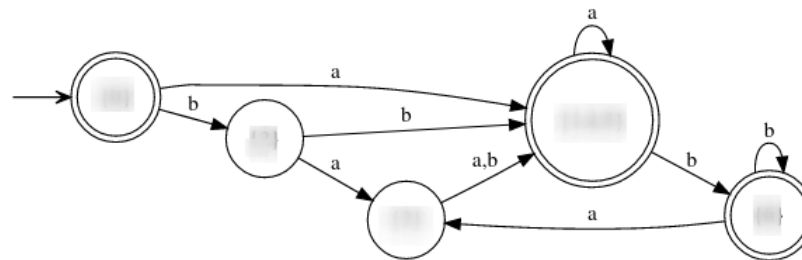
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



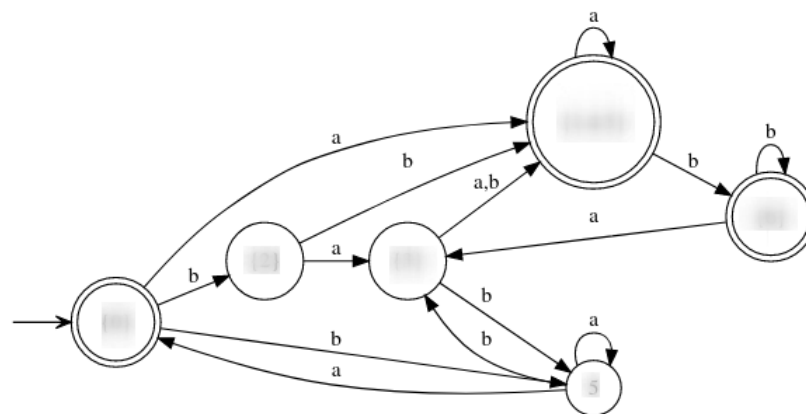
(-i-)



(-ii-)

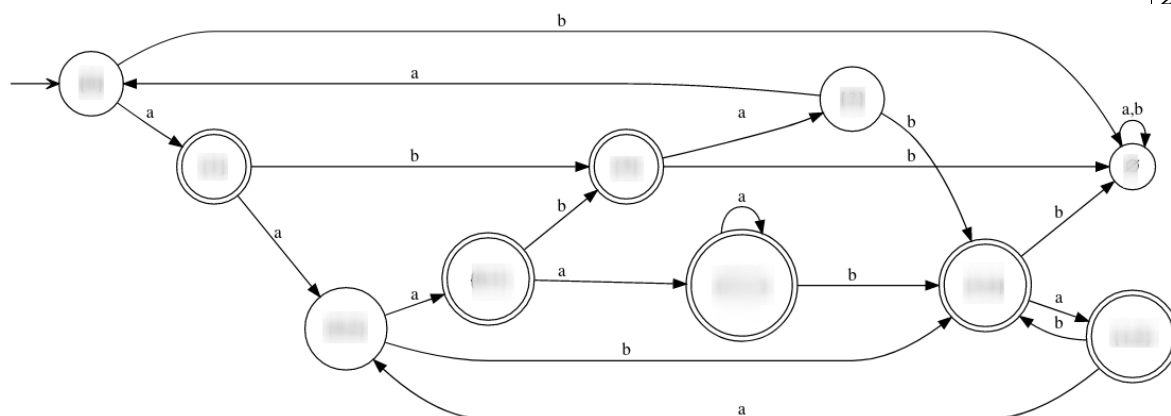


(-iii-)

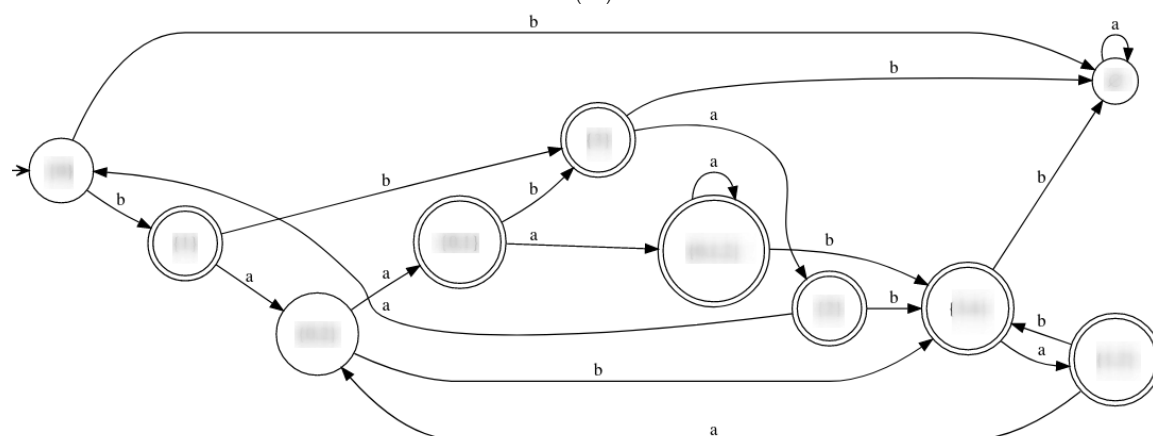


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



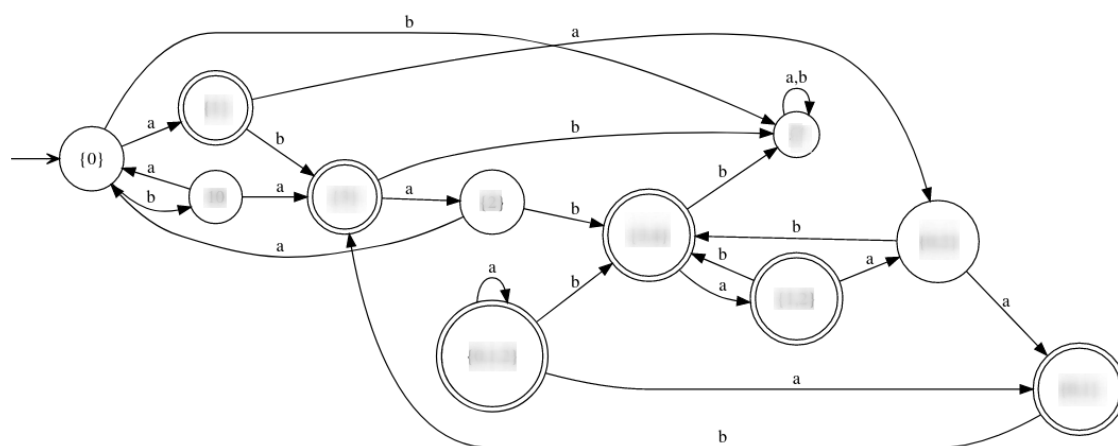
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :  b c d e  g h i

Question 3 : a   d e   h  j k

Question 4 : a b c d 

Question 5 :  b  d e

Question 6 :  b  d   g     l m n

Question 7 :  b  d e f   i j

Question 8 : a b c d e f g 

Question 9 : a b c  e

Question 10 :  b c d

Question 11 : a  c d e f g h    l m

Question 12 :  b c d e f g h

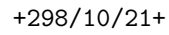
Question 13 : a b c d  f

Question 14 : a b c  e f

Question 15 : a  c d e f

Question 16 : a 

Question 17 : a  c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

A large rectangular box with a solid black border, containing ten horizontal dotted lines for writing.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a A possède un état puits ☐ b $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ c A accepte le langage universel.
- ☐ d nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
- ☐ f L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
- ☐ g $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$.
- ☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
- ☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
- ☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

- ☐ a Un mot peut avoir plusieurs suffixes. ☐ b Un mot possède une infinité de préfixe.
- ☐ c Un mot est une fonction. ☐ d Un mot peut avoir plusieurs préfixes.
- ☐ e Tous les suffixes d'un mot sont distincts. ☐ f Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
- ☐ g Un mot est une application. ☐ h Un mot peut être vide.
- ☐ i Un mot peut être infini. ☐ j Un mot possède une infinité d'extensions.
- ☐ k Un mot possède une infinité de suffixe. ☐ l Tous les préfixes d'un mot sont distincts.
- ☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.

Question 5 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ^* est fermé par préfixe. ☐ b Σ est fermé par suffixe. ☐ c Σ^* est fermé par facteur.
- ☐ d Σ est fermé par préfixe. ☐ e Σ est fermé par facteur. ☐ f Σ^* est fermé par suffixe.

- ☐ g Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos.
☒ Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☒ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .
☒ A n'est pas complet. ☐ c A a au moins un état co-accessible.
☐ d A a au moins un état non co-accessible. ☒ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☒ u n'est pas accepté par A . ☒ A a au moins un état accessible.
☐ h A n'a pas d'état accepteur. ☐ i A a au moins un état non accessible.
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☒ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
☒ P est forcément déterministe.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ c A est complet.
☐ d Les états de A sont tous accessibles. ☐ e A a des états accepteurs.
☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☐ c la Figure 3-iv-. ☒ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☒ la Figure 4-i-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☐ f	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$	☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ i	$X_1 = aX_1 + b$
☐ j	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ k	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ l	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$
		☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ c	$X_4 = a^* + b^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = \epsilon + a + b$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^*b + \epsilon$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^+bX_2$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ c	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

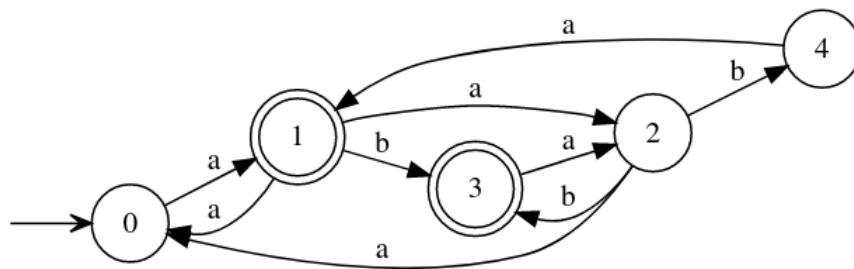
☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

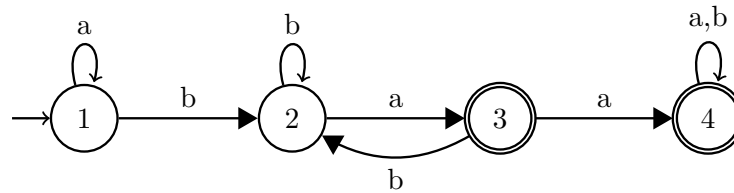
☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ b	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 5 ☐ b 1 ☒ c 4 ☐ d 2 ☐ e 3 ☐ f 0 ☐ g 6

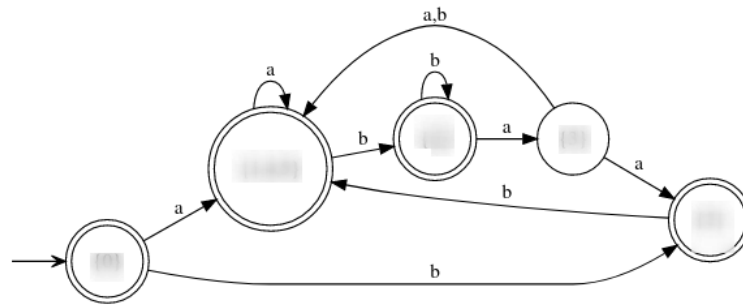
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



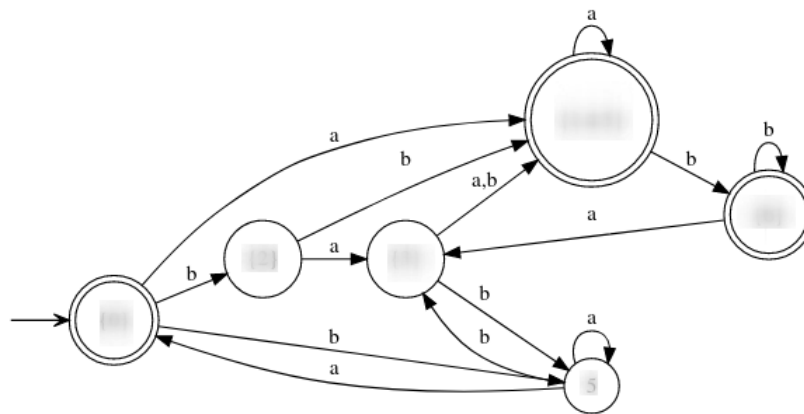
(-i-)



(-ii-)

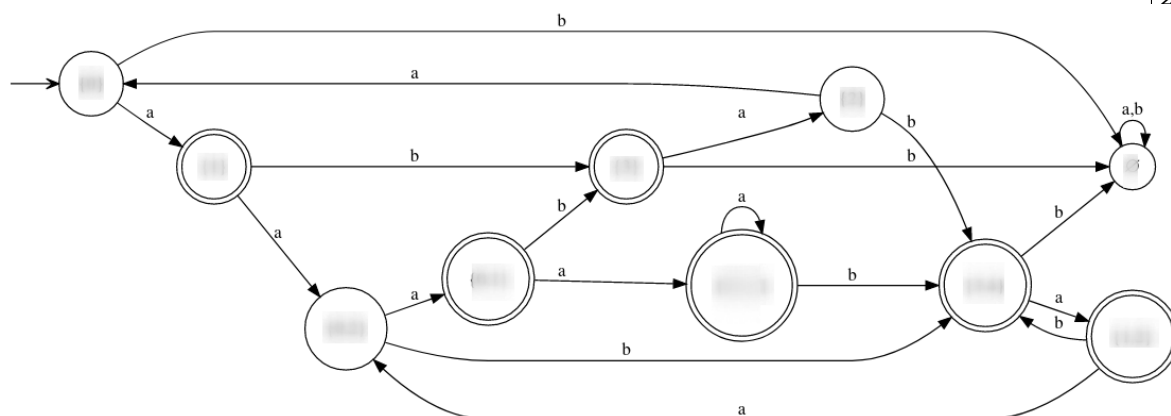


(-iii-)

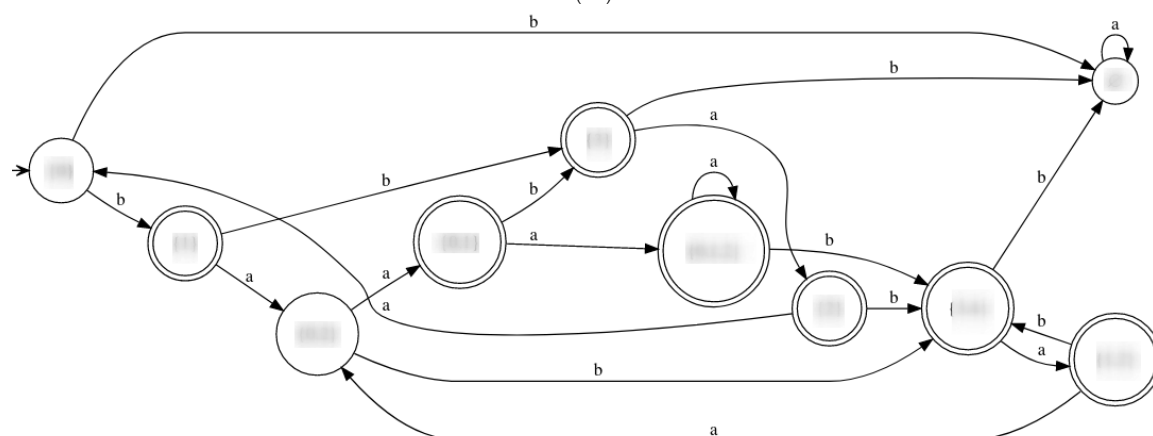


(-iv-)

FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



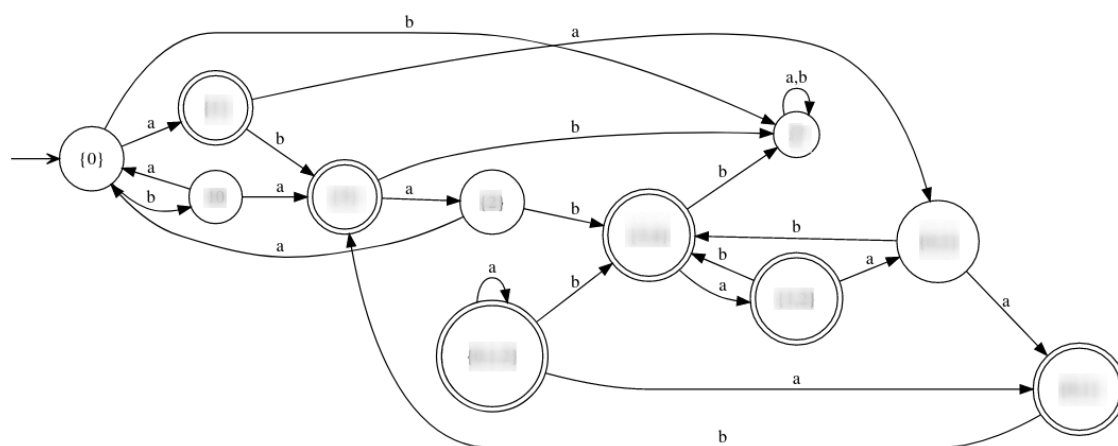
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii.

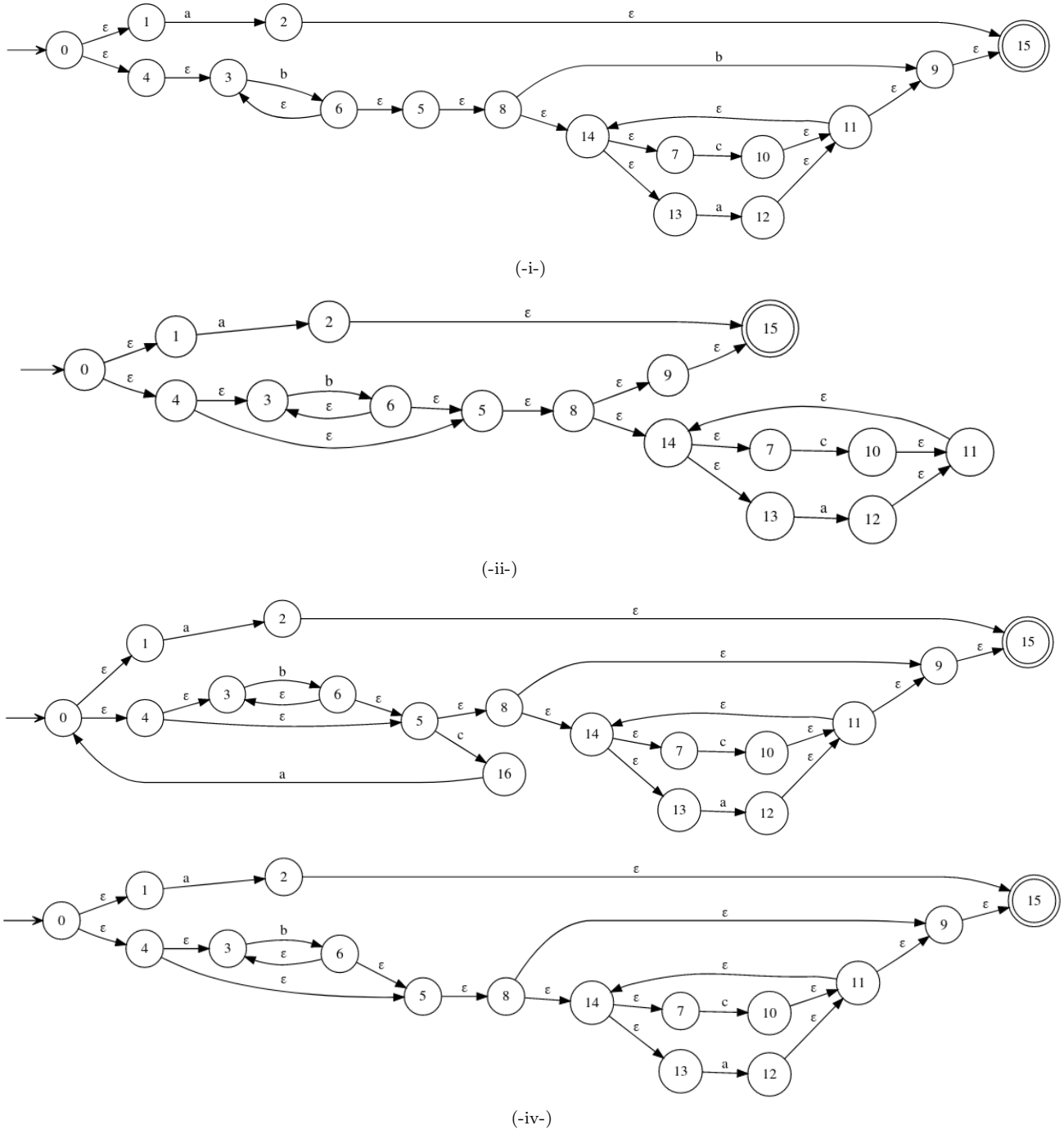


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

 *Réservé enseignant*

.....
.....
.....

Question 2 :

a	b	c	d	e			h	i

Question 3 :

a	b	c	d	

Question 4 :

	b				f			i		k		m	n

Question 5 :

	b		d	e		g		i	j

Question 6 :

		c	d				h	i	j	k

Question 7 :

	b		d	e

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	

Question 9 :

a	b	c		e

Question 10 :

a	b	c	

Question 11 :

a	b	c		e	f			i	j	k	l	

Question 12 :

a	b	c	d	e		g	h

Question 13 :

a	b	c	d		f

Question 14 :

a	b	c		e	f

Question 15 :

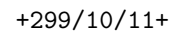
a	b		d	e	f

Question 16 :

a	

Question 17 :

	b	c	d



f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (8h → 10h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.
- Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.
- Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire. Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A .

Pour un langage L , nous notons $\text{Pref}(L)$ et $\text{Suf}(L)$ les fermetures de L par préfixe et suffixe, respectivement. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte. Pour une expression régulière e , $\mathcal{L}(e)$ désigne le langage dénoté par cet expression régulière. Deux expressions régulières sont sémantiquement équivalentes, lorsqu'elles dénotent les mêmes langages, c'est-à-dire $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e')$, ce que nous notons $e \equiv e'$.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (7 points)

Question 2 ♣ (1 point) Nous considérons les notions de mot, préfixe, suffixe et facteur.

☐ Tous les préfixes d'un mot sont distincts.	☐ Un mot possède une infinité d'extensions.
☐ c Un mot possède une infinité de préfixe.	☐ Un mot est une fonction.
☐ Tous les suffixes d'un mot sont distincts.	☐ f Un mot possède une infinité de suffixe.
☐ Un mot peut avoir plusieurs suffixes.	☐ h Tous les facteurs d'un mot sont distincts.
☐ Un mot peut avoir plusieurs préfixes.	☐ Un mot peut être vide.
☐ k Un mot peut être infini.	☐ Un mot est une application.
☐ m Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et l peuvent être déduites.	
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l ne peut être déduite.	

Question 3 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de produit d'automates. Soient A et B deux automates déterministes et P l'automate obtenu en appliquant l'opération produit entre A et B vue en cours. Nous notons Q_X l'ensemble des états de l'automate X .

- ☐ P est forcément déterministe.
- ☐ b Si A et B sont accessibles, alors P est accessible.
- ☐ $|Q_P| \leq |Q_A| \times |Q_B|$.
- ☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
- ☐ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 4 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A n'est pas définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

☐ a A n'a pas d'état accepteur.	☐ $u \notin \mathcal{L}(A)$.
☐ c A a au moins un état non co-accessible.	☐ A n'est pas complet.
☐ e A a au moins un état co-accessible.	☐ u n'est pas accepté par A .
☐ A a au moins un état accessible.	☐ h A a au moins un état non accessible.
☐ Il y a un état q de A et un symbole e de Σ tel que (q, e) n'est pas dans le domaine de δ .	
☐ j Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et i peuvent être déduites.	
☐ k Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et i ne peut être déduite.	

Question 5 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ . Soit $u \in \Sigma^*$ dont l'exécution sur A est définie. Indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- ☐ a u est accepté par A . ☐ b Les états de A sont tous accessibles. ☐ c A est complet.
☐ d A a des états accepteurs. ☐ e $u \in \mathcal{L}(A)$. ☐ f Les états de A sont tous co-accessibles.
☐ g Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et f peuvent être déduites.
☒ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f ne peut être déduite.

Question 6 ♣ (1 point) Soit un AEFD A sur un alphabet Σ dont la fonction de transition est notée δ et l'ensemble des états Q . Nous supposons que A est complet.

- ☐ a $|\delta| = |Q| \times |\Sigma|$. ☐ b nécessairement $|Q| \geq 2$. ☐ c A accepte le langage universel.
☒ d $|\delta| = |Q|^2 \times |\Sigma|$. ☐ e Tous les états de A sont accepteurs.
☐ f A possède un état puits
☒ g L'exécution de A est définie sur chaque mot construit sur son alphabet.
☐ h Toutes les affirmations données dans les réponses entre a et h peuvent être déduites.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h ne peut être déduite.

Question 7 ♣ (1 point) Nous nous intéressons à l'opération de complémentation d'automates.

- ☐ a Le complémentaire du complémentaire d'un automate A est l'automate A lui même.
☐ b L'automate complémentaire reconnaît le même langage.
☐ c Le cardinal du langage reconnu par le complémentaire est inférieur ou égal au cardinal du langage reconnu par l'automate de départ.
☐ d Les affirmations données dans les réponses entre a et c sont toutes correctes.
☒ e Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et c n'est correcte.

Question 8 ♣ (1 point) Nous considérons la fermeture par préfixe, suffixe et facteur d'un langage.

- ☐ a Σ est fermé par facteur. ☐ b Σ est fermé par préfixe.
☐ c Si un langage est préfixe-clos, alors il est facteur-clos. ☒ d Σ^* est fermé par préfixe.
☐ e Σ est fermé par suffixe. ☒ f Σ^* est fermé par suffixe.
☒ g Si un langage est facteur-clos, alors il est préfixe-clos. ☒ h Σ^* est fermé par facteur.
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 9 (2 points) Considérons l'automate représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 2-i- car cet automate est déjà minimal.
☒ d la Figure 3-iii-. ☐ e la Figure 3-iv-.

Partie 3 : Déterminisation d' ϵ -AEFND (2 points)

Question 10 (2 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-ii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☒ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-iii-. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i , pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 11 ♣ (1 point) Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

☐ a	$X_4 = (a + b)X_4$	☒	$X_4 = (a + b)X_4 + \epsilon$	☐ c	$X_4 = a + b$
☒	$X_1 = aX_1 + bX_2$	☐ e	$X_2 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$	☐ f	$X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon$
☐ g	$X_1 = aX_1 + b$	☐ h	$X_3 = aX_2 + cX_4$	☐ i	$X_3 = aX_3 + cX_4$
☒	$X_3 = bX_2 + aX_4 + \epsilon$	☐ k	$X_2 = bX_3 + aX_2$	☒	$X_2 = bX_2 + aX_3$
		☐ m	$X_2 = bX_3 + aX_1 + \epsilon$		

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_4 . Nous obtenons.

☐ a	$X_4 = a^* + b^* + \epsilon$	☐ b	$X_4 = a^* + b^*$	☒	$X_4 = (a + b)^*$	☐ d	$X_4 = a + b$
☐ e	$X_4 = (a + b)X_4$	☐ f	$X_4 = \epsilon + a + b$	☐ g	Aucune des équations proposées.		
☐ h	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 13 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1 . Nous obtenons.

☐ a	$X_1 = a^+bX_2 + \epsilon$	☐ b	$X_1 = a^+bX_2$	☐ c	$X_1 = a^*b$	☐ d	$X_1 = a^*b + \epsilon$
		☒	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 14 (0,5 point) Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2 . Nous obtenons.

☐ a	$X_2 = b^*bX_2 + \epsilon$	☒	$X_2 = b^*aX_3$	☐ c	$X_2 = b^*aX_3 + \epsilon$	☐ d	$X_2 = a^*bX_3 + \epsilon$
		☐ e	Aucune des équations proposées.				
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.						

Question 15 (0,75 point) Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_3 et souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation trouvée pour X_3 . Nous obtenons.

☐ a	$X_3 = a(a + b)^*$	☐ b	$X_3 = (a(a + b)^*)^*$	☒	$X_3 = (b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	$X_3 = (a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ e	Aucune des équations proposées.	
☐ f	Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.				

Question 16 (0,25 point) L'expression régulière associée à l'automate est

☐ a	celle obtenue par $X_3 + X_4$	☒	celle trouvée pour X_1

Question 17 (0,5 point) L'expression régulière associée à l'automate est

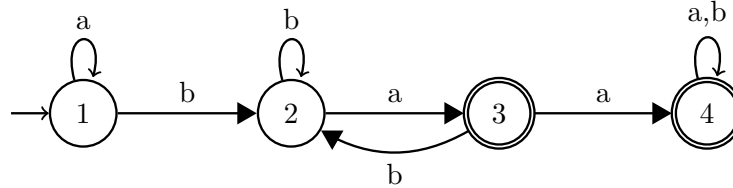
☐ a	$a^*b^+a(b^+a)^*a(a + b)^*$	☒	$a^*b^+a(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$	☐ c	$(b^+a)^*(a(a + b)^* + \epsilon)$
	☐ d	Aucune des expressions régulières proposées.			



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 3).



(-iii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 18 (1 point) Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$b \cdot a \cdot (b \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

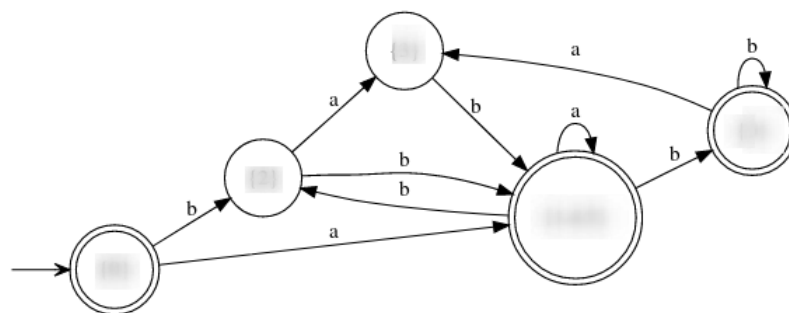
La constante d'itération minimale de ce langage est :

☐ a 1 ☒ 4 ☐ c 3 ☐ d 6 ☐ e 5 ☐ f 0 ☐ g 2

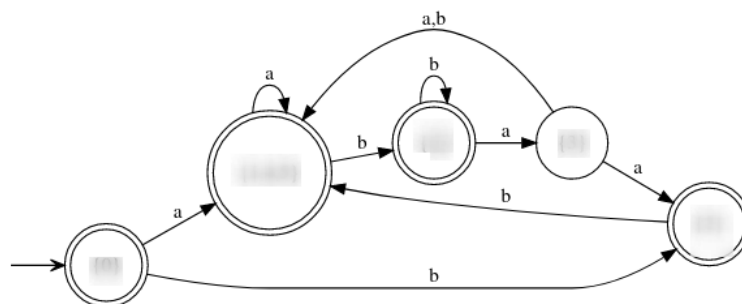
Question 19 (3 points) Démontrer que le langage $\{b^{n+1} \cdot a \cdot b^{2 \times n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Partie 6 : Algorithmes (3 points)

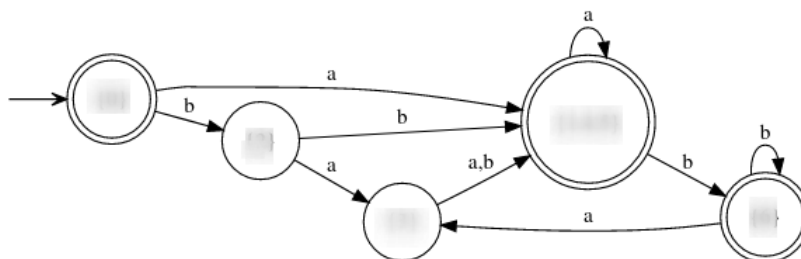
Question 20 (3 point) Écrire un algorithme qui, étant donné un automate déterministe, retourne un automate (un 5-tuple) correspondant à la version accessible de cet automate.



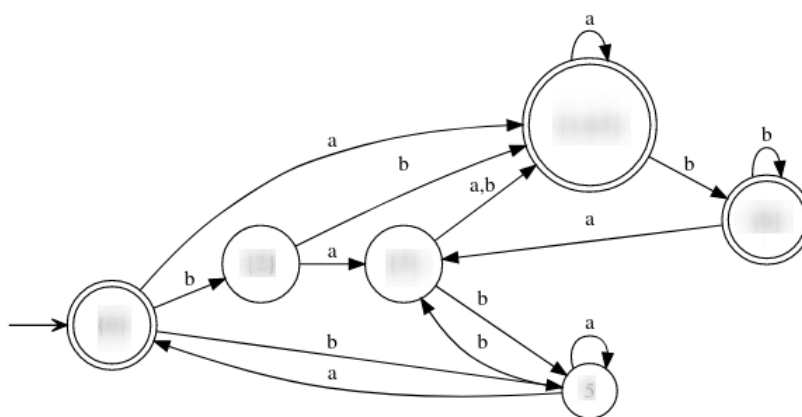
(-i-)



(-ii-)

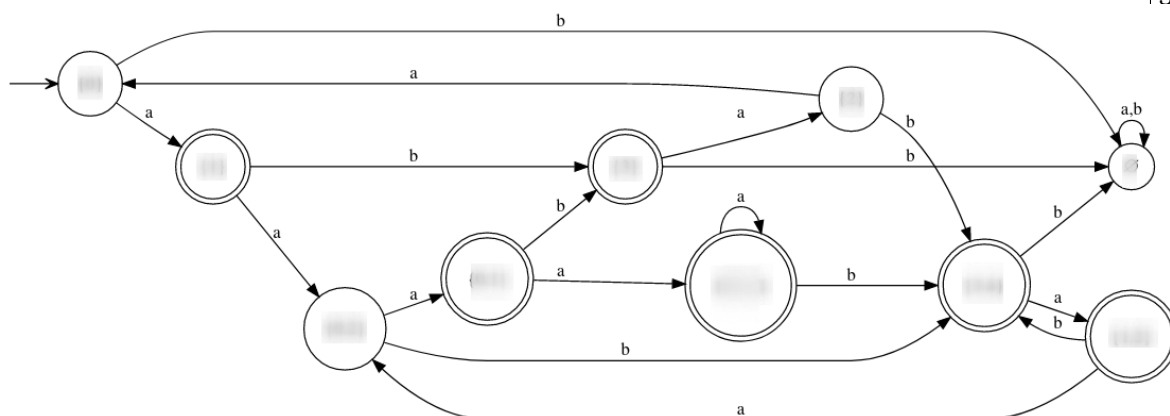


(-iii-)



(-iv-)

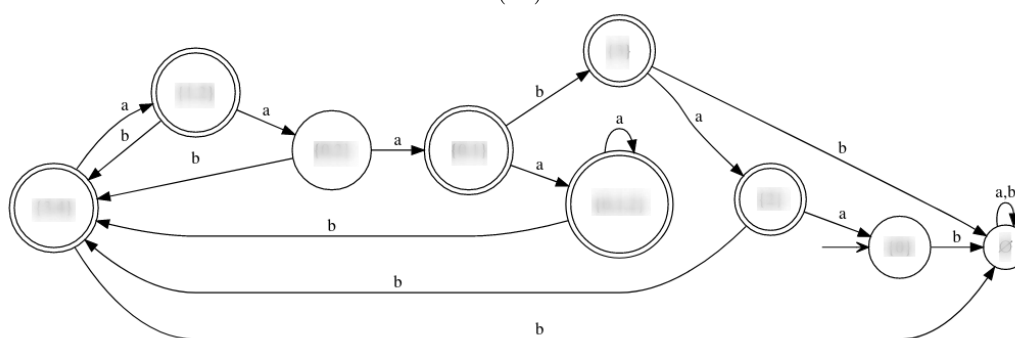
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



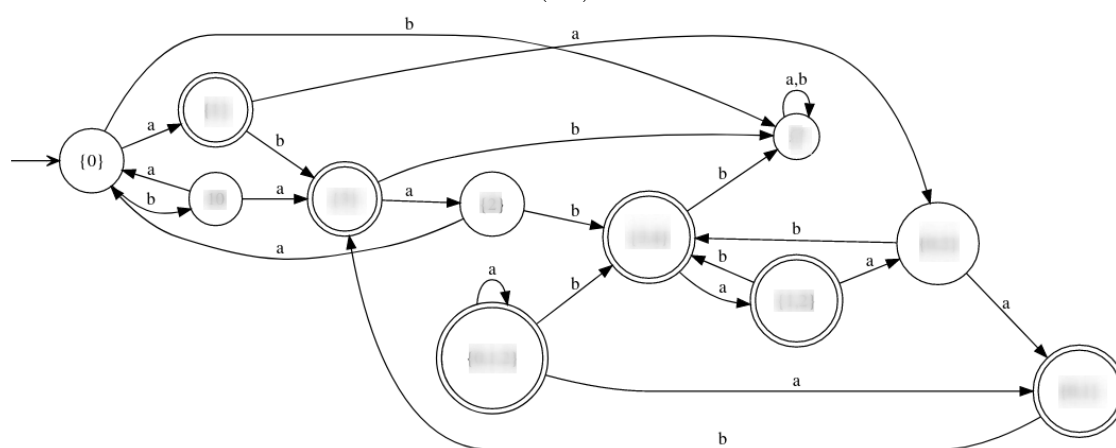
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de détermination sur l'automate de la Figure 2-ii-.

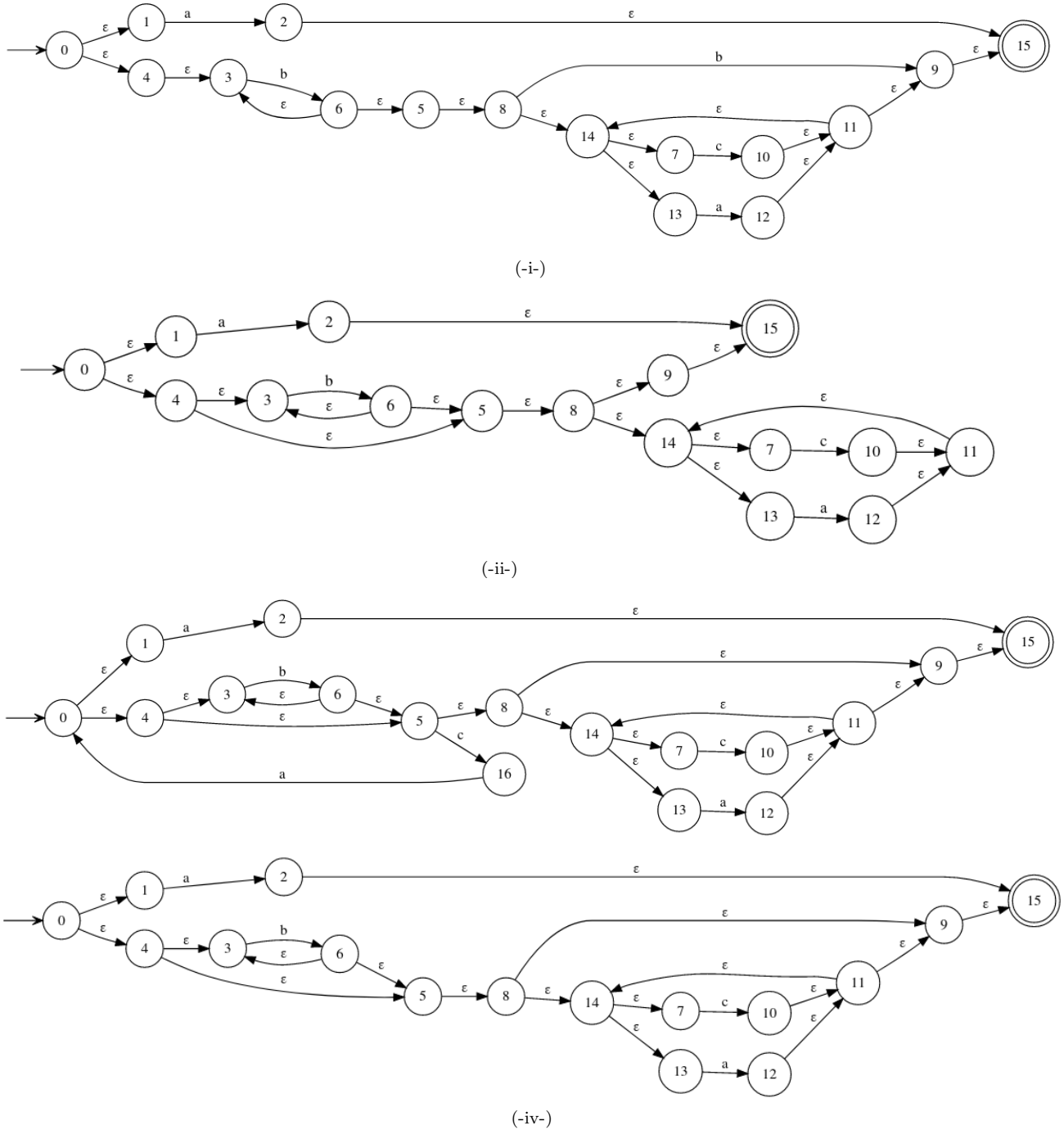


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b^* \cdot (c + a)^*)$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

Numéro de place :

.....

.....

Question 1 :

Réservé enseignant

.....
.....
.....

Question 2 : ☐ ☐ c ☐ ☐ f ☐ h ☐ ☐ k ☐ m ☐ n

Question 3 : ☐ b ☐ d e

Question 4 : a ☐ c ☐ e ☐ h ☐ j k

Question 5 : a b c d e f g ☐

Question 6 : a b c ☐ e f ☐ h i

Question 7 : a b c d ☐

Question 8 : a b c ☐ e ☐ ☐ ☐ i j

Question 9 : a b ☐ d e

Question 10 : ☐ b c d

Question 11 : a ☐ c ☐ e f g h i ☐ k ☐ m

Question 12 : a b ☐ d e f g h

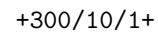
Question 13 : a b c d ☐ f

Question 14 : a ☐ c d e f

Question 15 : a b ☐ d e f

Question 16 : a ☐

Question 17 : a ☐ c d



f i ab b ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

f i ab b ■ Réserve enseignant

[illegible]