Licence Sciences et Technologies
Univ. Grenoble Alpes

Examen à mi-parcours
INF 302 : Langages et Automates
L2, 2023/2024

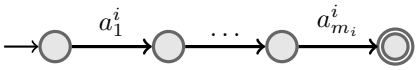
Rappel à propos des consignes et quelques conseils et remarques

— Durée : 2 heures.
— Aucune sortie avant 30 minutes.
— Aucune entrée après 30 minutes.
— 3 feuilles A4 R/V autorisées.
— Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, montre connectée, etc.).
— Le soin de la copie sera pris en compte.
— Le barème est donné à titre indicatif.
— L'examen est sur 22 points, vous devez obtenir 20 points pour obtenir la note maximale.

Solution de l'exercice ??

Pour chacune des questions, nous donnons une explication lorsque la réponse est vraie et un contre-exemple lorsque la réponse est fausse.

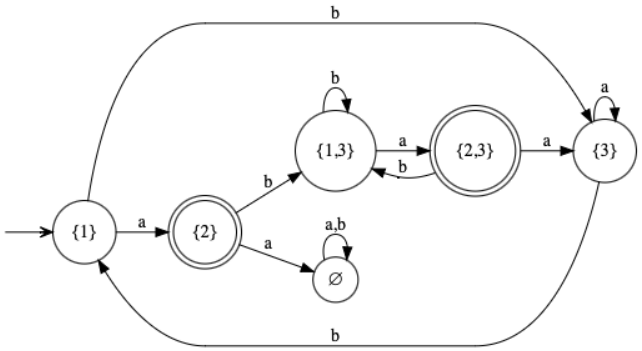
1. Vrai. Soit L un langage est fini, alors il peut se décrire en extension sous la forme $\{w_1, \ldots, w_n\}$ où les w_i sont des mots. Pour chaque mot w_i qui s'écrit $a_1^i \cdot \ldots \cdot a_{m_i}^i$, nous pouvons trouver un automate comme ci-dessous qui le reconnait :



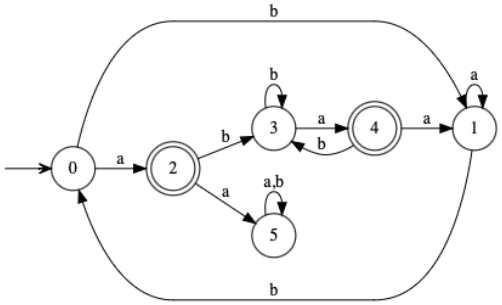
   Ainsi, comme $L = \cup_{i=0}^{n} \{w_i\}$ et que les langages à états sont fermés par union (car ils sont fermés par négation et intersection), nous en déduisons le résultat.
2. Faux. Le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$ des mots ne contenant que des a est infini, mais c'est un langage à états.
3. Faux. Nous pouvons prendre un automate déterministe et complet ne contenant pas d'état accepteur, par exemple.
4. Faux. On peut prendre tout automate possédant un cycle mais sans état accepteur et plus généralement tout automate dont les cycles ne sont pas co-accessibles.
5. Faux. Même justification que pour la précédente question.
6. Vrai. Soient L et L' deux langages (à états), alors $L \setminus L' = L \cap \overline{L'}$. Comme les langages à états sont fermés par négation et intersection, alors $l \setminus L'$ est un langage à états si L et L' sont des langages à états.
7. Vrai. A partir des automates reconnaissant L et L' deux langages à états, nous pouvons obtenir un automate qui reconnaît $L \cdot L'$ en construisant l'automate contenant les mêmes états et transitions que les automates de L et L'. Par ailleurs, nous gardons comme états accepteurs ceux de l'automate reconnaissant L' et ajoutons une ϵ-transition entre chaque état accepteur de l'automate reconnaissant L vers l'état initial l'automate qui reconnaît L'.
8. Vrai. Par définition, l'ensemble des états de l'automate produit est le produit cartésien de l'ensemble d'états des deux automates utilisés. Le cardinal du produit cartésien de deux ensembles est le produit des cardinaux.
9. Faux. Par exemple, nous pouvons prendre le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui contiennent autant de a que de b qui n'est pas un langage à états. Ce langage est un sous-ensemble du langage universel sur l'alphabet $\{a, b\}$.
10. Faux. Par exemple, nous pouvons prendre le premier exemple du cours sur la déterminisation.

Solution de l'exercice ??

1. Le determinisé de l'automate représenté dans la Figure 1a est donné ci-dessous.



2. Nous renommons les états de l'automate pour obtenir l'automate ci-dessous.



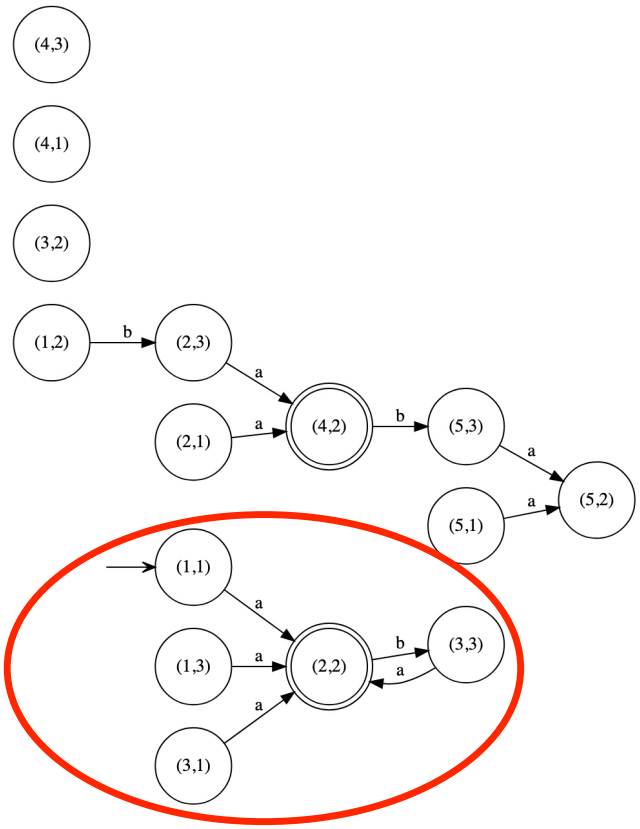
Ensuite, nous appliquons l'algorithme de minimisation (l'automate est complet).

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$	$\equiv_3$
0	0	0	0
3	3	3	3
1	1	1	1
5	5	5	5
2	2	2	2
4	4	4	4

L'automate est minimal.

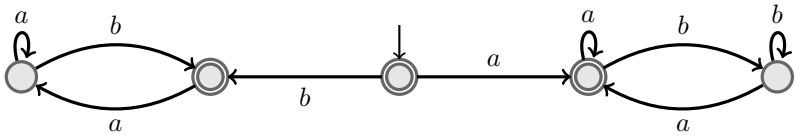
Solution de l'exercice ??

1. Le produit des deux automates est donné ci-dessous. Tous les états sont représentés. En calculant le produit à la volée, nous obtenons uniquement la partie dans l'ovale rouge.



Solution de l'exercice 4

1. Deux mots dans L sont aba et b. Deux mots dans $\Sigma^* \setminus L$ sont $abab$ et ab.
2. Oui. Un automate reconnaissant L est donné ci-dessous.



Solution de l'exercice 5

1. L'algorithme est donné ci-dessous.

Univ. Grenoble Alpes, Département Licence Sciences et Technologies, Licence deuxième année

Déterminisation à la volée

Algorithme 2 Déterminisation à la volée

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \Delta, F)$ (* un AEFD *)
Sortie : A_d un automate équivalent au déterminisé de A

1: **ens d'états** À_visiter $:= \{\{q_{\text{init}}\}\}$;
2: **ens d'états** Déjà_visités $:= \emptyset$; (* initialement, rien n'est visité *)
3: **tant que** À_visiter $\neq \emptyset$ **faire** (* tant qu'il reste des états à visiter *)
4: Soit $\mathcal{Q} \in$ À_*visiter* ; (* prendre un état visiter *)
5: À_*visiter* $\setminus= \mathcal{Q}$; (* prendre un état visiter *)
6: **si** $\mathcal{Q} \notin$ Déjà_visités **alors**
7: Déjà_visités $\cup= \{\mathcal{Q}\}$; (* l'état q vient d'être visité *)
8: **pour** $s \in \Sigma$ **faire** (* On calcule les successeurs de $\mathcal{Q}$ *)
9: $\mathcal{Q}_s^{\text{succ}} := \{q' \in Q \mid \exists q \in \mathcal{Q} : (q, s, q') \in \delta\}$ (* successeur sur s *)
10: $\delta \cup= \{(\mathcal{Q}, s, \mathcal{Q}_s^{\text{succ}})\}$ (* ajout de la transition *)
11: **fin pour**
12: **fin si**
13: **fin tant que**
14: **retourner** $(\text{Déjà\_Visités}, \Sigma, \{q_{\text{init}}\}, \delta, \{\mathcal{Q} \in \text{Déjà\_Visités} \mid \mathcal{Q} \cap F \neq \emptyset\})$

Note $X *= x$ dénote $X = X * x$.

Solution de l'exercice 6

1. L'algorithme est donné ci-dessous.

Univ. Grenoble Alpes, Département Licence Sciences et Technologies, Licence deuxième année

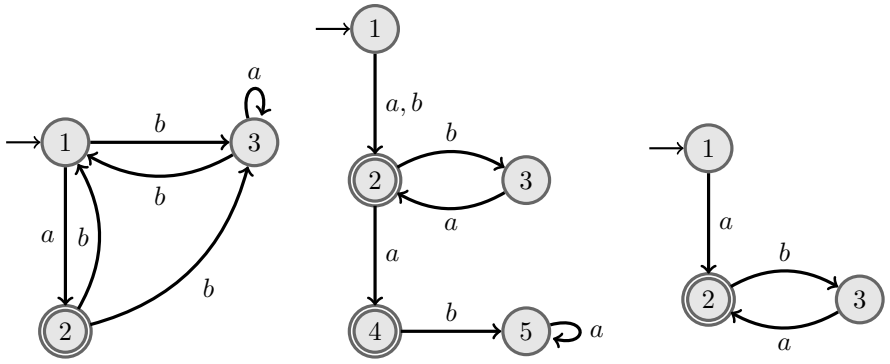
Profondeur d'un état

Algorithme 1 Profondeur d'un état dans un automate suivant 1 ordre $\prec$ entre les symboles

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AEFD *)
Entrée : $q_p \in Q$ (* un état dont on cherche la profondeur *)
Sortie : la profondeur de q_p dans A

1: **si** $q_{\text{init}} = q_p$ **alors retourner** 0
2: **fin si**
3: **file d'états** À_visiter $:= \{(q_{\text{init}}, 0)\}$;
4: **ens d'états** Déjà_visités $:= \emptyset$; (* initialement, rien n'est visité *)
5: **état** q, **entier** prof ; (* temporaires *)
6: **tant que** $\neg$ À_visiter.*est_vide*() **faire** (* tant qu'il reste des états à visiter *)
7: $(q, \text{prof}) :=$ À_visiter.*défiler*() ; (* prendre un (état, profondeur) à visiter *)
8: **si** $q \notin$ Déjà_visités **alors**
9: Déjà_visités $:=$ Déjà_visités $\cup \{q\}$; (* l'état q vient d'être visité *)
10: **pour** $q_s \in \text{Succ}(q) \setminus$ Déjà_visités **faire** (* suivant $\prec$ *)
11: **si** $q_p = q_s$ **alors retourner** prof $+ 1$
12: **sinon** À_visiter.*enfiler*$(q_s, \text{prof} + 1)$;
13: **fin si**
14: **fin pour**
15: **fin si**
16: **fin tant que**

2. Un algorithme (peu efficace) est de calculer la profondeur de chaque état. Il est possible de le faire en un passe avec un parcours en largeur et en enregistrant la profondeur maximale rencontrée.



(a) Automate pour l'exercice 2 (b) Automate pour l'exercice **??** (c) Automate pour l'exercice **??**

FIGURE 1 – Automates pour les exercices.