

Lois classiques de probabilité

Aurélie Lagoutte

Un *univers* est un ensemble d'événements. Une *variable aléatoire* X est une **fonction** qui, à chaque événement, associe une valeur (souvent un nombre) pris dans un ensemble V : elle *quantifie* quelque chose sur l'événement. L'*espérance* de X est $\mathbb{E}(X) = \sum_{v \in V} v \times \mathbb{P}(X = v)$ soit la moyenne de toutes les valeurs possibles, pondérées par leur probabilité d'arriver. Sa *variance* $V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{v \in V} \mathbb{P}(X = v)(v - \mathbb{E}(X))^2$ mesure l'écart moyen au carré de X avec son espérance.

Dans la suite : $p \in [0, 1], q = 1 - p, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$; une pièce biaisée est une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p .

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ • Domaine : $\{0, 1\}$ • Loi : $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$ • Espérance : $\mathbb{E}(X) = p$ • Variance : $V(X) = p(1 - p)$ • <i>Exemple</i> : dans un lancer de pièce biaisée, soit X valant 1 si succès (pile), 0 sinon.	Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ • Domaine : $\{0, 1, \dots, n\}$ • Loi : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ • Espérance : $\mathbb{E}(X) = np$ • Variance : $V(X) = np(1 - p)$ • <i>Exemple</i> : dans n lancers de pièce biaisée, X compte le nombre de succès.
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ • Domaine : $\mathbb{N}^*$ • Loi : $P(X = k) = pq^{k-1}$ • Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ • Variance : $V(X) = \frac{q}{p^2}$ • <i>Exemple</i> : dans des lancers successifs de pièce biaisée, soit X valant le rang du premier succès.	Loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p)$ • Domaine : $\{r, r + 1, \dots\}$ • Loi : $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}$ • Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$ • Variance : $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ • <i>Exemple</i> : dans des lancers successifs de pièce biaisée, soit X valant le rang du r-ième succès.
Loi binomiale négative $\mathcal{I}(r, p)$ • Domaine : $\mathbb{N}$ • Loi : $P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1 - p)^k$ • Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ • Variance : $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ • <i>Exemple</i> : dans des lancers successifs de pièce biaisée, soit X valant le nombre d'échecs avant d'obtenir le r-ième succès.	Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, m)$ • Domaine : $\{0, \dots, n\}$ • Loi : $P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ • Espérance : $\mathbb{E}(X) = \frac{nm}{N}$ • Variance : $V(X) = \frac{N-n}{N-1} \frac{nm}{N} \left(1 - \frac{m}{N}\right)$ • <i>Exemple</i> : si l'on procède à un tirage sans remise de n boules dans une urne contenant N boules dont m blanches, X compte le nombre de boules blanches tirées.

Mais aussi : loi uniforme, loi de Poisson (loi des événements rares & convergence de la loi binomiale), loi normale (Gaussienne)

...

Guide de survie en proba pour informaticien :

Linéarité de l'espérance Soient X_i des variables aléatoires pour $i = 1 \dots k$. $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X_i)$	Borne de l'union Soient A_i des prédicats pour $i = 1 \dots k$ $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i)$	Inégalité de Markov Soit X une variable aléatoire à valeur dans (un sous-ensemble de) $\mathbb{R}^+$, et $\lambda > 0$. $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$
--	---	---