Fonctions holomorphes
d'une variable complexe

Notes de cours rédigées par Christine Laurent-Thiébaut,
modifiées par Dietrich Häfner, Didier Piau et Vincent Beffara

— Version du 8 octobre 2021 —

Table des matières

Principaux résultats du cours

Chapitre 1 : Fonctions analytiques

Principe du prolongement analytique : Toute fonction analytique sur un ouvert connexe nulle au voisinage d'un point ou dont toutes les dérivées en un point sont nulles, est identiquement nulle.

Principe des zéros isolés : L'ensemble des zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sur un ouvert connexe, est localement fini.

Chapitre 2 : Fonctions holomorphes

Équations de Cauchy-Riemann.

Théorème d'inversion locale, version $\mathcal{C}^1$-holomorphe : En tout point où sa dérivée n'est pas nulle, une fonction $\mathcal{C}^1$-holomorphe admet un inverse local holomorphe.

Détermination continue du logarithme : La fonction $z \mapsto 1/z$ admet des primitives sur un ouvert U si et seulement si le logarithme (ou l'argument) admet des déterminations continues sur U.

Formule de Cauchy sur un disque. Holomorphe si et seulement si analytique. Formule de Cauchy sur un disque pour les dérivées.

Chapitre 3 : Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

Inégalités de Cauchy : $|a_n| \leqslant r^{-n} \sup\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Théorème de Liouville : Toute fonction entière bornée est constante. (Théorème de d'Alembert : Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.)

Théorème de Weierstraß : La limite au sens de la convergence uniforme sur les compacts d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe et les suites des dérivées convergent au sens de la convergence uniforme sur les compacts vers les dérivées de la limite.

Théorème de convergence dominée pour les fonctions holomorphes

Toute fonction holomorphe possède la Propriété de la moyenne. La propriété de la moyenne implique le principe du maximum. Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe n'admet pas de maximum local. Tout minimum local d'une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe, est nul.

Principe du maximum : Une fonction holomorphe sur un ouvert connexe borné U et continue sur $\overline{U}$, est bornée sur $\overline{U}$ par son maximum sur ∂U. Cas d'égalité du principe du maximum : si le maximum sur ∂U est atteint en un point de U, la fonction est constante.

Lemme de Schwarz : Une fonction f holomorphe $D \to \overline{D}$ et nulle en 0 vérifie, ou bien $f(z) = \lambda z$ sur D avec $|\lambda| = 1$, ou bien $|f'(0)| < 1$ et $|f(z)| < |z|$ sur D^*.

Théorème de l'application ouverte : L'image de tout ouvert inclus dans U par une application holomorphe non constante définie sur un ouvert connexe U, est un ouvert.

Chapitre 4 : Théorie de Cauchy pour les domaines étoilés

Primitives $\iff$ lacets : Une fonction continue définie sur un ouvert admet une primitive si et seulement si son intégrale sur tout lacet inclus dans l'ouvert est nulle.

Étoilé + triangles $\implies$ primitives : Une fonction continue définie sur un ouvert étoilé admet des primitives si et seulement si son intégrale le long de tout triangle inclus dans l'ouvert est nulle.

Étoilé + holomorphe $\implies$ primitives : Toute fonction holomorphe sur un ouvert étoilé admet des primitives et son intégrale sur tout lacet est nulle.

Formule de Cauchy pour les ouverts étoilés : Pour toute fonction f holomorphe sur un ouvert étoilé U, tout point z de U et tout lacet γ dans U évitant z, $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{z-w}dw = \mathrm{Ind}_\gamma(z)f(z)$.

Théorème de Morera : Une fonction continue sur un ouvert est dérivable si et seulement si holomorphe si et seulement si analytique si et seulement si admet localement une primitive si et seulement si d'intégrale nulle sur tout triangle inclus dans l'ouvert.

Chapitre 5 : Fonctions méromorphes

Classification des singularités isolées : Une fonction holomorphe sur un ouvert privé d'un point a et bornée au voisinage de a admet une singularité apparente en a. Les deux autres situations possibles sont que a est un pôle d'ordre m, alors $f(z) = g(z)/(z-a)^m$ avec g holomorphe et $g(a) \neq 0$, et que a est une singularité essentielle, alors l'image de tout voisinage épointé de a est dense dans $\mathbb{C}$.

Théorème des résidus : Soit f holomorphe sur $U \setminus A$ avec U étoilé et $A \subset U$ l'ensemble fini des pôles de f, et γ un lacet dans U évitant A, alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in A} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$.

Théorème de l'indice : Soit g holomorphe sur U étoilé et f méromorphe sur U avec $A \subset U$ l'ensemble fini des pôles de f comptés avec leur multiplicité, $B \subset U$ l'ensemble fini des zéros de f comptés avec leur multiplicité, et γ un lacet qui évite A et B, alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A} \mathrm{Ind}_\gamma(a)g(a) - \sum_{b\in B} \mathrm{Ind}_\gamma(b)g(b)$. En particulier, $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A}\mathrm{Ind}_\gamma(a) - \sum_{b\in B}\mathrm{Ind}_\gamma(b)$.

La limite au sens de la convergence uniforme sur les compacts d'une suite de fonctions holomorphes sans zéro sur un ouvert connexe, est soit identiquement nulle soit sans zéro. La limite au sens de la convergence uniforme sur les compacts d'une suite de fonctions holomorphes injectives sur un ouvert connexe, est soit constante soit injective.

Théorème de Rouché. Conséquence : Si f et g sont holomorphes sur un domaine contenant un disque et si $|f-g| < |f|$ sur le cercle bord de ce disque, alors f et g possèdent le même nombre de zéros comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque. Conséquence de la conséquence : Théorème de d'Alembert.

Théorème d'inversion locale, version multivaluée ("théorème des racines") : Si f est holomorphe dans un voisinage de z_0 et si z_0 est un zéro d'ordre k de la fonction $f - f(z_0)$ alors, pour tout w au voisinage de $f(z_0)$, la fonction $f - w$ admet exactement k racines distinctes au voisinage de z_0.

Théorème de l'application ouverte : Toute fonction holomorphe non constante définie sur un ouvert connexe est une application ouverte.

Théorème d'inversion locale, version holomorphe : Si f est holomorphe dans un voisinage de z_0 et si $f'(z_0) \neq 0$, alors f est une bijection biholomorphe d'un voisinage de z_0 dans un voisinage de $f(z_0)$. La fonction inverse vaut $g(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz$, et de plus, pour toute fonction holomorphe h, $h(g(w)) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma h(z)\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz$.

Chapitre 1

Fonctions analytiques

1.1 Séries entières

Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace vectoriel, la série associée, notée $\sum_n x_n$, est la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles de $(x_n)_{n\geq 0}$, définies par

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

pour tout $n \geq 0$. On peut noter qu'aucune convergence n'est requise.

Définition 1.1 – *Série entière*

On appelle série entière toute série de fonctions $\sum_n f_n$ telle que, pour tout $n \geq 0$, la fonction $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n(z) = a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. On appelle a_n le coefficient d'indice n (ou de degré n) de la série entière $\sum_n a_n z^n$, et a_0 le terme constant.

1.1.1 Rappels sur la convergence des séries entières

Rayon de convergence R : si $|z| < R$ alors $a_n z^n \to 0$, si $a_n z^n \to 0$ alors $|z| \leqslant R$, si $|z| > R$ alors $(a_n z^n)$ est non bornée, si $(a_n z^n)$ est non bornée alors $|z| \geqslant R$, convergence ou divergence possibles si $|z| = R$, exemples de base $\sum_n z^n$, $\sum_n a^n z^n$, $\sum_n \frac{z^n}{n!}$.

Formule d'Hadamard :

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Exercice 1.2 – *Autour de la série géométrique et de quelques séries similaires*

1. Convergence de $\sum_n z^n$ pour $|z| < 1$
   Soit $0 \leqslant t < 1$ et $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k$: alors $S_{n+1}(t) = 1 + tS_n(t)$ donc si $S_n(t) \leq 1/(1-t)$ alors $S_{n+1}(t) \leq 1 + t/(1-t) = 1/(1-t)$ donc $S_n(t) \leq 1/(1-t)$ pour tout n donc $\sum_n z^n$ converge (absolument) pour $|z| < 1$. De plus, si $|z| < 1$, la limite $S(z)$ de la suite $(S_n(z))$ est finie et vérifie $S(z) = 1 + zS(z)$ donc $S(z) = 1/(1-z)$.
2. Convergence de $\sum_n (n+1)z^n$ pour $|z| < 1$
   Soit $0 \leqslant t < 1$ et $R_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)t^k$ alors $R_{n+1}(t) = S_{n+1}(t) + tR_n(t) \leq 1/(1-t) + tR_n(t)$ donc si $R_n(t) \leq 1/(1-t)^2$ alors $R_{n+1}(t) \leq 1/(1-t) + t/(1-t)^2 = 1/(1-t)^2$, ce qui donne $R_n(t) \leq 1/(1-t)^2$ pour tout n donc $\sum_n (n+1)z^n$ converge (absolument) pour $|z| < 1$.
3. Convergence de $\sum_n (n+1)z^n$ pour $|z| < 1$ (preuve alternative)
   Soit $0 \leqslant t < 1$, tous les termes de $\sum_n (n+1)t^n$ sont positifs donc on peut intervertir les

sommes dans $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} t^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} t^n = \sum_{k=0}^{\infty} t^k S(t) = S(t)^2$, ce qui montre que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = 1/(1-t)^2$. De même, pour tout $|z| < 1$, la série $\sum_n (n+1)z^n$ converge absolument donc on peut aussi intervertir les sommes et le même argument donne $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = 1/(1-z)^2$.

4. Convergence de $\sum_n n^\alpha z^n$ pour $|z| < 1$ (encore une autre preuve)

   Si $|z| < 1$, $\sqrt{|z|} < 1$ donc $\alpha \log n + n \log \sqrt{|z|} \to -\infty$ donc $n^\alpha (\sqrt{|z|})^n \to 0$, dont on ne garde que la conséquence $n^\alpha (\sqrt{|z|})^n \leqslant c$, donc $n^\alpha |z|^n \leqslant c(\sqrt{|z|})^n$, ce qui montre que $\sum_n n^\alpha z^n$ converge (absolument) puisque $\sum_n (\sqrt{|z|})^n$ converge.

1.1.2 Dérivabilité des séries entières

Définition 1.3 – *Série dérivée*

La série dérivée de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est la série entière $\sum_n (n+1)a_{n+1}z^n$.

Il s'agit pour l'instant d'une notion purement formelle, sans rapport avec la dérivée d'une fonction. Par exemple, la série entière dérivée de la série entière $\sum_n n!\, z^n$ existe bien et vaut la série entière $\sum_n (n+1)\,(n+1)!\, z^n$ alors que la notion de fonction dérivée de la série $\sum_n n!\, z^n$ est vide puisque cette série ne converge pour aucun $z \neq 0$.

Proposition 1.4

Une série entière et sa série entière dérivée ont le même rayon de convergence.

Démonstration. *Notons R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de $\sum_n (n+1)a_{n+1}z^n$.*

Si $|z| > R$, la suite de terme général $a_n z^n$ n'est pas bornée. Il en est de même pour la suite de terme général $(n+1)a_{n+1}z^n$ donc la série $\sum_n (n+1)a_{n+1}z^n$ diverge. D'où $R' \leqslant |z|$.

Si $|z| < R$, soit $r > |z|$ tel que $r < R$ et $u = |z|/r$, donc $0 \leqslant u < 1$. La série $\sum_n a_n r^n$ est convergente donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée, c'est-à-dire $|a_n| r^n \leqslant c$ pour c finie. En particulier,

$$|(n+1)a_{n+1}z^n| = (n+1)|a_{n+1}|r^n u^n \leqslant (c/r)(n+1)u^n$$

La série $\sum_n (n+1)u^n$ converge donc la série $\sum_n (n+1)a_{n+1}z^n$ est absolument convergente, ce qui montre $R' \geqslant |z|$. □

Définition 1.5 – *Dérivabilité au sens complexe*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est *dérivable (au sens complexe) en z_0* si la fonction $g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite quand z tend vers z_0. La limite $\lim_{z\to z_0} g(z)$ est alors notée $f'(z_0)$ et on l'appelle la dérivée de f en z_0. On dit que f est *holomorphe sur U* si f est dérivable au sens complexe en tout point de U, et on note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Remarque 1.6

La $\mathbb{C}$-dérivabilité entraîne la $\mathbb{R}^2$-différentiabilité mais la réciproque est fausse. Exemples : $f(z) = z^2$, $f(z) = \bar{z}$.

Théorème 1.7 – *Les séries entières sont dérivables*

En tout point z_0 du disque de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$, la fonction somme S est dérivable et $S'(z_0)$ est égal à la somme de la série $\sum_n (n+1)a_{n+1}z_0^n$.

Démonstration. *Fixons $|z_0| < r < R$, où R est le rayon de convergence commun à la série et la série dérivée. Pour $z \in D(0,r) \setminus \{z_0\}$, on a :*

$$\frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2}z + z_0^{n-1})$$

Considérons la série d'applications $\sum f_n$, où $f_n : D(0,r) \to \mathbb{C}$ est définie par

$$f_n(z) = a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2}z + z_0^{n-1})$$

Chaque fonction f_n est continue sur $D(0,r)$. En outre :

$$\sup\{|f_n(z)|; |z| \leqslant r\} \leqslant n|a_n|r^{n-1}$$

Comme $r < R$, la série de terme général $n|a_n|r^{n-1}$ est convergente. Par suite la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $D(0,r)$. Sa somme g est donc continue sur $D(0,r)$. Or :

$$g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

et, pour tout $z \neq z_0$,

$$g(z) = \frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0}$$

donc la continuité de g en z_0 fournit le résultat. □

Corollaire 1.8 – *Les séries entières sont $\mathcal{C}^\infty$*

Dans le disque de convergence, la fonction somme d'une série entière est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives.

Remarque 1.9

Pour tout entier naturel n et tout $z \in D(0,R)$,

$$S^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n)!}{j!} a_{j+n} z^j$$

En particulier, si $R > 0$,

$$S^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

1.2 Fonctions développables en série entière

Définition 1.10 – *Fonctions développables en série entière*

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction. On dit que f est développable en série entière au point z_0, ce que l'on note $f \in \mathrm{DSE}(z_0)$, si f est définie dans un voisinage de z_0 et s'il existe une série entière $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \Longleftrightarrow \quad f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n.$$

Pour tout $r > 0$, on note $f \in \mathrm{DSE}(z_0, r)$ si le rayon de convergence de la série entière vaut au moins r et si $D(z_0, r) \subset V$.

Théorème 1.11

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{DSE}(z_0)$. Alors :

1. Il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est indéfiniment dérivable.
2. Le développement en série entière de f en z_0 est son développement de Taylor, également appelé série de MacLaurin de f, c'est-à-dire la série entière

$$\sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n.$$

Démonstration. *On suppose que $z_0 = 0$, sans perte de généralté. Il existe $R > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence au moins égal à R, tels que $D(0, R)$ soit contenu dans le domaine de définition de f, et*

$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

pour tout $z \in D(0, R)$. Comme S est indéfiniment dérivable dans $D(0, R)$, f l'est aussi. En outre par un calcul précédent $f^{(p)}(0) = S^{(p)}(0) = p!\, a_p$. □

Corollaire 1.12

On en déduit les propriétés suivantes :

1. Si le développement en série entière d'une fonction existe en un point, il est unique.
2. Si une fonction est dans $\mathrm{DSE}(z_0)$, ses dérivées successives en z_0 le sont aussi, et leurs développements en série entière en z_0 sont les séries entières dérivées successives du développement en série entière de la fonction en z_0.
3. Soient f et g dans $\mathrm{DSE}(z_0)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f + g$, λf et fg sont dans $\mathrm{DSE}(z_0)$.

(La preuve du corollaire pour un produit fg utilise les produits de Cauchy et les majorations évidentes par des séries géométriques.)

Exemple 1.13

Si $z \neq 1$, pour tout entier naturel n,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

On en déduit que, si $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. En écrivant

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a(1 - a^{-1}z)}$$

on obtient, pour tout $|z| < |a|$,

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

Exercice 1.14

Démontrer de deux façons différentes le développement en série entière en 0, valide pour $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Tout d'abord, comme dérivée d'une fonction de développement en série entière connu. Ensuite, comme produit de deux fonctions de développements en série entière connus.

1.3 Fonctions analytiques

Définition 1.15 – *Fonction analytique*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f définie sur U est *dite analytique sur U* si $f \in \mathrm{DSE}(z)$ pour tout $z \in U$. On note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U, donc

$$\mathcal{A}(U) = \bigcap_{z \in U} \mathrm{DSE}(z).$$

Il est clair que $\mathcal{A}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre contenant la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions polynômes sur $\mathbb{C}$ et que, par exemple d'après le théorème 1.7, toute fonction analytique sur U est holomorphe sur U, c'est-à-dire, en symboles,

$$\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$$

Théorème 1.16 – *Les séries entières sont analytiques*

Si une série entière $\sum_n a_n z^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$, la fonction somme $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ est analytique sur le disque ouvert $D(z_0, R)$.

En symboles, le théorème affirme que, pour tout $R > 0$,

$$\mathrm{DSE}(z_0, R) \subset \mathcal{A}(D(z_0, R))$$

Remarquons qu'il y a bien quelque chose à démontrer ici, très précisément le fait que, si $|z - z_0| < R$, alors

$$\mathrm{DSE}(z_0, R) \subset \mathrm{DSE}(z)$$

Démonstration. *(Pour $z_0 = 0$, sans perte de généralité.) Soient f la fonction somme de la série entière $\sum_n a_n z^n$ sur $D(0, R)$. Fixons $z \in D(0, R)$ et notons $r = |z|$. On va prouver que, pour tout w tel que $|w| < R - r$,*

$$f(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) w^n$$

Fixons donc w tel que $|w| < R - r$, choisissons ϱ tel que $|w| < \varrho - r < R - r$, et introduisons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z) w^k$$

pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel k,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{j!}{(j-k)!} a_j z^{j-k} \right) w^k$$

Écrivons à présent $S_n = S'_n + S''_n$, *avec*

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} a_j z^{j-k}\right) w^k$$

et

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{j!}{(j-k)!} a_j z^{j-k}\right) w^k$$

Il vient

$$S'_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} z^{j-k} w^k\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j (z+w)^j$$

Comme $|z+w| < R$, *on sait que*

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z+w)^j = f(z+w)$$

De nouveau, comme $\varrho < R$,

$$|S''_n| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{j!}{k!(j-k)!} r^{j-k}(\varrho - r)^k\right)$$

donc

$$|S''_n| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} r^{j-k}(\varrho - r)^k\right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \varrho^j$$

En utilisant une dernière fois la condition $\varrho < R$, *on obtient*

$$\lim_{n\to\infty} S''_n = 0$$

□

1.4 La fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle par $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 1.17

La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{C}$. Sa dérivée en $z \in \mathbb{C}$ vaut e^z.

Proposition 1.18

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+w} = e^z e^w, \qquad e^z \neq 0, \qquad (e^z)^{-1} = e^{-z}, \qquad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \qquad |e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration. *Exercice.* □

Définition 1.19

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$, on appelle $\mathbb{U}$ le *cercle unité* du plan complexe. Donc, $e^{iz} \in \mathbb{U}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.20

La fonction exponentielle complexe induit un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ qui est continu, surjectif, non injectif.

Démonstration. *Le fait que l'exponentielle réalise un homomorphisme de groupes suit de la Proposition 1.18 et la continuité suit de la continuité de l'exponentielle. Montrons la surjectivité. Soit d'abord $\xi \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. L'application $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 1 - t + t\xi$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annule pas. Définissons $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ et $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ par*

$$g(t) = \int_0^t \frac{f'(u)}{f(u)} du \qquad h(t) = f(t)e^{-g(t)}$$

Les applications g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient :

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \qquad h'(t) = 0$$

Comme $h(0) = 1$, il vient $f(t) = e^{g(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier $e^{g(1)} = \xi$. Appliquant ceci à $\xi = i$, on voit qu'il existe $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tel que $e^\zeta = i$. Alors $e^{2\zeta} = -1$. Soit $\theta \in \mathbb{R}^-$, il vient alors

$$e^\xi = \theta \iff e^{\xi + 2\zeta} = -\theta$$

Ceci montre que l'équation $e^z = \xi$ possède au moins une solution pour tout $\xi \in \mathbb{C}^*$. Avec les notations précédentes $e^{4\zeta} = 1 = e^0$, l'exponentielle n'est donc pas injective. □

Rappelons qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense soit de la forme $\theta\mathbb{Z}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. L'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$, est un homomorphisme de groupes et une application continue. Soit $\zeta \in \mathbb{U}$. D'après le Théorème 1.20, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} = \zeta$. Il en résulte que ϕ est surjectif. Comme nous l'avons vu, ϕ est non injectif, notons G son noyau, donc $G \neq \{0\}$. D'autre part, G est un fermé de $\mathbb{R}$ car ϕ est continue. Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. On a donc obtenu :

Théorème 1.21

L'application $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{U}, \times)$, $t \mapsto e^{it}$ est un homomorphisme de groupes, surjectif, non injectif. Son noyau est de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel a est le plus petit réel positif tel que $e^{ia} = 1$. On le note $a = 2\pi$.

Proposition 1.22

Le noyau de l'homomorphisme $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$, $z \mapsto e^z$ est $2\pi i\mathbb{Z}$. De plus, la fonction $\exp$ est périodique, et l'ensemble de ses périodes est $2\pi i\mathbb{Z}$.

Démonstration laissée en exercice.

1.5 Principe du prolongement analytique

Théorème 1.23

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est identiquement nulle dans U ;
2. La fonction f est identiquement nulle dans un voisinage de u ;
3. Pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(u) = 0$.

Noter l'hypothèse de connexité de U, sans laquelle le théorème devient clairement faux.

Démonstration. *Les implications* $1 \implies 2 \implies 3$ *sont claires.*

$3 \implies 2$ *est immédiat car, par définition de* $\mathcal{A}(U)$, *au voisinage de* u,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(u)(z-u)^n$$

Reste $2 \implies 1$. *Soit* V *l'ensemble des* $z \in U$ *tels que* f *est identiquement nulle dans un voisinage de* z. *Par construction,* V *est un ouvert de* U, *et* V *est non vide par hypothèse. Soit* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* V *convergeant vers* $z \in U$. *Pour* n *et* k *entiers naturels,* $f^{(k)}(z_n) = 0$. *Par continuité des fonctions* $f^{(k)}$, *il vient* $f^{(k)}(z) = 0$ *pour tout* k. *La fonction* f *étant développable en série entière en* z, *on en déduit que* f *est nulle au voisinage de* z, *soit* $z \in V$. *On a prouvé que* V *est non vide, ouvert et fermé dans* U. *Comme* U *est connexe, il vient* $U = V$, *ce qui démontre 1.* □

Corollaire 1.24 – *Principe du prolongement analytique*

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f et g dans $\mathcal{A}(U)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, alors $f = g$.

1.6 Principe des zéros isolés

Définition 1.25 – *Parties discrètes et parties localement finies*

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $A \subset U$. On dit que A est une *partie discrète de* U si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \cap A = \{a\}$. On dit que A est une *partie localement finie de* U si une des conditions suivantes équivalentes est réalisée :

1. Tout $z \in U$ possède un voisinage V tel que $V \cap A$ soit fini,
2. Pour tout compact K de U, l'ensemble $K \cap A$ est fini,
3. A est une partie discrète et fermée de U.

Démonstration de l'équivalence. *(Peut être omise en première lecture.)*

$1 \implies 2$. *Soit* K *un compact de* U. *Si* $z \in K$, *soit* V_z *un voisinage ouvert de* z *dans* U *tel que* $A \cap V_z$ *soit fini. Par compacité de* K, *il existe* n *points* $z_k \in K$ *tel que* $K \subset V_{z_1} \cup \cdots \cup V_{z_n}$. *Alors* $K \cap A \subset [A \cap V_{z_1}] \cup \cdots \cup [A \cap V_{z_n}]$, *donc* $K \cap A$ *est fini.*

$2 \implies 3$. *Soit* $z \in A$. *Comme* U *est ouvert, pour* $r > 0$ *assez petit,* $\bar{D}(z,r) \subset U$. *Comme* $\bar{D}(z,r)$ *est compact,* $\bar{D}(z,r) \cap A$ *est fini donc il existe* $0 < s < r$ *tel que* $D(z,s) \cap A = \{z\}$, *ce qui montre que* A *est une partie discrète de* U.

Soit z *un point de l'adhérence* $\bar{A} \cap U$ *de* A *dans* U. *Supposons* $z \notin A$. *Si* V *est un voisinage compact de* z *dans* U, $V \cap A$ *est fini. Comme précédemment, il existe un voisinage* W *de* z *tel que* $W \cap A = \varnothing$, *d'où une contradiction.*

$3 \implies 1$. *Soit* $z \in U$. *Si* $z \in A$, z *possède un voisinage* V *tel que* $V \cap A = \{z\}$, *car* A *est une partie discrète de* U. *Si* $z \notin A$, *il existe un voisinage* V *de* z *tel que* $V \cap A = \varnothing$ *car* A *est fermé dans* U. □

Exercice 1.26

Déterminer si les ensembles $\{2^{-n}\,;\ n \geq 1\}$ et $\{1 - 2^{-n}\,;\ n \geq 0\}$ sont des parties discrètes ou localement finies de $\mathbb{U}$.

Théorème 1.27 – *Principe des zéros isolés*

Soit $f \in \mathcal{A}(U)$ une fonction non identiquement nulle, où U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Alors l'ensemble Z des zéros de f est une partie localement finie de U.

Noter encore une fois l'hypothèse de connexité de U, sans laquelle le théorème devient clairement faux.

Démonstration. *Puisque f est continue, Z est un fermé de U. Il suffit donc de prouver que Z est une partie discrète de U. Soit $u \in Z$. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $f^{(k)}(u) \neq 0$. Soit n le plus petit de ces entiers. Au voisinage de u, on a donc*

$$f(z) = a_n(z-u)^n + (z-u)^n g(z)$$

avec $a_n \neq 0$ et

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}(z-u)^k$$

Ainsi, $g(u) = 0$. Comme $g \in \mathrm{DSE}(u)$, g est continue en u. Il existe donc un voisinage V de u dans U tel que $|g(z)| < |a_k|$ si $z \in V$. À présent, si $z \in V \setminus \{u\}$, on voit que $|f(z)| \geqslant |z-u|^n(|a_n| - |g(z)|) > 0$, d'où le résultat. □

Corollaire 1.28

Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{A}(U)$ est intègre.

Proposition 1.29 – *Ordre d'un zéro*

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle, et $z_0 \in U$ un zéro de f. Il existe un unique entier strictement positif n vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

1. $f^{(k)}(z_0) = 0$ pour tout $0 \leqslant k < n$ et $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.
2. Le premier terme non nul du développement de f en série entière au voisinage de z_0 est de la forme $a \cdot (z - z_0)^n$ avec $a \neq 0$.
3. Il existe une fonction $h \in \mathcal{A}(U)$ telle que $h(z_0) \neq 0$ et, pour tout $z \in U$,

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z).$$

On dit que n est l'ordre ou la multiplicité du zéro z_0 de f.

Démonstration. *Immédiate en utilisant la preuve du Théorème 1.27.* □

Chapitre 2

Fonctions holomorphes

Après des rappels sur la différentiabilité des fonctions de deux variables réelles, on se tourne vers l'étude des propriétés des fonctions holomorphes introduites au chapitre 1, basées sur la notion de dérivation au sens complexe pour les fonctions d'une variable complexe.

2.1 Rappels sur la différentiabilité et la linéarité

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$ une fonction, donc $f = (P, Q)$ pour des fonctions $P : U \to \mathbb{R}$ et $Q : U \to \mathbb{R}$.

On rappelle que l'application f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire ℓ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \ell(h, k) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

où $\varepsilon(h, k) \to (0, 0)$ si $\|(h, k)\| \to 0$. L'application ℓ s'appelle alors la différentielle de f en (x_0, y_0), on la note $\ell = df(x_0, y_0)$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vaut

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à présent aux applications $\mathbb{C}$-linéaires. Rappelons que la multiplication sur $\mathbb{C}$, identifié à $\mathbb{R}^2$, est définie par

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$$

c'est-à-dire,

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay).$$

Lemme 2.1

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
2. Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \alpha z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. L'application f est $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
avec a et b dans $\mathbb{R}$, en d'autres termes f est une similitude du plan $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. *Supposons que f est $\mathbb{C}$-linéaire alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(1)z$, il suffit donc de poser $\alpha = u(1)$.*

Supposons maintenant que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z$ avec $\alpha = a + ib$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Finalement supposons que f est une similitude de matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = (ax - by, bx + ay) = (a, b) \cdot (x, y) = \alpha z$$

avec $\alpha = a + ib$, de plus l'application $z \mapsto \alpha z$ est clairement $\mathbb{C}$-linéaire. □

2.2 Équations de Cauchy-Riemann

Proposition 2.2 – *Équations de Cauchy-Riemann*

Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = (x_0, y_0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.
2. La fonction f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en (x_0, y_0) et f satisfait l'équation de Cauchy-Riemann (complexe)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$
De façon équivalente, si $f = P + iQ$, P et Q satisfont les équations de Cauchy-Riemann (réelles)
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$
et
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$
3. La fonction f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en (x_0, y_0) et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Démonstration. $1 \iff 3$ *: Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, il existe une fonction ε_1 définie au voisinage de 0 telle que*

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + f'(z_0)w + w\varepsilon_1(w)$$

et $\varepsilon_1(w) \to 0$ quand $w \to 0$. De façon équivalente,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f'(z_0)h + if'(z_0)k + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

si $w = h + ik$ avec

$$\varepsilon(h, k) = \frac{h + ik}{|h + ik|}\varepsilon_1(h + ik)$$

Par conséquent f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en (x_0, y_0) et sa différentielle $df(x_0, y_0)$ vérifie

$$df(x_0, y_0)(h, k) = f'(z_0)(h + ik)$$

donc $df(x_0, y_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

$3 \iff 2$ *: D'après le lemme 2.1, l'application $df(x_0, y_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement s'il existe des nombres réels a et b tels que sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ou encore à

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

□

Remarque 2.3

Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Proposition 2.4

1. Les fonctions définies au voisinage de z_0 et $\mathbb{C}$-dérivables en z_0 forment une algèbre.
2. Soient f une fonction définie au voisinage de z_0 et $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et g une fonction définie au voisinage de $f(z_0)$ et $\mathbb{C}$-dérivable en $f(z_0)$, alors $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et sa dérivée en z_0 vaut $g'(f(z_0))f'(z_0)$.
3. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et si $f(z_0) \neq 0$, alors $g = 1/f$ est définie au voisinage de z_0, $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $g'(z_0) = -f'(z_0)/f(z_0)^2$.

Proposition 2.5

1. L'ensemble $\mathcal{H}(U)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $C(U)$ des fonctions continues sur U.
2. Si $f \in \mathcal{H}(U)$ ne s'annule pas sur U, alors $1/f \in \mathcal{H}(U)$.
3. Si U et V sont des ouverts de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, $g \in \mathcal{H}(V)$, et $f(U) \subset V$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$.

Exemple 2.6

1. L'application identique $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. L'application $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$. En fait, elle n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.
3. Toute application polynômiale $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
4. Toute fraction rationnelle P_1/P_2, où P_1 et P_2 sont des polynômes, est holomorphe sur l'ensemble $\mathbb{C}$ privé des zéros de P_2.
5. La somme d'une série entière définit une fonction holomorphe sur le disque ouvert de convergence de la série entière. La fonction dérivée est alors elle-même la somme d'une série entière donc continue sur ce disque. Ainsi, les fonctions analytiques sur U sont holomorphes sur U et leur dérivée est continue sur U.

Définition 2.7 – *Fonction $\mathcal{C}^1$-holomorphe*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est *$\mathcal{C}^1$-holomorphe* sur U, ce que l'on note $f \in \mathcal{H}_1(U)$, si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U et si l'application $z \mapsto f'(z)$ est continue sur U.

Remarque 2.8

On sait déjà que $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}_1(U) \subset \mathcal{H}(U)$. On verra dans la Section 2.5 que toute fonction holomorphe est en fait $\mathcal{C}^1$-holomorphe et analytique, c'est-à-dire que $\mathcal{A}(U) = \mathcal{H}_1(U) = \mathcal{H}(U)$.

Théorème 2.9 – *Théorème d'inversion locale, version $\mathcal{C}^1$-holomorphe*

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}_1(U)$ et $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) \neq 0$.

Alors il existe un voisinage ouvert V de z_0 et un voisinage ouvert W de $f(z_0)$ tels que $f : V \to W$ est bijective, $f^{-1} : W \to V$ appartient à $\mathcal{H}_1(W)$ et, pour tout $z \in V$,

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Démonstration. *Après identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, le jacobien de f est donné par*

$$J(f)(z) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(z) & \frac{\partial P}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(z) & \frac{\partial Q}{\partial y}(z) \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(z)\right)^2 = |f'(z)|^2$$

grâce aux équations de Cauchy-Riemann, donc $J(f)(z_0) \neq 0$.

Le théorème d'inversion locale dans $\mathbb{R}^2$ pour les donctions $\mathcal{C}^1$ affirme alors qu'il existe un voisinage ouvert V de z_0 et un voisinage ouvert W de $f(z_0)$ tel que $f : V \to W$ soit bijective, f^{-1} est différentiable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur W et $d(f^{-1})(f(z)) = (df(z))^{-1}$. Puisque l'application inverse d'une similitude est encore une similitude, l'application f^{-1} est holomorphe et sa dérivée vaut

$$\frac{1}{|f'(z)|^2}\overline{f'(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

□

Remarque 2.10

Dans l'énoncé du théorème d'inversion locale et dans sa preuve, on a noté f la restriction de f à V, à valeurs dans W.

2.3 Détermination continue du logarithme

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument de z tout nombre réel t tel que

$$e^{it} = \frac{z}{|z|}.$$

Définition 2.11 – *Détermination continue de l'argument*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. On appelle détermination continue de l'argument sur U, toute application continue $\vartheta : U \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in U$, $\vartheta(z)$ soit un argument de z.

Proposition 2.12

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ et ϑ_1 et ϑ_2 deux déterminations continues de l'argument sur U. Alors il existe un entier relatif k tel que $\vartheta_1(z) - \vartheta_2(z) = 2\pi k$ pour tout $z \in U$.

Démonstration. *D'après la Proposition 1.22, pour tout $z \in U$, il existe un entier $k(z)$ tel que $\vartheta_1(z) - \vartheta_2(z) = 2k(z)\pi$. Les fonctions ϑ_1 et ϑ_2 étant continues sur U, il en est de même de la fonction k. Comme k est à valeurs entières, k est localement constante sur U. L'ouvert U étant connexe, k est constante.* □

On appelle *détermination principale de l'argument* sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, et on note $\operatorname{Arg} z$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, l'unique argument de z dans $]-\pi, \pi[$.

Lemme 2.13

La détermination principale de l'argument est une détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Démonstration. On dispose de descriptions explicites de $\operatorname{Arg} z$, *partiellement redondantes, selon la partie de* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *où se trouve* $z \neq 0$:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arcsin \operatorname{Im}(z/|z|) & \text{si} \quad \operatorname{Re} z > 0, \\ \arccos \operatorname{Re}(z/|z|) & \text{si} \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ -\arccos \operatorname{Re}(z/|z|) & \text{si} \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

On en déduit facilement le résultat. □

Nous verrons qu'il n'existe pas de détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C}^*$ tout entier. Cependant, au voisinage de chaque point $a \in \mathbb{C}^*$, il existe une détermination continue de l'argument. En effet, soit ω un argument de a, alors la fonction $z \mapsto \omega + \operatorname{Arg}(ze^{-i\omega})$ est une détermination continue de l'argument sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(ze^{-i\omega}) > 0\}$.

Définition 2.14 – *Logarithme complexe*

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle logarithme de z tout nombre complexe ζ tel que $e^\zeta = z$.
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. On appelle détermination continue du logarithme sur U toute application continue $\ell : U \to \mathbb{C}$ telle que $e^{\ell(z)} = z$ pour tout $z \in U$.

Soit $\zeta = a + ib \in \mathbb{C}$, avec a et b réels, un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $e^a = |z|$ et $e^{ib} = z/|z|$ donc $\zeta = \ln |z| + i\theta$, où θ est un argument de z.

Proposition 2.15

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Les déterminations continues du logarithme sur U sont les fonctions sur U de la forme

$$z \mapsto \ln |z| + i\vartheta(z)$$

où ϑ est une détermination continue de l'argument sur U. Si U est connexe, et si ℓ_1 et ℓ_2 sont des déterminations continues du logarithme sur U, alors il existe un entier k tel que $\ell_1(z) - \ell_2(z) = 2ik\pi$ pour tout $z \in U$.

On appelle détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ la fonction $z \mapsto \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ et on la note Log. On prendra garde de réserver les notations $\log$ et $\ln$ à la fonction logarithme définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.16

Soit ℓ une détermination continue du logarithme sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$, et soient z et ζ dans U tels que $z\zeta \in U$. On prendra garde au fait qu'effectivement,

$$\ell(z\zeta) - \ell(z) - \ell(\zeta) \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

mais qu'en général,

$$\ell(z\zeta) \neq \ell(z) + \ell(\zeta).$$

Par exemple, en notant $j = e^{2i\pi/3}$,

$$\operatorname{Log}(j^2) = -\tfrac{2i\pi}{3} \neq \tfrac{4\pi i}{3} = 2 \operatorname{Log} j$$

et
$$\mathrm{Log}(ij) = -\tfrac{5i\pi}{6} \neq \tfrac{\pi i}{2} + \tfrac{2\pi}{3} = \mathrm{Log}\, i + \mathrm{Log}\, j.$$
De même, si $e^z \in U$,
$$\ell(e^z) - z \in 2i\pi\mathbb{Z}$$
mais en général $\ell(e^z) \neq z$.

Définition 2.17 – *Primitive (au sens complexe)*

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction sur U. On appelle primitive de f sur U toute fonction $F \in \mathcal{H}(U)$ telle que $F' = f$.

Théorème 2.18 – *Détermination continue du logarithme*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$.

1. Toute détermination continue du logarithme sur U est une primitive de la fonction $z \mapsto 1/z$ sur U.
2. Si la fonction $z \mapsto 1/z$ admet une primitive sur U, alors il existe des déterminations continues du logarithme sur U.

Démonstration. *1. Soient ℓ une détermination continue du logarithme sur U et $z_0 \in U$. De $e^{\ell(z)} = z$ pour tout $z \in U$, on déduit*
$$\frac{\ell(z) - \ell(z_0)}{z - z_0} = \frac{\ell(z) - \ell(z_0)}{\exp(\ell(z)) - \exp(\ell(z_0))}.$$
Si $z \to z_0$, $\ell(z) \to \ell(z_0)$ pusique ℓ est continue. D'autre part, la fonction $\exp$ est dérivable en $\ell(z_0)$, et sa dérivée en ce point est $\exp(\ell(z_0))$. On en déduit que ℓ est dérivable en z_0 et que
$$\ell'(z_0) = \frac{1}{\exp(\ell(z_0))} = \frac{1}{z_0}.$$

2. Supposons sans perte de généralité que U est connexe. Soit F une primitive de $z \mapsto 1/z$ sur U. Il vient :
$$(z\exp[-F(z)])' = \exp(-F(z)) - zF'(z)\exp(-F(z)) = 0.$$
Il existe alors $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $\exp(F(z)) = cz$ pour tout $z \in U$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^\alpha = c$. Alors $\exp[F(z) - \alpha] = z$, donc $z \mapsto F(z) - \alpha$ est une détermination continue du logarithme sur U. □

(La preuve ci-dessus utilise le fait que si $h' = 0$ sur un ouvert connexe U alors h est constante sur U.)

Proposition 2.19

Pour tout $|z| < 1$,
$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Démonstration. *Soit $|z| < 1$. Alors $1 + z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ donc $\mathrm{Log}(1+z)$ est bien défini. Notons $S(z)$ la somme de la série précédente. Pour tout $|z| < 1$,*
$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} = (\mathrm{Log}(1+z))'.$$
Il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Log}(1+z) - S(z) = c$ pour tout $|z| < 1$. Prenant $z = 0$, on obtient $c = 0$. □

2.4 Intégrales curvilignes

Définition 2.20 – *Chemins, lacets etc.*

On appelle *chemin de classe* $\mathcal{C}^1$, ou arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, une application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On supposera toujours que $a < b$.

L'*origine de* γ est le point $\gamma(a)$. L'*extrémité de* γ est le point $\gamma(b)$. Le chemin est *fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit alors aussi que γ est un *lacet*. Enfin, pour $z \in \mathbb{C}$, on dit que γ *évite* z si z n'appartient pas à l'image $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t)\,;\ t \in [a, b]\}$ de γ.

Pour tout $w \in \mathbb{C}$ et tout nombre réel $r > 0$, l'application $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = w + re^{it}$ est un lacet et son image est le cercle de centre w et de rayon r. On note désormais ce chemin $\gamma_{w,r}$, et $S_{w,r} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - w| = r\}$ son image.

Exemple 2.21

Un chemin ne se réduit pas à son image. Ainsi, l'image du lacet $\gamma_{0,1}$ est le cercle unité $\mathbb{U}$, tandis que l'application $\gamma : [0, 3\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = e^{it}$ n'est pas un lacet, son origine est 1, son extrémité est -1, et $\gamma \neq \gamma_{0,1}$ même si l'image de γ est également $\mathbb{U}$.

Définition 2.22 – *Chemins équivalents*

Deux chemins $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\delta : [c, d] \to \mathbb{C}$ sont *équivalents* s'il existe une application $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ bijective, croissante, telle que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma = \delta \circ \varphi$. En particulier, $\gamma([a, b]) = \delta([c, d])$.

À propos de la définition ci-dessous, on rappelle qu'une fonction $g : G \to \mathbb{C}$ est continue (sur G) si

$$\forall z \in G, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall w \in G, \quad |z - w| < \delta \implies |g(z) - g(w)| < \varepsilon$$

Définition 2.23 – *Intégrale curviligne*

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ d'image Γ et $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ une fonction continue. L'intégrale de f sur γ est définie par

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Proposition 2.24

Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $\delta : [c, d] \to \mathbb{C}$ sont deux chemins équivalents d'image Γ et $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ une fonction continue, alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\delta f(z)\, dz$$

Démonstration. *La formule du changement de variable dans les intégrales donne*

$$\int_\delta f(z)\, dz = \int_c^d f(\delta(t))\delta'(t)\, dt = \int_a^b f(\delta \circ \varphi(s))\delta'(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds$$

donc

$$\int_\delta f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\, ds = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

□

Remarque 2.25

Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ d'image Γ avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, la longueur L_γ de γ est, par définition,

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Si $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors

$$\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| \leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\, dt \leqslant L_\gamma \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|.$$

Définition 2.26 – *Chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, un chemin $\gamma : [a, b] \to U$ d'image Γ est dit *de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* s'il existe une subdivision $(a_j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ de $[a, b]$ par des points $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_j < \cdots < a_k = b$ telle que les restrictions γ_j de γ à chaque intervalle $[a_{j-1}, a_j]$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$, sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j+1}(a_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

En d'autres termes, γ est constitué de k chemins de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans U, mis bout à bout. Si $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, on pose

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

Cette définition ne dépend pas de la décomposition de γ en des chemins γ_j de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f = F'$, où F est une fonction holomorphe sur U, alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est un lacet alors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Par exemple, pour tout nombre entier relatif $n \neq -1$, $f(z) = (z-w)^n$ avec $w \in \mathbb{C}$ vérifie $f = F'$ pour

$$F(z) = \frac{1}{n+1}(z-w)^{n+1}.$$

Par conséquent, pour tout lacet γ qui évite w,

$$\int_\gamma (z-w)^n\, dz = 0.$$

L'exemple développé dans la section suivante montre que le résultat est bien différent si $n = -1$.

2.4.1 Le cas fondamental

On rappelle que $\gamma_{0,1} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma_{0,1}(t) = e^{it}$. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| \neq 1$, donc $\gamma_{0,1}$ évite w. Nous allons calculer

$$J(w) = \int_{\gamma_{0,1}} \frac{dz}{z-w} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-w}\, dt.$$

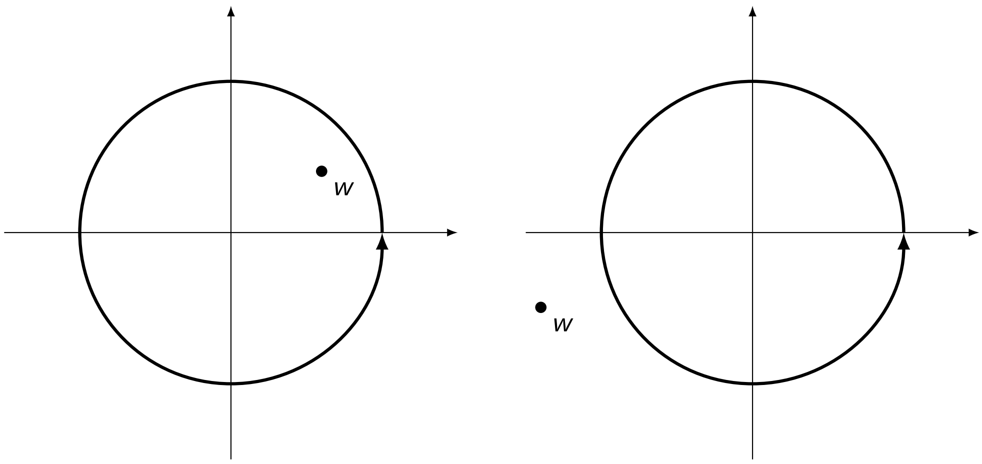


Figure 2.1 – Le chemin d'intégration dans le cas fondamental, pour $|w| < 1$ (à gauche) et pour $|w| > 1$ (à droite).

L'idée de la preuve quand $|w| < 1$ consiste à calculer $J(0)$ puis à montrer par déformation continue que $J(w)$ ne dépend pas de w tant que $|w| < 1$, ceci en parcourant le segment $[0, w]$ de $\mathbb{C}$, défini par $[0, w] = \{sw \mid s \in [0, 1]\}$.

Pour cela, on fixe w avec $|w| < 1$ et on pose, pour $s \in [0, 1]$ et $t \in |0, 2\pi]$,

$$f(s, t) = \frac{ie^{it}}{e^{it} - sw}$$

et

$$g(s) = \int_0^{2\pi} f(s, t)\, dt$$

donc $g(0) = 2i\pi$ et $g(1) = J(w)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, en particulier la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{iwe^{it}}{(e^{it} - sw)^2}$$

est continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. La théorie des intégrales dépendant d'un paramètre implique, puisqu'on intègre sur un segment, que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. De plus, $g(0) = 2i\pi$ et

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)$$

avec

$$h(s, t) = \frac{-w}{e^{it} - sw}$$

donc

$$g'(s) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial s}(s, t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)\, dt = h(s, 2\pi) - h(s, 0) = 0.$$

Ainsi, g est constante sur $[0, 1]$, ce qui montre que $J(w) = g(1) = g(0) = 2i\pi$ pour tout $|w| < 1$, c'est-à-dire,

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{dz}{z - w} = 2i\pi.$$

Exercice 2.27

Adapter l'idée de la preuve pour montrer que, pour tout $u \in \mathbb{C}$ et tout réel $r > |u - w|$,

$$\int_{\gamma_{u,r}} \frac{dz}{z - w} = 2i\pi$$

Puis que, si $|w - u| > r$, alors

$$\int_{\gamma_{u,r}} \frac{dz}{z - w} = 0$$

2.4.2 La fonction indice

Définition 2.28 – *Indice d'un lacet par rapport à un point*

Si γ est un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux qui évite z, on appelle *indice du chemin* γ *par rapport à* z le nombre

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Remarque 2.29

En d'autres termes, si γ est définie sur $[a, b]$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt.$$

Les calculs de la Section 2.4.1 doivent faire soupçonner que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ compte le nombre de tours de γ autour de z.

Pour développer cette intuition, considérons un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ continu, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et évitant 0, choisissons $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) = e^{z_0}$ et considérons, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\varphi(t) = z_0 + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds.$$

Alors $e^{\varphi(a)} = \gamma(a)$ et, par un calcul élémentaire,

$$\left(\gamma(t) e^{-\varphi(t)}\right)' = 0$$

pour tout $t \in [a, b]$, donc $\gamma(t) = e^{\varphi(t)}$ pour tout $t \in [a, b]$. On dit que φ est un relèvement de γ par l'exponentielle.

De plus, si γ est un lacet, tout ceci montre que $\varphi(b) - \varphi(a)$ est un multiple de $2i\pi$ puisque $e^{\varphi(b) - \varphi(a)} = \gamma(b)/\gamma(a) = 1$, et on obtient

$$\varphi(b) - \varphi(a) = 2i\pi\, \mathrm{Ind}_\gamma(0).$$

Proposition 2.30

Soit γ un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'image Γ. La fonction $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{Z}$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Démonstration. *Notons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ les points d'une subdivision de $[a, b]$ telle que γ soit* *de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ on considère la fonction φ définie sur $[a, b]$ par*

$$\varphi(s) = \exp\left[\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt\right].$$

Nous allons montrer que la fonction

$$\psi(s) = \frac{\varphi(s)}{\gamma(s) - z}$$

est constante sur l'intervalle $[a, b]$. Il suffit bien évidemment de montrer qu'elle est constante sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$. Puisque le chemin γ est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction ψ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et il suffit donc de prouver que $\psi'(s) = 0$ pour tout $s \in [a_i, a_{i+1}]$. Mais

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(s)(\gamma(s) - z) - \varphi(s)\gamma'(s)}{(\gamma(s) - z)^2}$$

avec

$$\varphi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\varphi(s).$$

Par conséquent, $\psi'(s) = 0$. Nous obtenons donc $\psi(a) = \psi(b)$ et, puisque $\gamma(a) = \gamma(b)$ (le chemin γ est fermé), $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$, donc $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ est entier par définition de φ.

La fonction

$$\operatorname{Ind}_\gamma : z \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt$$

est définie comme une intégrale sur le segment $[a, b]$ dépendant du paramètre z. La fonction

$$(t, z) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

est continue sur $[a, b] \times \mathbb{C} \setminus \Gamma$ donc $\operatorname{Ind}_\gamma$ est continue et à valeurs entières donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Soit R assez grand pour assurer que $\Gamma \subset D(0, R)$. Si $|z| > R + r$, alors $|\gamma(t) - z| > r$ pour tout $t \in [a, b]$ et

$$|\operatorname{Ind}_\gamma(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - z|}\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi r}(b - a) \sup_{t \in [a,b]} |\gamma'(t)|$$

donc $\lim_{|z| \to \infty} \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ et, puisque $\operatorname{Ind}_\gamma$ est à valeurs entières, $\operatorname{Ind}_\gamma = 0$ sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. □

2.5 Théorie de Cauchy locale

Le but de cette section est de prouver une première version de la formule de Cauchy, qui est un élément clé de la théorie des fonctions holomorphes. Nous en déduirons l'équivalence entre dérivabilité complexe (pour l'instant, $\mathcal{C}^1$-dérivabilité) et analyticité pour les fonctions d'une variable complexe.

Cette équivalence est spécifique au domaine complexe, en effet toute fonction analytique d'une variable réelle est bien sûr dérivable, mais il existe des fonctions dérivables d'une variable réelle, et même de classe C^∞, qui ne sont pas analytiques, comme par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp(-1/x^2)$ pour $x \neq 0$.

2.5.1 Formule de Cauchy pour les disques

Nous présentons ici un cas particulier de la formule générale de Cauchy, suffisant pour prouver les propriétés élémentaires des fonctions holomorphes qui seront développées dans le chapitre 3.

Théorème 2.31 – *Formule de Cauchy sur un disque*

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, u un point de U, et $r > 0$ tel que $\bar{D}(u, r) \subset U$. Pour toute fonction

$f \in \mathcal{H}_1(U)$ et tout point $z \in D(u, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{u,r}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Démonstration. *On reprend l'idée de déformation continue utilisée dans la Section 2.4.1. Tout d'abord, quitte à translater et dilater, c'est-à-dire à remplacer f par $z \mapsto f(u + rz)$, on peut se ramener au cas où $u = 0$ et $r = 1$. On doit donc montrer que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) i e^{it}}{e^{it} - z}\, dt = 2i\pi f(z) \quad \text{si} \quad |z| < 1.$$

Considérons, pour $s \in [0, 1]$,

$$g(s) = \int_0^{2\pi} k(s, t)\, dt$$

avec, pour $s \in [0, 1]$ et $t \in [0, 2\pi]$,

$$k(s, t) = \frac{f(z + s(e^{it} - z)) i e^{it}}{e^{it} - z}.$$

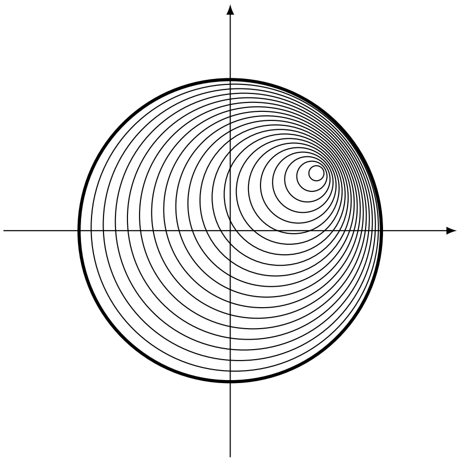


Figure 2.2 – *Les contours d'intégration qui apparaissent dans la preuve du Théorème 2.31.*

On a $|z + s(e^{it} - z)| = |z(1 - s) + se^{it}| < 1 - s + s = 1$, donc $f(z + s(e^{it} - z))$ est bien définie si $0 \leqslant s \leqslant 1$. De plus, si $|z| < 1$,

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \frac{f(z) i e^{it}}{e^{it} - z}\, dt = f(z) \int_{\gamma_{0,1}} \frac{dw}{w - z} = 2i\pi f(z)$$

d'après le calcul du cas fondamental en Section 2.4.1. Montrons à présent que g est constante sur $[0, 1]$. La fonction k est continue sur $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, ainsi que la fonction

$$\frac{\partial k}{\partial s}(s, t) = f'(z + s(e^{it} - z)) i e^{it}.$$

De plus,

$$\frac{\partial k}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)$$

avec

$$h(s, t) = \frac{1}{s} f(z + s(e^{it} - z)).$$

La théorie des intégrales dépendant d'un paramètre implique, puisqu'on intègre sur un segment, que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et que, pour tout $s \in]0, 1]$,

$$g'(s) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)\, dt = h(s, 2\pi) - h(s, 0) = 0$$

donc la fonction g est constante sur $[0, 1]$, en particulier $g(1) = g(0) = 2i\pi f(z)$, ce qui est le résultat désiré. □

Corollaire 2.32 – *Analyticité des fonctions $\mathcal{C}^1$-holomorphes*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $f \in \mathcal{H}_1(U)$. Alors, $f \in \mathcal{A}(U)$ et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point u est au moins égal à la distance de u au complémentaire de U. De plus, pour tout r tel que $\bar{D}(u, r) \subset U$ et tout entier naturel n,

$$f^{(n)}(u) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_{u,r}} \frac{f(w)}{(w-u)^{n+1}}\, dw.$$

Démonstration. *Soit $u \in U$, $d(u, \mathbb{C} \setminus U)$ la distance de u au complémentaire de U, et $D = D(u, d(u, \mathbb{C} \setminus U))$ le plus grand disque de centre u contenu dans U. Soit r tel que $0 < r < d(u, \mathbb{C} \setminus U)$ et $z \in D(u, r)$, alors la formule de Cauchy donne*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{u,r}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Si $z \in D(u, r)$ et si $w \in S_{u,r}$, $|z-u| < |w-u|$ et

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-u)-(z-u)} = \frac{1}{w-u}\frac{1}{1-\frac{z-u}{w-u}} = \frac{1}{w-u}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-u)^n}{(w-u)^n},$$

d'où

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-u)^n f(w)}{(w-u)^{n+1}}.$$

Cette série de fonctions de w est normalement convergente donc uniformément convergente sur $S_{u,r}$ puisque son terme général est majoré par

$$\frac{1}{r}\left(\frac{|z-u|}{r}\right)^n \sup_{w \in S_{u,r}} |f(w)|.$$

On peut donc intégrer terme à terme et on trouve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-u)^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{u,r}} \frac{f(w)}{(w-u)^{n+1}}\, dw.$$

La fonction f est donc analytique dans U et la série de Taylor en u de f coïncide avec f au moins sur le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U puisque, si z est dans ce disque, on peut intercaler un rayon r entre $|z-u|$ et $d(u, \mathbb{C} \setminus U)$. □

Remarque 2.33

Dans le cas des fonctions analytiques réelles, le disque de convergence de la série de Taylor en un point n'est pas nécessairement le plus grand disque contenu dans le domaine de définition de la fonction. Il suffit de considérer la fonction $f(x) = 1/(1+x^2)$ qui est analytique sur $\mathbb{R}$ et dont le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 vaut 1.

Corollaire 2.34

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{H}_1(U)$, alors $f' \in \mathcal{H}_1(U)$ et f est indéfiniment dérivable.

Démonstration. *D'après le corollaire 2.32, la fonction f est analytique et donc de classe C^∞ et sa dérivée est aussi analytique et par conséquent $\mathcal{C}^1$-holomorphe.* □

Proposition 2.35

Les fonctions $\mathcal{C}^1$-holomorphes étant analytiques elles vérifient le *principe du prolongement analytique* et le *principe des zéros isolés*.

Chapitre 3

Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

On décrit les propriétés des fonctions holomorphes (pour l'instant, $\mathcal{C}^1$-holomorphes) qui sont des conséquences directes de la formule de Cauchy pour les disques.

3.1 Inégalités de Cauchy

On contrôle toutes les dérivées d'une fonction $\mathcal{C}^1$-holomorphe en un point par ses valeurs au voisinage de ce point.

Théorème 3.1 – *Inégalités de Cauchy*

Si $f \in \mathcal{H}_1(D(0,R))$ alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $|z| < R$, avec, pour tout $r < R$ et tout $n \geqslant 0$,

$$|a_n| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Démonstration. *D'après le corollaire 2.32, $f \in \mathcal{A}(D(0,R))$ et, puisque $r < R$,*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{0,r}} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt.$$

En particulier,

$$|a_n| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt \leqslant \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

□

On appelle fonction entière toute fonction dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Corollaire 3.2 – *Théorème de Liouville*

Si $f \in \mathcal{H}_1(\mathbb{C})$ est bornée, alors f est constante.

Démonstration. *Puisque $f \in \mathcal{H}_1(\mathbb{C})$, il résulte du corollaire 2.32 que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Et f est bornée sur $\mathbb{C}$ donc il existe M fini tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les inégalités de Cauchy donnent alors $|a_n| \leqslant M/r^n$ pour tout $r > 0$ et tout $n \geqslant 0$, ce qui, en considérant la limite $r \to \infty$, implique que $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.* □

Corollaire 3.3 – *Théorème de d'Alembert*

Tout polynôme à coefficients complexes non constant possède au moins une racine.

Démonstration. *Soit P un polynôme non nul sans racine dans $\mathbb{C}$. La fonction $1/P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est donc entière. De plus, $1/P$ est bornée puisque c'est vrai si P est constant, et sinon, $1/P(z) \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Donc $1/P$ est constante par le théorème de Liouville, donc P est un polynôme constant.* □

3.2 Suites et séries de fonctions $\mathcal{C}^1$-holomorphes

Les inégalités de Cauchy simplifient l'étude des suites et séries de fonctions dans le cas des fonctions $\mathcal{C}^1$-holomorphes d'une variable complexe par rapport au cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ d'une ou plusieurs variables réelles.

Définition 3.4 – *Convergence compacte / convergence uniforme locale*

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément sur tout compact* de U vers la fonction f, ou *converge compactement vers* f, ou *converge localement uniformément vers* f, ce que l'on note $f_n \xrightarrow{c} f$, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact K de U, il existe un entier N dépendant de K et ε tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

On rappelle à présent deux résultats utiles.

Remarque 3.5

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues sur U, si $f_n \xrightarrow{c} f$ alors la fonction f est continue sur U. La preuve est simple puisqu'il s'agit en fait de montrer que si $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues en un point x et si $f_n \to f$ uniformément, alors f est continue en x.

Remarque 3.6

Soient $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe, $x_0 \in U$ et $f_n : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f_n(x_0) \to \ell$ et $df_n \xrightarrow{c} g$, avec $\ell \in \mathbb{R}^p$ et $g : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$, alors $f_n \xrightarrow{c} f$, pour une application f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x_0) = \ell$ et $df = g$ sur U.

L'idée de la preuve est de partir de la formule, valide pour x suffisamment proche de x_0 pour garantir que $[x_0, x] \subset U$,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f_n(x_0 + t(x - x_0))\, dt$$

et donc,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_0^1 df_n(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)\, dt.$$

Alors, par passage à la limite et d'après les convergences uniformes supposées, $f_n(x) \to f(x)$ avec

$$f(x) = \ell + \int_0^1 g(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)\, dt$$

ce qui suffit pour conclure.

Théorème 3.7 – *Théorème de Weierstraß*

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}_1(U)$. Si $f_n \xrightarrow{c} f$, alors $f \in \mathcal{H}_1(U)$ et chaque suite des dérivées vérifie $f_n^{(j)} \xrightarrow{c} f^{(j)}$.

Démonstration. *Montrons tout d'abord la seconde assertion du théorème. Soit K un compact de U et $r > 0$ tel que $D(z, 2r) \subset U$, en particulier $\bar{D}(z, r) \subset U$. Soit $L = \bigcup_{z\in K} \bar{D}(z, r) = \{z \in U |\ d(z, K) \leqslant r\}$, L est une partie compacte de U.*

Les inégalités de Cauchy appliquées à la fonction $f_p - f_n$ impliquent que, pour tout $z \in K$,

$$|f_p^{(j)}(z) - f_n^{(j)}(z)| \leqslant \frac{j!}{r^j} \sup_{\zeta\in L} |f_p(\zeta) - f_n(\zeta)|$$

Puisque la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur L, on en déduit que les suites $(f_n^{(j)})_{n\geq 0}$ sont uniformément de Cauchy sur K et par conséquent convergent uniformément sur K. Il suffit alors d'appliquer à la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ la remarque 3.6 au voisinage de chaque point de U, car $df_n = f_n'\, dz$. □

Théorème 3.8

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sum_n f_n$ une série de fonctions $\mathcal{C}^1$-holomorphes sur U, convergeant uniformément sur tout compact de U, de somme f.

1. Alors $f \in \mathcal{H}_1(U)$ et $\sum_n f_n' \xrightarrow{c} f'$.
2. Si la série $\sum_n f_n$ est normalement convergente sur tout compact de U, alors il en est de même de la série $\sum_n f_n'$.

Démonstration. *L'assertion 1 résulte du théorème 3.7 en considérant la suite des sommes partielles de la série $\sum_n f_n$.*

Par ailleurs, soit K un compact de U et L défini comme dans la preuve du théorème 3.7. Les inégalités de Cauchy donnent alors

$$|f_n'(z)| \leqslant \frac{1}{r} \sup_{\zeta\in L} |f_n(\zeta)|$$

pour tout $z \in K$, soit

$$\sup_{\zeta\in K} |f_n'(\zeta)| \leqslant \frac{1}{r} \sup_{\zeta\in L} |f_n(\zeta)|$$

ce qui prouve l'assertion 2. □

3.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

On fixe I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \times I \to \mathbb{C}$, et on note λ la mesure de Lebesgue sur I. On suppose que, pour tout $z \in U$, l'application $f(z, \cdot) : t \mapsto f(z, t)$ est λ-intégrable. Soit alors F la fonction définie sur U par

$$F(z) = \int_I f(z, t)\, d\lambda(t).$$

Théorème 3.9 – *Théorème de convergence dominée pour les fonctions holomorphes*

On suppose que pour tout $t \in I$, la fonction $f(\cdot, t) : z \mapsto f(z, t)$ est dans $\mathcal{H}_1(U)$ et que, pour tout compact K de U, il existe une fonction numérique g_K, λ-intégrable, telle que, pour tout $z \in K$ et tout $t \in I$,

$$|f(z, t)| \leqslant g_K(t).$$

Alors la fonction F définie par

$$F(z) = \int_I f(z,t)\, d\lambda(t)$$

est dans $\mathcal{H}_1(U)$ et on peut dériver sous le signe intégral, c'est-à-dire que, pour tout $n \geq 0$,

$$F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\, d\lambda(t).$$

Remarque 3.10

L'existence de la fonction majorante g_K est trivialement vérifiée si f est continue sur $U \times I$ et si I est compact car il suffit alors de prendre pour g_K une fonction constante, la fonction f étant bornée sur le compact $K \times I$.

Démonstration. *Montrons tout d'abord que chaque fonction*

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)$$

vérifie des majorations analogues à celles vérifiées par $f(z,t)$. Le compact K de U étant fixé, on considère le compact L de U défini par

$$L = \{z \in U \mid d(z,K) \leqslant r\}$$

où r est suffisamment petit pour assurer que $0 < 2r \leqslant d(K, \mathbb{C} \setminus U)$.

Les inégalités de Cauchy donnent

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t) \right| \leqslant n! r^{-n} \sup_{z \in L} |f(z,t)|,$$

soit encore, pour tout $z \in K$ et tout $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t) \right| \leqslant n! r^{-n} g_L(t). \tag{$*$}$$

Par ailleurs, pour tout $z \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) = \lim_{k \to \infty} k[f(z + 1/k, t) - f(z,t)]$$

donc la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ est λ-mesurable, comme limite simple d'une suite de fonctions λ-mesurables. Par récurrence sur n, on montre que la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)$ est également λ-mesurable, pour tout n. La majoration ($*$) prouve alors que $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)$ est λ-intégrable, on peut donc considérer la fonction définie sur U par

$$z \mapsto \int_I \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\, d\lambda(t).$$

Montrons maintenant que F est holomorphe sur U. Soit $z_0 \in U$ fixé et $r > 0$ assez petit pour que le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ soit contenu dans U. Posons $K = \overline{D}(z_0, r)$. Pour $h \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |h| \leqslant r$ on a

$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \int_I \frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)}{h}\, d\lambda(t).$$

Si h tend vers 0 en restant non nul,

$$\frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)}{h} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z,t).$$

D'autre part

$$f(z_0 + h, t) - f(z_0, t) = \int_{[z_0, z_0 + h]} \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, t)\, d\zeta,$$

d'où

$$\left|\frac{f(z_0+h,t)-f(z_0,t)}{h}\right| \leqslant \sup_{z\in K}\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leqslant \frac{1}{r}g_L(t),$$

et le membre de droite est une fonction λ-intégrable indépendante de h, d'après ($*$). On déduit alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h}$$

existe et que

$$F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,d\lambda(t).$$

Une récurrence élémentaire termine la démonstration du théorème. □

Exemple 3.11

On considère la fonction Γ d'Euler, définie, pour $\operatorname{Re} z > 0$, par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Soient $R > \varepsilon > 0$ deux nombres réels. La fonction $t^{z-1}e^{-t}$ possède une fonction majorante intégrable indépendante de z sur $\varepsilon \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant R$ car, pour tout $t > 0$

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t}$$

avec $\alpha = \varepsilon$ si $t \leq 1$ et $\alpha = R$ si $t > 1$. La fonction Γ est donc holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ et dans ce demi-plan on a

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\ln t\; e^{-t}\,dt.$$

3.4 Propriété de la moyenne et principe du maximum

Définition 3.12 – *Propriété de la moyenne*

Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$, on dit qu'une fonction $f \in C(U)$ possède la *propriété de la moyenne* sur U si pour tout disque $\bar{D}(a,r)$ fermé inclus dans U, la valeur de f en a est égale à la moyenne de f sur le cercle de centre a et de rayon r, c'est-à-dire que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.$$

Remarque 3.13

Si f possède la propriété de la moyenne sur un ouvert U, $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ également.

Proposition 3.14

Si $f \in \mathcal{H}_1(U)$, f possède la propriété de la moyenne sur U.

Démonstration. *La formule de Cauchy donne*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{a,r}}\frac{f(w)}{w-a}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.$$ □

Définition 3.15 – *Principe du maximum*

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in C(U)$. On dit que f admet un *maximum relatif* en a ou, par abus de langage, que a est un maximum relatif de f, s'il existe un voisinage V de a tel que $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ pour tout $z \in V$.

On dit que f vérifie le *principe du maximum* dans U si pour tout maximum relatif a de f, f est constante au voisinage de a.

Théorème 3.16

Une fonction f définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, qui possède la propriété de la moyenne, vérifie le principe du maximum.

Démonstration. *Soit a un maximum relatif de f et $r > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ pour tout $z \in D(a, r)$.*

Si $f(a) = 0$, le théorème est évident, en effet $f \equiv 0$ dans $D(a, r)$.

Si $f(a) \neq 0$, quitte à multiplier f par une constante convenable (par exemple, $\overline{f(a)}/|f(a)|$), on peut supposer que $f(a) = |f(a)| > 0$. Pour tout $0 < s < r$, la propriété de la moyenne s'écrit

$$|f(a)| = f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + se^{it})\, dt$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(a)| - f(a + se^{it})]\, dt = 0.$$

En particulier en prenant la partie réelle

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(a)| - \operatorname{Re} f(a + se^{it})]\, dt = 0. \tag{$\dagger$}$$

Mais puisque a est un maximum relatif de f, la fonction continue $|f(a)| - \operatorname{Re} f(a + se^{it})$ est positive ou nulle. La nullité de ($\dagger$) implique pour tout t et tout $s < r$ que

$$|f(a)| - \operatorname{Re} f(a + se^{it}) = 0.$$

Or $|f(a)| \geqslant |f(a + se^{it})|$ donc $\operatorname{Im} f(a + se^{it}) = 0$ et, pour tout t et tout $s < r$,

$$f(a) = \operatorname{Re} f(a + se^{it}) = f(a + se^{it})$$

□

Définition 3.17

Un domaine est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Corollaire 3.18

Si U est un domaine et $f \in \mathcal{H}_1(U)$ est non constante sur U, alors f n'admet pas de maximum relatif dans U.

Démonstration. *Raisonnons par l'absurde, supposons que f possède un maximum relatif en $a \in U$. Puisque f est holomorphe, f satisfait la propriété de la moyenne, et, d'après le théorème 3.16, f est donc constante au voisinage de a. L'analyticité de f et la connexité de U impliquent alors que f est constante, ce qui contredit l'hypothèse.* □

Corollaire 3.19

Si U est un domaine et $f \in \mathcal{H}_1(U)$ est non constante sur U et telle que $|f|$ admet un minimum local dans U, alors ce minimum est nécessairement nul. En particulier, f s'annule au moins une fois dans U.

Démonstration. *Soit $z_0 \in U$ un minimum local de $|f|$. Supposons que $|f(z_0)| \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est définie et holomorphe au voisinage de z_0 et possède un maximum local en z_0, donc f est constante d'après le principe du maximum (corollaire 3.18), ce qui contredit l'hypothèse.* □

Nous donnons maintenant une formulation plus globale du principe du maximum.

Proposition 3.20 – *Principe du maximum*

Soit U un domaine borné de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}_1(U)$ continue sur $\bar{U}$. Alors $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in U$, avec

$$M = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|.$$

De plus, s'il existe $z \in U$ tel que $|f(z)| = M$, alors f est constante sur U.

Démonstration. *Soit $L = \sup_{z \in \bar{U}} |f(z)|$. Comme f est continue sur le compact $\bar{U}$, la borne L est atteinte en au moins un point de $\bar{U}$. Si L est atteinte en un point $az \in U$, alors f est constante au voisinage de z et donc constante sur l'ouvert connexe U par unicité du prolongement analytique. Sinon, $L = M$ car la borne supérieure est alors atteinte sur ∂U et pour tout $z \in U$, $|f(z)| \leqslant M$.* □

Théorème 3.21 – *Lemme de Schwarz*

Soit $f \in \mathcal{H}_1(D(0,1))$ telle que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad |f(z)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad |z| < 1.$$

Alors,

$$|f'(0)| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad |f(z)| \leqslant |z| \quad \text{pour tout} \quad |z| < 1.$$

De plus, ces inégalités sont strictes sauf s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $|z| < 1$.

Démonstration. *La fonction f coïncide sur $D(0,1)$ avec sa série de Taylor en 0, c'est-à-dire que*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \ldots$$

Or par hypothèse $a_0 = 0$ car $f(0) = 0$ et par conséquent la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{si} \quad z \neq 0, \qquad g(0) = f'(0)$$

est holomorphe sur le disque $D(0,1)$.

Puisque $|f(z)| \leq 1$, on a $|g(z)| \leq 1/r$ si $|z| = r < 1$. Cette inégalité est encore valable pour $|z| \leqslant r$, d'après la variante du principe du maximum, par conséquent, en faisant tendre r vers 1, on obtient $|g(z)| \leqslant 1$, soit $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$.

De plus s'il existe $z_0 \in D(0,1)$ tel que $|g(z_0)| = 1$ alors, d'après la Proposition 3.20, la fonction g est constante et égale à λ, où $|\lambda| = 1$, et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D(0,1)$. □

Terminons cette section en prouvant le théorème de l'application ouverte pour les fonctions $\mathcal{C}^1$-holomorphes à l'aide du principe du maximum.

Théorème 3.22 – *Théorème de l'application ouverte*

Toute fonction $f \in \mathcal{H}_1(U)$ non constante sur un domaine U est une application ouverte, c'est-à-dire que, pour tout ouvert $V \subset U$, $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Démonstration. *Soient V un ouvert de U et $u \in V$, on doit prouver que $f(V)$ est un voisinage de $w = f(u)$.*

Comme f n'est pas constante, on peut trouver d'après le principe des zéros isolés un disque ouvert D centré en u tel que $\bar{D} \subset V$ et $f - w$ ne s'annule pas sur $D \setminus \{u\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|f - w| \geq 2\varepsilon$ sur ∂D (un tel ε existe par compacité de ∂D). On va montrer que

$$D(w, \varepsilon) \subset f(\bar{D}) \subset f(V).$$

Fixons $v \in D(w, \varepsilon)$ et considérons la fonction $f_v : \bar{D} \to \mathbb{C}$ définie par $f_v(z) = f(z) - v$. La fonction f_v est continue donc la fonction $|f_v|$ atteint sa borne inférieure sur le compact $\bar{D}$. Par ailleurs,

$$|f_v(z)| \geqslant ||f(z) - w| - |w - v|| > \varepsilon \quad \text{si} \quad z \in \partial D$$

et

$$|f_v(u)| = |w - v| < \varepsilon.$$

On en déduit que la borne inférieure de f_v est atteinte en point de D. Comme f_v n'est pas constante dans D, puisque f ne l'est pas, la fonction f_v s'annule au moins une fois dans D d'après le corollaire 3.19, ce qui signifie que $v \in f(D)$.

Au total, $D(w, \varepsilon) \subset f(D) \subset f(V)$ pour $w = f(u)$ donc on a terminé. □

Chapitre 4

Théorie de Cauchy pour les domaines étoilés

Dans tout le chapitre, U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$.

4.1 Existence de primitives

L'objet de cette section est de donner des conditions sur U qui permettent d'assurer l'existence de primitives pour f dans $C(U)$.

Définition 4.1 – *Primitive*

Soit $f \in C(U)$. On appelle *primitive* de f toute fonction F définie sur U telle que $F' = f$.

Théorème 4.2 – *Primitives* $\Longleftrightarrow$ *lacets*

Soit $f \in C(U)$. Alors, f admet une primitive dans U si et seulement si, pour tout lacet γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Démonstration. *La nécessité de la condition a été prouvée dans le premier exemple de la Section 2.4.*

Supposons la condition satisfaite, nous devons construire une primitive F de f sur chaque composante connexe de U. Sans perte de généralité on peut supposer que U est connexe. Pour tout couple de points (z_0, z) de U, il existe donc un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ contenu dans U joignant z_0 à z. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un tel chemin, on définit le chemin $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ par $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$ et on a

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

Montrons que la valeur de $\int_\gamma f(z)\,dz$ ne dépend pas du choix du chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ contenu dans U joignant z_0 à z. Soient γ_1 et γ_2 sont deux chemins de classe $\mathcal{C}^1$ contenus dans U joignant z_0 à z. Notons δ le chemin obtenu en juxtaposant le chemin γ_1 et le chemin $-\gamma_2$, donc δ est un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U. Par hypothèse,

$$\int_\delta f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

soit

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Fixons $z_0 \in U$, on peut alors définir pour $z \in U$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw$$

comme étant

$$\int_{\gamma} f(w)\, dw$$

pour un chemin γ quelconque contenu dans U joignant z_0 à z.

Il reste à prouver que F est une primitive de f sur U. Pour $u \in \mathbb{C}$ assez proche de z pour que le segment $[z, u]$ d'extrémités z et u soit contenu dans U,

$$F(u) - F(z) = \int_{z_0}^{u} f(w)\, dw - \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw = \int_{[z,u]} f(w)\, dw$$

donc

$$F(u) - F(z) = (u - z)f(z) + \int_{[z,u]} (f(w) - f(z))\, dw.$$

La dernière intégrale est majorée en module par $|z - u|\epsilon(u)$ avec

$$\epsilon(u) = \sup_{w \in [z,u]} |f(w) - f(z)|$$

La fonction f étant continue, $\epsilon(u) \to 0$ quand $u \to z$, par conséquent

$$\limsup_{u \to z} \left| \frac{F(u) - F(z)}{u - z} - f(z) \right| \leqslant \limsup_{u \to z} |\epsilon(u)| = 0$$

c'est-à-dire $F'(z) = f(z)$. □

Remarque 4.3

On a vu dans la Section 2.4 que

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

donc la fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Définition 4.4 – *Ouvert étoilé*

Un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dit *étoilé* s'il existe un point $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$ le segment $[z_0, z]$ joignant z_0 à z est contenu dans U, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$ le point $z_0 + t(z - z_0)$ appartient à U.

Exemple 4.5

Un ouvert convexe U est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Si Δ est un triangle fermé de $\mathbb{C}$, on désigne par $\partial\Delta$ le chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux constitué du bord du triangle Δ parcouru une fois dans le sens direct.

Théorème 4.6 – *Étoilé + triangles $\Longrightarrow$ primitives*

Soit U un ouvert étoilé et $f \in C(U)$ telle que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

pour tout triangle Δ contenu dans U, alors f admet une primitive dans U.

Démonstration. *Soit z_0 un point de U par rapport auquel U est étoilé, alors pour tout $z \in U$, $[z_0, z] \subset U$ donc on peut poser*

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,dw$$

Puisque U est un ouvert de $\mathbb{C}$, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset U$ et par conséquent si $|u - z| < r$, $[z, u] \subset U$. L'ouvert U étant étoilé par rapport à z_0, le triangle Δ de sommets z_0, z et u est contenu dans U. Puisque $\int_{\partial\Delta} f(w)\,dw = 0$, il résulte de la définition de F que

$$F(u) - F(z) = \int_{[z,u]} f(w)\,dw$$

et on conclut comme dans la preuve du théorème 4.2. □

En résumé : Soit f une fonction continue dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \int_\gamma f(z)\,dz = 0 \text{ pour tout lacet } \gamma \text{ de } U & & \\
 & \Downarrow & & \Updownarrow & \\
\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \text{ pour tout triangle } \Delta \subset U & & \underset{\text{(si } U \text{ étoilé)}}{\Longrightarrow} & & f \text{ admet une primitive dans } U
\end{array}$$

4.2 Théorie de Cauchy pour un ouvert étoilé

Nous développons ici la théorie de Cauchy pour les domaines étoilés par rapport à au moins un de leurs points, donc en particulier pour les domaines convexes.

Théorème 4.7 – *Lemme de Goursat*

Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ et $\Delta \subset U$ un triangle, alors

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

On demande donc que U contienne tout le triangle Δ, pas simplement son bord $\partial\Delta$. Ce résultat, pressenti par Cauchy en 1814, admet une preuve basée sur une méthode de divisions successives de triangles inventée par Goursat, que nous présentons.

Démonstration. *Il s'agit de montrer que*

$$J = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$$

vaut $J = 0$. Soient a, b, c les sommets du triangle Δ et a', b', c' les milieux des segments $[b, c]$, $[a, c]$ et $[a, b]$. On considère les quatre nouveaux triangles Δ^1, Δ^2, Δ^3 et Δ^4 associés aux triplets (a, c', b'), (b, a', c'), (c, b', a') et (a', b', c'), alors

$$J = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f(z)\,dz$$

[Dessin des triangles Δ et Δ^j.]

La valeur absolue d'une au moins des intégrales $\int_{\partial\Delta^j} f(z)\,dz$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{4}|J|$. Soit Δ_1 le triangle correspondant à une telle intégrale. En appliquant à Δ_1 le raisonnement appliqué au triangle Δ, on construit un triangle Δ_2 tel que

$$\left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|$$

On construit ainsi une suite de triangles emboîtés fermés

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \dots$$

tels que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \geqslant \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \Delta_{n-1}} f(z)\, dz \right|$$

En particulier,

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \geqslant \frac{1}{4^n} |J| \tag{$\circ$}$$

De plus, par construction, la longueur $\ell(\partial \Delta_n)$ *de* $\partial \Delta_n$ *vaut* $\ell(\partial \Delta_n) = \frac{1}{2^n} \ell(\partial \Delta)$.

La famille $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ *est une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers* 0*, donc il existe un point* z_0 *de* Δ *tel que* $\bigcap_{n \geq 0} \Delta_n = \{z_0\}$*. En effet* $\bigcap_{n \geq 0} \Delta_n \neq \varnothing$*, sinon il existerait une sous-famille finie d'intersection vide, ce qui contredirait la décroissance de la famille, et* $\bigcap_{n \geq 0} \Delta_n$ *est réduite à un point car le diamètre des* Δ_n *tend vers* 0.

Comme $z_0 \in \Delta \subset U$, f *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en* z_0 *par hypothèse. Par conséquent,* $\varepsilon > 0$ *étant donné, il existe* $r > 0$ *tel que pour* $|z - z_0| < r$,

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|$$

Prenons n *assez grand pour que* $\Delta_n \subset D(z_0, r)$*. La fonction* $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)$ *admet des primitives dans* $\mathbb{C}$ *donc son intégrale sur tout lacet est nulle donc*

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta_n} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0))\, dz \right|$$

ce qui implique que

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \leqslant \varepsilon \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0|\, \ell(\partial \Delta_n) \leqslant \varepsilon \ell(\partial \Delta_n)^2 = \frac{\varepsilon}{4^n} \ell(\partial \Delta)^2$$

En utilisant ($\circ$)*, il vient* $|J| \leqslant \varepsilon \ell(\partial \Delta)^2$*. Comme* ε *est arbitraire,* $J = 0$. □

Proposition 4.8 – *Lemme de Goursat étendu*

Le lemme de Goursat reste vrai si on suppose seulement que $f \in C(U)$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur U privé d'un point z_0.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $z_0 \in \Delta$*, sinon, le lemme de Goursat standard suffit.*

Premier cas : z_0 *est un sommet de* Δ*, par exemple* $z_0 = a$*. D'après le lemme de Goursat standard (théorème 4.7), si* $u \in [a, b]$ *et* $v \in [a, c]$,

$$\int_{(abc)} f(z)\, dz = \int_{(auv)} f(z)\, dz$$

car les intégrales sur les autres triangles sont nulles puisque z_0 *n'appartient pas à ces triangles. Dans la limite* $u \to a$ *et* $v \to a$*, l'intégrale* $\int_{(auv)} f(z)\, dz \to 0$ *à cause de la continuité de* f.

Deuxième cas : z_0 *est sur un côté de* Δ*. On se ramène au cas précédent en décomposant* Δ *en deux triangles en joignant* z_0 *au sommet opposé.*

Troisième cas : z_0 *est à l'intérieur de* Δ*. On décompose* Δ *en trois triangles en joignant* z_0 *à chacun des sommets de* Δ. □

L'extension du lemme de Goursat, utile ultérieurement, n'est en fait qu'apparente car on verra que si $f \in C(U)$ est $\mathbb{C}$-dérivable dans U privé d'un point alors $f \in \mathcal{H}(U)$.

Corollaire 4.9 – *Étoilé + holomorphe $\Longrightarrow$ primitives*

Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors f admet une primitive dans U et pour tout lacet γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U, $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Démonstration. *Conséquence directe du lemme de Goursat (théorème 4.7, holomorphe $\to$ triangles) et des théorèmes 4.6 (triangles + étoilé $\to$ primitives) et 4.2 (primitives $\longleftrightarrow$ lacets).* □

Théorème 4.10 – *Formule de Cauchy pour les ouverts étoilés*

Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ et γ un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux contenu dans U, d'image Γ. Alors, pour tout $z \in U \setminus \Gamma$,

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = 2i\pi f(z)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z)$$

Démonstration. *Soit $z \in U$, la fonction g définie dans U par*

$$g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \quad \text{si } w \neq z \qquad g(z) = f'(z)$$

est continue dans U et $\mathbb{C}$-dérivable dans $U \setminus \{z\}$. Puisque U est étoilé, il résulte du lemme de Goursat étendu (Proposition 4.8) et du Théorème 4.6 que g admet une primitive dans U et par conséquent que son intégrale sur tout lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux contenu dans U est nulle. Donc, si $z \notin \Gamma$,

$$\int_\gamma g(w)\, dw = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw = 0$$

d'où

$$f(z) \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

et le résultat s'en déduit par définition de l'indice d'un chemin par rapport à un point. □

Corollaire 4.11

Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{H}(U) = \mathcal{H}_1(U) = \mathcal{A}(U)$.

Démonstration. *On montre $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{A}(U)$. Pour tout $z \in U$ il suffit d'appliquer la formule de Cauchy en prenant comme chemin γ le cercle de centre z et de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\bar{D}(z,r) \subset U$ (alors tout se passe dans un ouvert étoilé $D(z,s)$ avec $s > r$) et de répéter la démonstration du corollaire 2.32.* □

Tous les résultats obtenus jusqu'ici sous l'hypothèse $f \in \mathcal{H}_1(U)$ sont donc vrais sous l'hypothèse $f \in \mathcal{H}(U)$. Noter que ce renforcement apparent de la condition d'holomorphie permet d'obtenir très rapidement les principales propriétés des fonctions holomorphes en évitant la théorie des primitives.

Le dernier résultat de ce chapitre peut être vu comme une réciproque du lemme de Goursat.

Théorème 4.12 – *Théorème de Morera*

Soit $f \in C(U)$ telle que $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ pour tout triangle Δ contenu dans U. Alors $f \in \mathcal{H}(U)$.

Démonstration. *Soient z_0 un point de U et F une primitive de f sur un voisinage V de z_0. La fonction F est $\mathbb{C}$-dérivable sur V et $F' = f$, mais d'après le corollaire 4.11, F est indéfiniment dérivable et en particulier f est $\mathbb{C}$-dérivable sur V. Ceci étant valable pour tout $z_0 \in U$, f est $\mathbb{C}$-dérivable sur U.* □

En résumé : Soit f une fonction continue dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \text{ pour} \\ \text{tout lacet } \gamma \text{ de } U\end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{c}f \text{ admet une} \\ \text{primitive dans } U\end{array} \\
U \text{ étoilé} \Uparrow \qquad \Downarrow & & \Downarrow \\
f \text{ est holomorphe dans } U & \Leftrightarrow & \begin{array}{c}f \text{ admet localement} \\ \text{une primitive dans } U\end{array}
\end{array}
$$

Chapitre 5

Fonctions méromorphes

Dans tout le chapitre, $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert. Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $D^*(z, r)$ le *disque épointé* de centre z et de rayon r, c'est-à-dire

$$D^*(z, r) = D(z, r) \setminus \{z\} = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w - z| < r\}.$$

5.1 Classification des singularités isolées

Dans toute cette section, $u \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{u\})$.

Définition 5.1 – *Singularité apparente / point régulier*

Si la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur U (le prolongement est alors unique par le principe du prolongement analytique), on dit que u est une singularité apparente de f (ou un point régulier de f).

Proposition 5.2

S'il existe $r > 0$ tel que f est bornée sur $U \cap D^*(u, r)$, alors u est un point régulier de f.

Démonstration. *On considère la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = (z - u)f(z)$ si $z \in U \setminus \{u\}$ et $g(u) = 0$. Puisque f est holomorphe sur $U \setminus \{u\}$ et bornée au voisinage de u, la fonction g est holomorphe sur $U \setminus \{u\}$ et continue sur U donc, d'après le lemme de Goursat étendu (Proposition 4.8), $g \in \mathcal{H}(U)$. Si r est assez petit pour que $D(u, r) \subset U$, g est développable en série entière sur $D(u, r)$, c'est-à-dire que, pour tout $|z - u| < r$,*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - u)^n$$

Or, $a_0 = 0$ puisque $g(u) = 0$, par suite la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z - u)^n$ prolonge f au voisinage de u. □

Théorème 5.3 – *Classification des singularités isolées*

La fonction f vérifie une et une seule des propriétés suivantes :

1. La fonction f admet une singularité apparente en u ;
2. Il existe un entier $m \geqslant 1$, un réel $r > 0$ tel que $D(u, r) \subset U$ et une fonction g holomorphe sur le disque $D(u, r)$ vérifiant $g(u) \neq 0$ et

   $$f(z) = \frac{g(z)}{(z - u)^m}$$

   pour tout $z \in D^*(u, r)$. On dit alors que f admet un *pôle d'ordre* m en u ;

3. Pour tout $r > 0$ tel que $D(u, r) \subset U$, l'ensemble $f(D^*(u, r))$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que f admet une *singularité essentielle* en u.

Démonstration. *Supposons que la propriété 3 n'est pas satisfaite par f. Il existe alors $v \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $D(u, r) \subset U$ et $f(D^*(u, r)) \cap D(v, \varepsilon) = \varnothing$, c'est-à-dire $|f(z) - v| \geqslant \varepsilon$ pour tout $z \in D^*(u, r)$.*

La fonction $h : z \mapsto 1/(f(z) - v)$ est alors holomorphe dans $D^*(u, r)$ et majorée en module par $1/\varepsilon$. D'après la Proposition 5.2, h se prolonge en une fonction, de nouveau notée h, holomorphe sur $D(u, r)$. Donc, sur $D^*(u, r)$,

$$h = \frac{1}{f - v} \qquad f = v + \frac{1}{h}$$

Si $h(u) \neq 0$, f admet une singularité apparente en u et la propriété 1 est vérifiée.

Si $h(u) = 0$, notons m la multiplicité du zéro u de h. Il existe alors une fonction k holomorphe sur $D(u, r)$ vérifiant $k(u) \neq 0$ et telle que, pour tout $z \in D(u, r)$,

$$h(z) = (z - u)^m k(z)$$

On peut supposer r assez petit pour que $k(z) \neq 0$ si $z \in D(u, r)$. Alors $\ell = 1/k$ est une fonction holomorphe dans $D(u, r)$ et $\ell(u) \neq 0$. Pour $z \in D^*(u, r)$

$$f(z) = v + \frac{\ell(z)}{(z - u)^m} = \frac{\ell(z) + v(z - u)^m}{(z - u)^m}$$

donc la propriété 2 est vraie, avec $g(z) = \ell(z) + v(z - u)^m$. □

5.2 Fonctions méromorphes

Définition 5.4 – *Fonction méromorphe*

Une fonction f est *méromorphe* sur U s'il existe une partie localement finie A de U telle que $f \in \mathcal{H}(U \setminus A)$ et tout point de A est un pôle de f. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans U.

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et g et h deux fonctions holomorphes sur U non identiquement nulles. Considérons la fonction

$$f = \frac{g}{h}$$

D'après le principe des zéros isolés, l'ensemble A des zéros de h est une partie localement finie de U. La fonction f est holomorphe sur $U \setminus A$. Soient $a \in A$ et m la multiplicité du zéro a de h. Au voisinage de a on a

$$h(z) = (z - a)^m h_1(z),$$

où h_1 est une fonction holomorphe sur U telle que $h_1(a) \neq 0$.

Si $g(a) \neq 0$, alors a est un pôle de f. Si $g(a) = 0$, on peut écrire $g(z) = (z - a)^p g_1(z)$ avec $p \geq 1$ et g_1 holomorphe sur U telle que $g_1(a) \neq 0$ puisque g n'est pas identiquement nulle. Ainsi $f(z) = (z - a)^{p-m} f_1(z)$, où f_1 est une fonction holomorphe au voisinage de a. Si $p \geqslant m$, f admet une singularité apparente en a et si $p < m$, a est un pôle d'ordre $m - p$ de f. Dans tous les cas f est une fonction méromorphe sur U.

Remarque 5.5 – *Résultat admis*

Toute fonction $f \in \mathcal{M}(U)$ s'écrit $f = g/h$ avec g et h dans $\mathcal{H}(U)$ et h non identiquement nulle sur U. La preuve classique utilise le théorème de factorisation de Weierstraß, basé sur des fonctions entières particulières, appelées produits de Weierstraß. De plus, chaque pôle de f est un zéro de h, avec la même multiplicité.

Proposition 5.6

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, la réunion de deux parties localement finies de U est encore une partie localement finie. On en déduit que la somme et le produit de deux fonctions méromorphes dans U sont encore des fonctions méromorphes dans U et que $\mathcal{M}(U)$ admet une structure naturelle de $\mathbb{C}$-algèbre unitaire.

Proposition 5.7

Si U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est un corps.

Démonstration. *Soit $f \in \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$, notons A l'ensemble de ses pôles. L'ensemble Z des zéros de f est une partie localement finie de U car U est connexe (sinon f pourrait être identiquement nulle sur une composante connexe de U). Par suite $A \cup Z$ est une partie localement finie de U et $g = 1/f$ est holomorphe sur $U \setminus (A \cup Z)$. Il est immédiat que tout zéro d'ordre m de f est un pôle d'ordre m de g et que tout pôle de f est une singularité apparente de g, donc $g \in \mathcal{M}(U)$.* □

Proposition 5.8

Soit $f \in \mathcal{M}(U)$.

1. La fonction f' est méromorphe sur U, avec les mêmes pôles que f. Tout pôle d'ordre m de f est un pôle d'ordre $m+1$ de f'.
2. Si U connexe et f non identiquement nulle sur U, alors f'/f est méromorphe sur U et ses pôles sont simples.

Démonstration. *Résulte immédiatement de la définition des pôles.* □

5.3 Théorème des résidus

Définition 5.9 – *Partie principale, résidu*

Soient $f \in \mathcal{M}(U)$ et $u \in U$ un pôle d'ordre m de f. Alors $f = g + p$ avec g holomorphe au voisinage de u et

$$p(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-u)^k}$$

Cette décomposition est unique, la fonction p est la *partie principale* de f en u et a_{-1} est le *résidu* de f en u, noté

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f, u).$$

Lemme 5.10

Si γ est un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U d'image Γ et si $u \in U \setminus \Gamma$,

$$\int_\gamma p(z)\,dz = 2i\pi \operatorname{Ind}_\gamma(u) \operatorname{Res}(f, u)$$

Démonstration. *On sait que*

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-u)^k} = 0$$

si $k \neq 1$, car dans ce cas $z \mapsto 1/(z-u)^k$ possède une primitive dans U, donc

$$\int_\gamma p(z)\,dz = a_{-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-u} = 2i\pi \operatorname{Ind}_\gamma(u) \operatorname{Res}(f,u).$$

□

Théorème 5.11 – *Théorème des résidus*

Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{M}(U)$. Supposons que l'ensemble $A \subset U$ des pôles de f est fini. Alors, pour tout lacet γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de U qui évite A,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}(f,a)$$

Démonstration. *Soit p_a la partie principale de f en $a \in A$. La fonction $f - \sum_{a\in A} p_a$ admet une singularité apparente en chaque $a \in A$ et se prolonge donc en une fonction holomorphe sur U. Le théorème de Cauchy pour un ouvert étoilé donne alors*

$$\int_\gamma \left(f(z) - \sum_{a\in A} p_a(z) \right) dz = 0$$

et en utilisant le lemme 5.10 on obtient

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in A} \int_\gamma p_a(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}(f,a)$$

□

Théorème 5.12 – *Théorème de l'indice*

Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(U)$ et $f \in \mathcal{M}(U)$. On suppose que f admet un nombre fini de zéros dans U, comptés avec leur ordre de multiplicité et notés z_k pour $1 \leqslant k \leqslant m$, et un nombre fini de pôles dans U, comptés avec leur ordre de multiplicité et notés a_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Soit γ un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U, évitant les zéros et les pôles de f. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} g(z_k) \operatorname{Ind}_\gamma(z_k) - \sum_{k=1}^{n} g(a_k) \operatorname{Ind}_\gamma(a_k)$$

En particulier,

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Ind}_\gamma(z_k) - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_\gamma(a_k)$$

Pour assimiler le théorème de l'indice, on recommande de calculer les intégrales concernées quand $f(z) = c(z-u)^n$ pour u fixé dans U, pour n positif, puis pour n négatif.

Démonstration. *Idée : résidus pour la fonction $\ell = gf'/f$.*

Si $u \in U$ est un zéro d'ordre k de f, il existe une fonction h holomorphe au voisinage de u telle que $f(z) = (z-u)^k h(z)$ et $h(u) \neq 0$. On en déduit que

$$\ell(z) = g(z)\frac{k}{z-u} + g(z)\frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Puisque $h(u) \neq 0$, ℓ est holomorphe au voisinage de u donc, si $g(u) = 0$, ℓ admet une singularité apparente en u et, si $g(u) \neq 0$, ℓ admet un pôle simple en u et la partie principale de ℓ en u vaut $kg(u)/(z-u)$, par conséquent $\operatorname{Res}(\ell, u) = kg(u)$.

De même, si $u \in U$ est un pôle d'ordre k de f, il existe une fonction h holomorphe au voisinage de u telle que $f(z) = h(z)/(z-u)^k$ et $h(u) \neq 0$ et

$$\ell(z) = -g(z)\frac{k}{z-u} + g(z)\frac{h'(z)}{h(z)}$$

Le même raisonnement que dans le cas précédent montre que $\mathrm{Res}(\ell, u) = -kg(u)$.

Le théorème des résidus appliqué à la fonction ℓ donne alors le résultat puisque les zéros et les pôles de f ont été comptés avec leur ordre de multiplicité. □

Remarque 5.13

On peut se passer de l'hypothèse de finitude sur l'ensemble des zéros et des pôles de f dans le théorème de l'indice, car on peut s'y ramener facilement.

Démonstration. Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, f une fonction méromorphe sur U, et γ un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image $\Gamma \subset U$ évitant les zéros et les pôles de f. On veut montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ étoilé, contenant Γ, tel que f admet un nombre fini de pôles et de zéros dans V.

On suppose sans perte de généralité que U est étoilé par rapport à 0. Par compacité de Γ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $T = \Gamma + \bar{D}(0, \epsilon)$ est inclus dans U. Soit $K = \bigcup_{z \in T} [0, z]$. Alors :

1. *$K \subset U$ car $T \subset U$ et U est étoilé par rapport à 0,*
2. *K est compact comme image du compact $\Gamma \times \bar{D}(0, \epsilon)$ par une application continue,*
3. *K est étoilé par rapport à 0 comme réunion de segments d'extrémité 0.*

Comme K est compact et $\mathbb{C} \setminus U$ fermé, la distance de K à $\mathbb{C} \setminus U$ est positive, notons cette distance 2δ et considérons $V = K + D(0, \delta)$. Alors :

1. *$V \subset U$ par construction,*
2. *V est ouvert comme réunion des ouverts $D(z, \delta)$ pour $z \in K$,*
3. *$V \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\ d(z; \mathbb{C} \setminus U) > \delta\}$ par construction.*

En particulier, V ne contient qu'un nombre fini de pôles et de zéros de f donc si V est étoilé par rapport à 0, on a terminé.

Or, si $z \in V$, $z = w + u$ avec $w \in K$ et $|u| < \delta$ donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $tz = tw + tu$. Comme $w \in K$ avec K étoilé par rapport à 0, $tw \in K$. Comme $|tu| < \delta$, $tz \in K + D(0, \delta) = V$, ce qui conclut la preuve. □

Remarque 5.14 – *Calcul de l'indice et traversées de Γ*

Si on traverse Γ en un point simple, avec γ orienté de gauche à droite, on ajoute $+1$ à l'indice.

Pour le montrer, considérer z_0 juste avant Γ et z_1 juste après, et δ un lacet simple orienté dans le sens direct, entourant z_1 et empruntant une portion de γ à rebrousse-poil. Alors z_0 et z_1 sont dans la même composante connexe du complémentaire de $\gamma + \delta$ donc $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) + \mathrm{Ind}_\delta(z_0) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) + \mathrm{Ind}_\delta(z_1)$. Comme z_0 est à l'extérieur du disque entouré par δ et z_1 à l'intérieur, et comme δ est orienté dans le sens négatif, $\mathrm{Ind}_\delta(z_0) = 0$ et $\mathrm{Ind}_\delta(z_1) = -1$, donc on a terminé.

Le théorème de l'indice permet d'obtenir de nouveaux résultats sur les suites de fonctions holomorphes.

Théorème 5.15 – *Théorème de Hurwitz*

Soient U un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f.

1. Si les fonctions f_n ne s'annulent pas sur U alors soit f est identiquement nulle sur U, soit f ne s'annule pas sur U.
2. Si les fonctions f_n sont injectives sur U alors soit f est constante sur U, soit f est injective sur U.

Démonstration. On sait d'après la Section 3.2 que f est holomorphe sur U.

Montrons 1. Supposons que f n'est pas identiquement nulle et que $u \in U$ est un zéro de f. D'après le principe des zéros isolés il existe $r > 0$ tel que $\bar{D}(u,r) \subset U$ et $f(z) \neq 0$, si $0 < |z-u| \leqslant r$. Soit γ le cercle de centre a et de rayon r parcouru dans le sens direct et Γ son image. D'après le théorème de l'indice, il existe un entier $k \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = k$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz = 0$$

pour tout $n \geq 0$ car les f_n ne s'annulent pas dans U.

Comme f ne s'annule pas sur Γ, il existe $c > 0$ tel que $|f| \geqslant c$ sur Γ, donc

$$\frac{1}{|f|} \leqslant \frac{1}{c}$$

sur Γ. De plus, d'après le théorème de Weierstraß, la suite $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de U, en particulier sur Γ, donc la suite $(f_n'/f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f'/f sur Γ.

Par conséquent

$$2i\pi k = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz = 0$$

ce qui est impossible puisque $k \geq 1$ donc $k \neq 0$.

Prouvons 2 maintenant. Supposons que f n'est pas constante et qu'il existe des points $u \neq v$ de U tels que $f(u) = f(v)$. Soient D_u et D_v des disques ouverts de centres respectifs u et v, contenus dans U et disjoints. Puisque $f - f(u)$ admet un zéro dans D_u et n'est pas identiquement nulle sur D_u, car f n'est pas constante, il résulte du point 1 qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ telle que $f_{\varphi(n)} - f(u)$ admet un zéro dans D_u pour tout $n \geq 0$.

De même une nouvelle extraction donne l'existence d'une suite extraite $(f_{\psi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que $f_{\psi(n)} - f(v)$ admet un zéro dans D_v pour tout $n \geq 0$.

Comme D_u et D_v sont disjoints et $f(u) = f(v)$, les fonctions $f_{\psi(n)}$ ne sont pas injectives, ce qui contredit l'hypothèse. □

Théorème 5.16 – *Théorème de Rouché*

Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, f et g des fonctions holomorphes sur U et γ un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans U d'image Γ. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La fonction f admet un nombre fini de zéros dans U, comptés avec leur ordre de multiplicité et notés z_k pour $1 \leqslant k \leqslant m$, et la fonction g admet un nombre fini de zéros dans U, comptés avec leur ordre de multiplicité et notés w_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
2. Pour tout $z \in \Gamma$,
$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

Alors,

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ind}_\gamma(z_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(w_k)$$

Prouvons tout d'abord le lemme de Rouché.

Lemme 5.17 – *Lemme de Rouché*

Soient γ et δ deux lacets de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux tels que

$$|\gamma - \delta| < |\gamma|$$

Alors
$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(0) = \mathrm{Ind}_{\delta}(0)$$

Démonstration. *Idée : on regarde $\varphi = \delta/\gamma$.*

Remarquons que la condition $|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout t implique que $\gamma(t) \neq 0$ et $\delta(t) \neq 0$ pour tout t donc les indices $\mathrm{Ind}_{\gamma}(0)$ et $\mathrm{Ind}_{\delta}(0)$ sont bien définis.

Considérons la fonction $\varphi = \delta/\gamma$, alors par hypothèse, $|1 - \varphi(t)| < 1$ pour tout t donc l'image de φ est incluse dans $D(1, 1)$. Par conséquent, $\mathrm{Ind}_{\varphi}(0) = 0$ puisque 0 appartient à la composante connexe non bornée du complémentaire de l'image de φ. Par ailleurs,

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\delta'}{\delta} - \frac{\gamma'}{\gamma}$$

donc

$$0 = 2i\pi\, \mathrm{Ind}_{\varphi}(0) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}\, dt - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = 2i\pi\, \mathrm{Ind}_{\delta}(0) - 2i\pi\, \mathrm{Ind}_{\gamma}(0)$$

ce qui prouve le lemme. □

Démonstration du théorème de Rouché. *L'hypothèse implique que si $z \in \Gamma$, $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$ et que, pour tout t,*
$$|f \circ \gamma(t) - g \circ \gamma(t)| < |f \circ \gamma(t)|$$
En appliquant le lemme de Rouché (Lemme 5.17), on obtient

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$$

Mais d'après le théorème de l'indice,

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ind}_{\gamma}(z_k) \qquad \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Ind}_{\gamma}(w_k)$$

d'où le résultat. □

On en déduit facilement le corollaire suivant (Rouché sur un disque) :

Corollaire 5.18

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $u \in U$ et $r > 0$ tels que $\bar{D}(u, r) \subset U$. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U vérifiant
$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$
pour tout z tel que $|z - u| = r$, alors f et g ont le même nombre de zéros comptés avec leur ordre de multiplicité dans le disque $D(u, r)$.

Comme application de ce corollaire nous pouvons donner une nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert, particulièrement courte.

Démonstration du théorème de d'Alembert. *Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ un polynôme de degré $m \geq 1$. On considère $f(z) = a_m z^m$. Puisque $f - P$ est un polynôme de degré au plus $m - 1$, il existe $R > 0$ tel que $|f(z) - P(z)| < |f(z)|$ pour tout $|z| \geqslant R$. En particulier, P ne s'annule pas sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant R\}$. De plus, d'après le corollaire 5.18, f et P possèdent le même nombre de zéros dans le disque $D(0, R)$, soit m. Au total, le polynôme P possède donc exactement m racines dans $\mathbb{C}$.* □

5.4 Un calcul d'intégrale à l'aide du théorème des résidus

Pour tout $z \neq \pm i$ et pour tout $t > 0$, on note

$$f_t(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2}$$

et on veut calculer

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\,dx.$$

pour ce faire, on peut utiliser le théorème des résidus appliqué à une famille de contours bien choisis. Commençons par un lemme qui nous sera utile :

Lemme 5.19 – *Lemme de Jordan*

On note T le secteur angulaire d'équation $s \leqslant \operatorname{Arg} \leqslant t$, pour $s < t$ fixés dans $[0, 2\pi]$, et $C(r)$ l'arc de cercle de rayon r centré en 0 d'angle initial s et d'angle final t. On suppose qu'il existe (L, R, M) tels que :

- pour presque tout $\theta \in [s,t]$, $\lim_{r\to\infty} re^{i\theta} f(re^{i\theta}) = L$,
- pour tout $z \in T$ tel que $|z| > R$, $|zf(z)| < M$.

Alors,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C(r)} f(z)dz = i(t-s)L$$

La preuve est une application du théorème de convergence dominée. On pourra considérer la fonction g définie par $g(z) = f(z) - L/z$.

Exercice 5.20

Écrire un lemme équivalent pour $r \to 0$.

Chaque fonction f_t est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ et méromorphe sur $\mathbb{C}$. Soit γ_R le demi cercle, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel, de rayon $R > 1$, de sorte que γ_R entoure le point i.

D'après le théorème des résidus,

$$\int_{[-R,R]} f_t(z)dz + \int_{\gamma_R} f_t(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f_t, i).$$

Soit $|z| = R$, $z = Re^{i\theta}$. Alors

$$|zf_t(z)| = R\frac{e^{-Rt\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} \leqslant \frac{R}{R^2-1} \to 0 \qquad (R \to \infty)$$

Il s'ensuit que les hypothèses du lemme de Jordan sont vérifiées avec $L = 0$. Donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f_t(z)dz = 0$$

Par ailleurs,

$$\operatorname{Res}(f_t, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-t}}{2i}$$

Comme la fonction $x \mapsto f_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} f_t(z)dz = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}dx = I(t)$$

donc

$$I(t) = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{[-R,R]} f_t(z)dz + \int_{\gamma_R} f_t(z)dz\right) = 2\pi i\frac{e^{-t}}{2i} = \pi e^{-t}.$$

Exercice 5.21

Calculer $I(t)$ pour $t < 0$.

5.5 Étude locale des applications holomorphes

Dans cette partie nous allons préciser, grâce au théorème de l'indice, des propriétés locales des fonctions holomorphes que nous avons déjà démontrées, comme le théorème de l'application ouverte et le théorème d'inversion locale.

5.5.1 Inversion locale

Théorème 5.22 – *Théorème d'inversion locale, version multivaluée ("théorème des racines")*

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage U d'un point z_0 de $\mathbb{C}$, non constante, $w_0 = f(z_0)$, et k l'ordre de la première dérivée non nulle de f en z_0.

Alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de z_0 tel que $W = f(V)$ est un voisinage ouvert de w_0 et tel que pour tout $w \in W \setminus \{w_0\}$, il existe exactement k points distincts $v_1, \dots, v_k$ dans V tels que $f(v_1) = \dots = f(v_k) = w$.

Dans l'énoncé, k pourrait également être définie comme la multiplicité de z_0 en tant que racine de l'équation $f(z) - f(z_0) = 0$.

Le cas $k = 1$ du théorème d'inversion locale correspond au Théorème 2.9, qui avait été démontré en utilisant le théorème d'inversion locale pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. *Par le principe du prolongement analytique, les dérivées de f en z_0 ne peuvent pas être toutes nulles car f n'est pas constante, il existe donc k tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ et $f^{(j)}(z_0) = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant k-1$. On va supposer que $k \geq 2$ puisque le cas $k = 1$ est connu.*

Comme les zéros de f' et de $f - w_0$ sont isolés, il existe $r > 0$ tel que le disque fermé $\bar{D}(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans le domaine de définition de f et tel que $f'(z) \neq 0$ et $f(z) \neq w_0$ pour tout $z \in \bar{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Soit γ le cercle de centre z_0 et de rayon r orienté dans le sens direct, d'image Γ. D'après le théorème de l'indice dans le cas d'un zéro d'ordre k et d'aucun pôle,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(w_0) = k$$

Soit W la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus f(\Gamma)$ qui contient w_0, alors W est un voisinage ouvert de w_0 dans $\mathbb{C}$. Soit $V = f^{-1}(W) \cap D(z_0, r)$, alors $V \subseteq D(z_0, r)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ car f est continue. De plus, $z_0 \in V$ car $w_0 \in W$.

La fonction indice $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}$ est constante sur W, donc $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(w) = k$ pour tout $w \in W$. D'après le théorème de l'indice, l'équation $f(z) = w$ admet donc k solutions dans $D(z_0, r)$, pour chaque $w \in W$. Ces solutions sont distinctes si $w \neq w_0$ puisque $f'(z) \neq 0$ pour tout z dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Finalement, $f(V) = W$ et le théorème est démontré. □

Corollaire 5.23 – *Théorème de l'application ouverte*

Toute fonction holomorphe non constante définie sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est une application ouverte.

Le corollaire 5.23 a déjà été énoncé comme le théorème 3.22.

Remarque 5.24

L'hypothèse de connexité dans le théorème de l'application ouverte est nécessaire. En effet si l'ouvert U n'est pas connexe alors $U = U_1 \cup U_2$, où U_1 et U_2 sont deux ouverts de $\mathbb{C}$ d'intersection vide, et la fonction f définie par $f \equiv 0$ sur U_1 et $f \equiv 1$ sur U_2 est holomorphe non constante sur U mais elle ne définit pas une application ouverte.

Remarque 5.25

Dans le paragraphe 3.4 (Propriété de la moyenne et principe du maximum) nous avons déduit le théorème de l'application ouverte du principe du maximum. Remarquons ici que le principe du maximum est une conséquence du théorème de l'application ouverte.

En effet supposons que f est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ et que $|f|$ possède un maximum relatif en $z_0 \in U$. Considérons un voisinage connexe V de z_0 dans U tel que pour tout $z \in V$ on ait $|f(z)| < |f(z_0)|$. Supposons que f ne soit pas constante sur V, alors, d'après le théorème de l'application ouverte, $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenu dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $|f(z_0)|$, il est donc nécessairement contenu dans le disque ouvert ce qui est absurde puisque $f(z_0) \in f(V)$. Par conséquent f est constante sur V et U étant connexe f est constante sur U par le principe du prolongement analytique.

Corollaire 5.26

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ injective sur U, alors f' ne s'annule pas sur U.

Démonstration. *Si $f'(z_0) = 0$ avec $z_0 \in U$, la fonction f n'est pas injective au voisinage de z_0 d'après le Théorème 5.22 pour une certaine multiplicité $k \geq 2$.* □

Remarque 5.27 – *L*

réciproque du corollaire 5.26 est fausse puisque la fonction exponentielle $f : z \mapsto e^z$ est telle que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ mais n'est pas injective puisque périodique de période $2i\pi$.

De même, le corollaire 5.26 est faux pour les fonctions d'une variable réelle : la fonction $f : x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(0) = 0$.

On peut donner une démonstration directe (sans passer par le calcul différentiel) du théorème d'inversion locale pour les fonctions holomorphes. Rappelons ce résultat :

Théorème 5.28 – *Théorème d'inversion locale, version holomorphe*

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $f'(z_0) \neq 0$, il existe des voisinages ouverts V de z_0 et W de $w_0 = f(z_0)$ tels que f soit une bijection de V dans W et l'application réciproque f^{-1} de W dans V est holomorphe.

Démonstration. *L'existence de V, W et de f^{-1} résulte du théorème 5.22 et f' ne s'annule pas sur V. La fonction $g = f^{-1}$ est continue car f est ouverte. Montrons que $g \in \mathcal{H}(W)$. Soit $w_1 \in W$ fixé. En reprenant un calcul de la preuve « calcul différentiel » du théorème 2.9, pour tout $w \in W$,*

$$\frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} = \frac{g(w) - g(w_1)}{f(g(w)) - f(g(w_1))}.$$

La continuité de g en w_1 implique que si $w \to w_1$ alors $g(w) \to g(w_1)$ donc le rapport dans le membre de droite est l'inverse d'une dérivée. Ainsi, g est $\mathbb{C}$-dérivable en w_1 et

$$g'(w_1) = \frac{1}{f'(g(w_1))}$$

□

5.5.2 Formule explicite

Toujours grâce au théorème de l'indice, sous les hypothèses du théorème 5.22, dans le cas $k = 1$, on peut expliciter l'application g inverse locale de f à l'aide d'une formule intégrale.

Considérons V et W les voisinages de z_0 et de $w_0 = f(z_0)$ du théorème 5.22 et le cercle γ centré en z_0 introduit au cours de la preuve, et supposons que $k = 1$, c'est-à-dire $f'(z_0) \neq 0$.

D'après le théorème de l'indice, la solution $z = g(w)$ de l'équation $f(z) = w$, qui existe et est unique pour $w \in W$ d'après le théorème 5.22, vaut

$$g(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

Plus généralement, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}(V)$,

$$h(g(w)) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{h(z)f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

Cette formule intégrale pour $g(w)$ démontre également directement que $g \in \mathcal{H}(W)$.

Annexe **A**

Feuilles de TD

Feuille 1 Séries entières et fonctions analytiques

Exercice 1.1 – *Calcul de rayons de convergence*

Déterminer les rayons de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dans les cas suivants :

$$a_n = (\ln n)^2, \quad a_n = n!, \quad a_n = \frac{n^2}{4^n + 3n}, \quad a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

$$a_{2n} = a^{2n}, a_{2n+1} = b^{2n+1}, 0 < a, b < 1$$

Exercice 1.2 – *Produit termes à termes*

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence ρ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon de convergence ρ'.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\rho\rho'$.

Exercice 1.3 – *Théorème d'Abel*

On considère une série entière
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
de rayon de convergence 1. On suppose que f converge au point 1.

1. Montrer que la restriction de f au segment $[0,1]$ est continue au point 1. *Indication :* en notant $A = f(1)$ et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles associée à la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$, on montrera que pour tout $x \in [0,1[$,
$$f(1) - f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(A - A_n)x^n.$$

2. Soient $r \in]0,1[$, C l'union des segments $[1,z]$ pour z dans $D_f(0,r)$ et D le disque unité ouvert. Vérifier que C est l'enveloppe convexe de $D_f(0,r) \cup \{1\}$. Montrer que $f(z)$ tend vers $f(1)$ quand z tend vers 1 en restant dans $C \cap D$. *Indication :* adapter la démonstration précédente en notant que pour tout $z \in C \cap D$,
$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \frac{1+r}{1-r}.$$

Exercice 1.4 – *Produit de Cauchy de deux séries numériques*

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}, \; U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \; V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \; W_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le but de l'exercice est de montrer que si les séries de terme général (u_n) et (v_n) convergent absolument, alors la série de terme général (w_n) converge et que les sommes vérifient $UV = W$.

1. Montrer le résultat lorsque les séries sont à valeurs réelles positives. *Indication :* montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$.

2. Montrer le résultat dans le cas général. *Indication :* en notant $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et $w'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}|$, et U'_n, V'_n, W'_n les sommes partielles d'ordre n associées aux suites $(u'_n)_{n\geqslant 0}$, $(v'_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w'_n)_{n\geqslant 0}$, montrer que $|U_n V_n - W_n| \leqslant U'_n V'_n - W'_n$.

3. En prenant $u_n = v_n = \mathbf{1}_{[n\neq 0]}(-1)^n n^{-1/2}$, montrer que la conclusion peut être fausse si l'on suppose seulement les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergentes.

4. En utilisant le théorème d'Abel, montrer que si les trois séries $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ et $\sum_n w_n$ convergent alors leurs sommes vérifient $UV = W$.

Exercice 1.5 – *Fonction exponentielle complexe*

On appelle exponentielle complexe la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Premières propriétés

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_n z^n/n!$ converge absolument.

2. Que vaut $\exp(0)$? Que peut-on dire de $\exp(\overline{z})$?

3. Pour a et b dans $\mathbb{C}$, montrer que $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$. En déduire une autre expression pour $\exp(-z)$.

4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}\ z)$.

Continuité et holomorphie

5. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < 1$,

$$|\exp(h) - 1| \leqslant \exp|h| - 1 \leqslant \frac{|h|}{1-|h|},$$

$$|\exp(h) - 1 - h| \leqslant \exp|h| - 1 - |h| \leqslant \frac{|h|^2}{2(1-|h|)}.$$

6. En déduire la continuité de $\exp$ au point 0 et le fait que $(\exp(h) - \exp(0))/h$ tend vers 1 quand h tend vers 0.

7. En déduire la continuité de $\exp$ en tout point z et le fait que $(\exp(z+h) - \exp(z))/h$ tend vers $\exp(z)$ quand h tend vers 0. On dit que $\exp$ est holomorphe au point z, de dérivée $\exp(z)$.

8. Qu'en déduit-on pour la restriction de $\exp$ à $\mathbb{R}$? En déduire que le noyau de $\exp$ est inclus dans $i\mathbb{R}$.

Propriétés de surjectivité et détermination principale du logarithme

9. Soit I un intervalle contenant 0 et $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^*)$ telle que $\gamma(0) = 1$. Pour $t \in I$, on note λ l'application de I dans $\mathbb{C}$

$$\lambda(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds.$$

Montrer que pour tout $t \in I$, $e^{\lambda(t)} = \gamma(t)$. On dit que λ est un relèvement de γ par l'exponentielle. *Indication :* on pourra montrer en dérivant que le quotient $e^{\lambda(t)}/\gamma(t)$ ne dépend pas de $t \in [0,1]$.

10. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $z = \exp(L(z))$ où

$$L(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)} dt.$$

La fonction L s'appelle détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que L est continue.

11. En déduire $\exp$ induit une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ et de $i\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

12. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| < 1$,

$$L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

Le morphisme $\Phi : \theta \mapsto \exp(i\theta)$

13. Montrer que le noyau de Φ est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. On posera $a = 2\pi$. Que vaut $e^{i\pi}$?

14. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) > 0$, et en déduire la valeur de $e^{i\pi/2}$.

15. Soit γ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t) = \left(\frac{1+it}{|1+it|}\right)^2 = \frac{1-t^2+2it}{1+t^2}.$$

Déterminer le rélèvement λ fourni par la question 9.

16. En déduire que

$$\pi = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Exercice 1.6 – *Fonctions trigonométriques et hyperboliques*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

et

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

1. Donner une autre expression de $\cosh(iz)$ et $\sinh(iz)$.

2. Montrer que les fonctions $\cosh$, $\sinh$, $\cos$ et $\sin$ sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$, et donner leur développement.

3. Quelle est leur dérivée en un point z ?

4. Calculer $\cos^2 z + \sin^2 z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

5. Donner des formules pour $\cos(z+z')$ et $\sin(z+z')$.

6. Pour θ réel, montrer que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont les parties réelle et imaginaire de $e^{i\theta}$. Est-ce le cas pour z quelconque dans $\mathbb{C}$?

7. Pour θ réel, simplifier l'expression $\cos(\theta - \pi/2)$.

8. Montrer que la formule trouvée est encore valable pour $\cos(z - \pi/2)$ avec $z \in \mathbb{C}$.

9. Résoudre les équations $\sin z = 0$ et $\cos z = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1.7 – *Un exemple de fonction analytique*

On fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z^m$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ et donner son développement en série entière au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}^*$ (on commencera par le point $z_0 = 1$). Quel est le rayon de convergence ?

Exercice 1.8 – *Un peu de dénombrement*

On considère la fonction rationnelle sur $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}.$$

Montrer que f est développable en série entière au voisingage de 0. En calculant de deux façons différentes le développement en série entière de la fonction f, établir une formule pour le nombre de couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2p + 3q = n$, pour tout entier n fixé.

Exercice 1.9 – *Formule du binôme généralisée*

On fixe $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

2. Montrer que pour tout $z \in D(0, R)$, $(1+z)S'(z) = \alpha S(z)$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \exp(\alpha \ln(1+x)) = (1+x)^\alpha$.
4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Z}$, l'égalité $S(x) = (1+x)^\alpha$ est vraie pour tout z dans $D(0, R)$.

Attention : si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir sans ambiguïté $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ pour tout α dans $\mathbb{C}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on peut définir z^α pour tout z dans $\mathbb{C}$. Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, on peut définir z^α pour tout z dans $\mathbb{C}^*$. Dans les autres cas, il faut préciser quelle convention (arbitraire) on choisit et se méfier des formules qui ne sont plus vraies.

Exercice 1.10 – *Valeurs prescrites*

1. Déterminer, s'il en existe, les fonctions analytiques sur le disque unité telles que pour tout entier $n \geqslant 2$, $f(1/n) = 1/(n-1)$.
2. Même question avec $f(1/n) = 1/\ln(n)$.
3. Même question avec $f(1/n) = 1/(n-(-1)^n)$.

Exercice 1.11 – *Fonction arctangente*

1. Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{-i, i\}$. Soit f l'application de Ω dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = (1+z^2)^{-1}$. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, qu'on explicitera et dont on donnera le rayon de convergence.

Indication : pour tout $z \in \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right).$$

Déterminer le rayon de convergence dans le cas où z_0 est réel est plus délicat : dans ce cas, on posera $z_0 + i = re^{i\theta}$, avec $0 < \theta < \pi$, on montrera que pour tout complexe h tel que $|h| < r$,

$$f(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((n+1)\theta\right)\frac{(-h)^n}{r^{n+1}}.$$

On utilisera le fait que pour tout la suite $\sin(n\theta)$ ne tend pas vers 0.

2. Montrer que la fonction arctan est développable en série entière au voisinage de tout réel et donner son développement.

Exercice 1.12 – *Fonctions C^∞ mais non-analytiques*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais non développable en série entière au voisinage de 0, bien que la série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. *Indication :* on montrera par récurrence sur n que f est n fois dérivable, avec une dérivée n-ième d'une certaine forme.

2. On se donne deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y, loi exponentielle de paramètre 1 (cette loi admet pour densité $x \mapsto \mathbf{1}_{[x>0]}e^{-x}$). On note φ la fonction caractéristique de la variable aléatoire XY : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = E[e^{itXY}]$.

(a) Calculer les moments de la variable aléatoire XY. En déduire que φ est de classe C^∞, ainsi que la valeur des dérivées successives de φ en 0. Montrer que la série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}$$

diverge pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

(b) écrire $\varphi(t)$ comme une intégrale double et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - itx}\, dx.$$

Exercice 1.13 – *Fonctions absolument monotones*

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction absolument monotone sur I est une fonction de classe C^∞ sur I, positive sur I ainsi que toutes ses dérivées sucessives.

1. Exemples et résultats de stabilité

(a) Donner des exemples de fonctions absolument monotones (polynomiales, rationnelles, irrationnelles).

(b) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions absolument monotones sur I sont absolument monotones sur I.

(c) Montrer que la dérivée et l'exponentielle d'une fonction absolument monotone sont absolument monotones.

2. Soit f une fonction absolument monotone sur I. On cherche à démontrer que f est analytique sur I. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral : si a et b sont deux points de I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt.$$

(a) Soient $a \leqslant b$ sont deux points de I et, pour tout n, $x_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et est majorée par $f(b)$.

(b) Soient $a \leqslant b$ sont deux points de I. Montrer que

$$\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En déduire une expression de $f(b)$ comme somme d'une série. *Indication :* appliquer le résultat de la question précédente aux points $t \leqslant b$ et à f'.

(c) Soient maintenant $a \in I$ et $h > 0$ tel que $a+h$ et $a-h$ soient dans I. Montrer que

$$f(a-h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(-h)^k.$$

Indication : majorer le reste dans la formule de Taylor avec reste intégral.

(d) Conclure.

Feuille 2 Fonctions holomorphes et intégrales curvilignes

Exercice 2.1 – *Définition d'une fonction holomorphe*

1. Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ?

$$z \mapsto \overline{z}, \quad z \mapsto z\overline{z}, \quad z \mapsto \overline{z}^3, \quad z = x + iy \mapsto x + 2ixy$$

2. Montrer que la fonction $f(x+iy) = \sqrt{|x||y|}$ satisfait les équations de Cauchy-Riemann en 0. Est-elle holomorphe en 0 ?

3. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ de la forme $f(x+iy) = u(x) + iv(y)$.

Exercice 2.2 – *Équations de Cauchy-Riemann en polaire*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable. Soit $z_0 \in U$, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Montrer l'équivalence entre les conditions :

(i) f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial \theta}(z_0) = ir_0 \frac{\partial f}{\partial r}(z_0)$

(iii) $\frac{\partial P}{\partial r}(z_0) = \frac{1}{r_0}\frac{\partial Q}{\partial \theta}(z_0)$ et $\frac{\partial P}{\partial \theta}(z_0) = -r_0 \frac{\partial Q}{\partial r}(z_0)$ où $f = P + iQ$.

Exercice 2.3 – *Lignes orthogonales*

Soit $f = P + iQ$ holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Montrer que les lignes $P = cte$ et $Q = cte$ sont othogonales. Quelles sont ces courbes dans le cas où $f(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$?

Exercice 2.4 – *Calcul d'intégrales curvilignes*

Calculer $\int_\gamma z^n dz$ pour $n \in \mathbb{Z}$ dans le cas où γ est un lacet parcourant un cercle orienté positivement ne contenant pas 0.

Exercice 2.5 – *Conjugaison par la conjugaison*

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On note $V = \{\overline{z} \;\; z \in U\}$. Montrer que la fonction $g : z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur V.

Exercice 2.6 – *Réciproque d'une bijection holomorphe*

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$, holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, injective, telle que f' ne s'annule pas. En particulier, f induit une bijection de U vers $f(U)$. Soit g la bijection réciproque. Montrer que $f(U)$ est ouvert et que g est holomorphe. Quelle est sa dérivée ?

Remarque : la suite du cours montrera que l'hypothèse que f' ne s'annule pas peut être retirée, car elle se déduit de l'holomorphie et de l'injectivité de f.

Exercice 2.7 – *Détermination continue du logarithme sur un ouvert*

Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2.8 – *Détermination principale de la racine carrée*

On considère la fonction de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{C}$ donnée par

$$f(z) = \sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}.$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $f(z)^2 = z$ et $\operatorname{Re} f(z) > 0$.
3. En déduire que f est holomorphe.
4. Soit L la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $f(z) = \exp(L(z)/2)$.

Exercice 2.9 – *Utilisation des égalités de Cauchy-Riemann*

1. Montrer que l'application de $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \arctan(y/x)$$

est holomorphe. Que vaut $\exp(f(z))$?

2. Soit Ω un ouvert non vide et connexe de $\mathbb{C}^*$. Trouver les fonctions holomorphes f sur Ω telles que, pour tout $z \in U$, $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}(z)/|z|^2$.

Exercice 2.10 – *Fonctions holomorphes à valeurs dans une courbe $\mathcal{C}^1$*

Soit h une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{C}$. Soit F une application différentiable de V dans $\mathbb{R}$. On suppose que $F \circ h$ est constante et que dF ne s'annule pas. Montrer que h est constante.

Quelles sont les fonctions holomorphes dont l'image est incluse dans une droite du plan ? dans un cercle du plan ?

Exercice 2.11 – *Calcul d'intégrale*

Calculer si $|a| < r < |b|$,

$$\int_{\gamma_{0,r}} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

Exercice 2.12 – *Un calcul d'indice*

Soit γ l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcourue dans le sens positif. Calculer $\operatorname{Ind}_\gamma(0)$.

Exercice 2.13 – *Relèvement d'un chemin continu dans $\mathbb{C}^*$ par l'exponentielle*

Soit $\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^*)$. On souhaite montrer l'existence d'un relèvement de γ par l'exponentielle, c'est-à-dire d'une fonction $\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ telle que $\exp \circ \lambda = \gamma$.

1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'on peut trouver un intervalle I contenant t_0, ouvert dans $\mathbb{R}_+$, tel que $\gamma_{|I}$ possède un relèvement par l'exponentielle. *Indication :* $\gamma(t)/\gamma(t_0) \in D(1,1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ assez proche de t_0.

2. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}_+$ non disjoints, et λ_1, λ_2 des relèvements de $\gamma_{|I}, \gamma_{|J}$. Montrer que $\lambda_1 - \lambda_2$ est constant sur $I \cap J$ et à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit $E = \{t > 0 : \gamma_{|[0,t[}$ possède un relèvement$\}$. Montrer que $\sup E = +\infty$ et conclure.

4. Lorsque γ est continu et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, montrer qu'on obtient un relèvement en fixant $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(z_0) = \gamma(t_0)$, et en posant

$$\lambda(t) = z_0 + \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds.$$

Exercice 2.14 – *Indice d'un lacet par rapport à un point*

Soit γ un lacet continu de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un chemin continu de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$. On note Γ l'image de γ. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

1. Montrer que la quantité $(\lambda(b) - \lambda(a))/(2i\pi)$ ne dépend pas du relèvement λ de $\gamma - z$ par l'exponentielle. On l'appelle indice de γ par rapport à z, noté $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$.

2. Donner, en la justifiant, une interprétation géométrique de $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$.

3. Lorsque γ est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

4. Soit λ un relèvement de $\gamma - z$ par l'exponentielle. On note $\sigma = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $\theta = \mathrm{Im}(\lambda)$. On suppose dans que θ est strictement croissante sur $[a, b]$. Montrer que si γ est d'indice $n \geqslant 2$, alors γ possède au moins un point double, c'est-à-dire qu'il existe (c, d) dans $[a, b]^2 \setminus \{(a, b)\}$ tel que $c < d$ et $\gamma(c) = \gamma(d)$.

Indication : θ réalise une bijection de $[a, b]$ sur un segment $[\alpha, \beta]$. Que $\beta - \alpha$? Montrer qu'il existe $\tau \in [\alpha, \beta - 2\pi]$ tel que $\sigma(\theta^{-1}(\tau + 2\pi)) - \sigma(\theta^{-1}(\tau))$ s'annule.

Exercice 2.15 – *Indice d'un lacet par rapport à* 0 *et homotopie dans* $\mathbb{C}^*$

1. Soient γ un lacet continu de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$. Si $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, que vaut $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$?

2. Soient γ_1, γ_2 deux lacets continus de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$. Que vaut $\mathrm{Ind}_{\gamma_1/\gamma_2}(0)$? Montrer que si $|\gamma_2 - \gamma_1| < |\gamma_1|$ alors $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$.

3. Soit $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$ une famille de lacets continus de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$, dépendant continûment du paramètre s (pour la norme de la convergence uniforme sur $[a, b]$). à l'aide de la question précédente, montrer que $\mathrm{Ind}_{\gamma_s}(0)$ ne dépend pas de s.

4. Soit γ un lacet continu de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$, d'indice 0 par rapport à 0. Soit λ un relèvement de γ par l'exponentielle. Montrer que pour tout $s \in [0, 1]$, $\gamma_s = \exp(s\lambda)$ est un lacet continu de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$. Que valent γ_0 et γ_1 ?

5. Soient α, β deux lacets continus de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$, ayant même indice par rapport à 0. Montrer qu'on peut construire une famille $(\varphi_s)_{s\in[0,1]}$ de lacets continus de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$, dépendant continûment du paramètre s, telle que $\varphi_0 = \alpha$ et $\varphi_1 = \beta$. *Indication* : Poser $\gamma = \beta/\alpha$.

Cet exercice montre que deux lacets dans $\mathbb{C}^*$ sont homotopes si et seulement s'ils ont même indice par rapport à 0.

Exercice 2.16 – *Calcul pratique de l'indice*

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet continu et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On note $\Gamma = \gamma([a, b])$ et on fixe $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Soit Δ une demi-droite issue de z, ne contenant pas $\gamma(a) = \gamma(b)$. On suppose que l'ensemble $E = \{t \in [a, b] : \gamma(t) \in \Delta\}$ est fini, inclus dans $]a, b[$, et que γ admet une dérivée non nulle en chacun de ces points (ce qui assure l'existence d'une tangente).

Soit n_+ (respectivement n_-) le nombre des points où θ traverse Δ de droite à gauche (respectivement de gauche à droite) en regardant depuis z. On veut montrer que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = n_+ - n_-$.

1. Montrer qu'on peut supposer sans perte de généralité que $z = 0$ et $\Delta = \mathbb{R}_-$.

2. Soient θ une détermination continue de l'argument de γ, $\arg$ la détermination principale de l'argument sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $c_1 < \cdots < c_m$ les éléments de E. Montrer que $\theta - \arg \circ\gamma$ est constante sur chaque composante connexe de $[a, b] \setminus E$.

3. Conclure en montrant que

$$2\pi \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{m} \big(\arg\gamma(c_k-) - \arg\gamma(c_k+)\big).$$

Remarque : on peut montrer que presque toute droite issue de z vérifie les hypothèses ci-dessus. Pour cela, on considère une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de γ à chaque segment $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $\psi \in [0, 2\pi[$, notons $\Delta_\psi = z + e^{i\psi}\mathbb{R}_+$. Il suffit de montrer que tout $k \in [[1, n]]$, l'ensemble $N_k = \{\psi \in [0, 2\pi[: \gamma(t) \in \Delta_\psi$ pour une infinité de $t \in I_k\}$ est de mesure nulle.

Notons $S_k = \{t \in I_k : \theta'(t-) = 0$ ou $\theta'(t+) = 0\}$. On commence par montrer que

$$N_k \subset \theta(S_k) + 2\pi\mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \theta(S_k) + 2\pi k.$$

En effet, supposons que pour une infinité de $t \in I_k$, $\gamma(t) \in \Delta_\psi$, autrement dit $\theta(t) \in \psi+2\pi\mathbb{Z}$. L'ensemble de ces instants possède un point d'accumulation $\ell \in I_k$. On peut trouver une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'instants autres que ℓ et convergeant vers ℓ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta(s_n) \in \psi + 2\pi\mathbb{Z}$. Comme θ est continue et $\psi + 2\pi\mathbb{Z}$ est fermé, on a aussi $\theta(\ell) \in \psi + 2\pi\mathbb{Z}$, d'où $\theta(s_n) - \theta(\ell) \in 2\pi\mathbb{Z}$, et même $\theta(s_n) - \theta(\ell) = 0$ à partir d'un certain rang. Donc $\theta'(\ell-) = 0$ ou $\theta'(\ell+) = 0$, autrement dit $\ell \in S_k$, d'où $\psi \in \theta(S_k) + 2\pi\mathbb{Z}$.

Il suffit donc de montrer que $\theta(S_k)$ est de mesure nulle. Pour tout $\epsilon > 0$, notons

$$S_{k,\epsilon} = \{t \in]t_{k-1}, t_k[: |\theta'(t)| < \epsilon\}.$$

Par continuité de θ' sur $]t_{k-1}, t_k[$, $S_{k,\epsilon}$ est un ouvert de $]t_{k-1}, t_k[$ donc de $\mathbb{R}$, c'est donc une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints :

$$S_{k,\epsilon} = \bigcup_{j\in J}]a_j, b_j[, \text{ d'où } \theta(S_{k,\epsilon}) = \bigcup_{j\in J} \theta(]a_j, b_j[).$$

Sur chaque intervalle $]a_j, b_j[$, la fonction θ est lispschitzienne de rapport ϵ, donc $\theta(]a_j, b_j[)$ est un intervalle de longueur $\leqslant \epsilon(b_j - a_j)$. Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Commme $\theta(S_k)$ est inclus dans $\{\theta(t_{k-1}), \theta(t_k)\} \cup \theta(S_{k,\epsilon})$, on a

$$\lambda(\theta(S_k)) \leqslant \lambda(\theta(S_{k,\epsilon})) \leqslant \sum_{j\in J} \lambda\theta(]a_j, b_j[) \leqslant \epsilon \sum_{j\in J}(b_j - a_j) = \epsilon\lambda(S_{k,\epsilon})$$

donc

$$\lambda(\theta(S_k)) \leqslant \epsilon\lambda(t_k - t_{k-1}).$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\lambda(\theta(S_k)) = 0$, ce qui achève la preuve.

Exercice 2.17 – *Utilisation de la formule de Cauchy pour un cercle*

Soit γ un lacet parcourant le cercle unité dans le sens positif. Soit a un complexe de module différent de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\int_\gamma \frac{w^n}{w-a}dw.$$
On distinguera les cas, suivant que $|a| < 1$ ou $|a| > 1$.

Exercice 2.18 – *Formule de Cauchy pour un cercle*

Montrer que dans l'énoncé de la formule de Cauchy pour un cercle, on peut affaiblir les hypothèses en supposant seulement que f est continue sur le disque fermé $\bar{D}(a,r)$ et holomorphe sur le disque ouvert $D(a,r)$.

Exercice 2.19 – *Théorème de Jordan*

Soit $\gamma : [0, L] \to \mathbb{C}$ un lacet simple (la restriction de γ à $[0, L[$ est injective) et Γ son image. Le théorème de Jordan affirme que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ possède exactement deux composantes connexes.

On démontre ce résultat dans le cas d'un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ régulier : l'application γ est $\mathcal{C}^1$ et $\gamma'(a_+) = \gamma'(b-)$ et $|\gamma'|$ ne s'annule pas. L'exercice précédent montre que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ n'est pas connexe. Comme dans l'exercice précédent, on se ramène au cas où $|\gamma'| = 1$, si bien que L est la longueur de γ.

On prolonge γ à $\mathbb{R}$ par L-périodicité, et on considère note φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\gamma' = e^{i\varphi}$.

1. Soit $c = (\varphi(L) - \varphi(0))/L$. Montrer que l'application $t \mapsto \varphi(t) - ct$ est périodique.

2. En déduire que φ est uniformément continue.

Dans la suite, on fixe $\eta \in]0, L/2[$ tel que pour tous réels s et t,
$$|t-s| \leqslant \eta \implies |\varphi(t) - \varphi(s)| \leqslant \pi/2.$$
On note $\delta = \inf\{|\gamma(t) - \gamma(s)| : \eta \leqslant |t-s| \leqslant L - \eta\}$.

3. Montrer que $\delta > 0$.

4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-\eta, \eta]$
$$\operatorname{Re}\left(\overline{\gamma'(t)}(\gamma(t+h) - \gamma(t))\right) > 0.$$

5. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in]0, \delta[$, $\gamma(t) \pm i\epsilon\gamma'(t) \notin \Gamma$. *Indication* : on montrera que $\gamma(t+h) \neq \gamma(t) \pm i\epsilon\gamma'(t)$ pour tout $h \in [-L/2, L/2]$, en distinguant deux cas.

6. Montrer que les ensembles
$$B_+ = \{\gamma(t) + i\epsilon\gamma'(t) : t \in \mathbb{R}, \epsilon \in]0, \delta[\}$$
et
$$B_- = \{\gamma(t) - i\epsilon\gamma'(t) : t \in \mathbb{R}, \epsilon \in]0, \delta[\}$$
sont connexes et contenus dans $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

7. On note C_+ et C_- les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ contenant B_+ et B_-. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \Gamma \subset C_+ \cup C_-$. Indication : étant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on considérera $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|\gamma(t_0) - z| = d(z, \Gamma)$.

8. Conclure.

Exercice 2.20 – *Polynômes*

Soit f une fonction entière. On suppose que pour $z \in \bar{D}(0,1)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$. Montrer que f est un polynôme.

Feuille 3 Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

Exercice 3.1 – *Intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un cercle*

Soit γ un lacet parcourant le cercle $C(a,r)$ dans le sens positif. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$-holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D}(a,r)$. Montrer que

$$\int_\gamma f(w)dw = 0.$$

Exercice 3.2 – *Théorème de d'Alembert-Gauss*

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $R > 0$ et $M > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant R$,
$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{n}{z}\right| \leqslant \frac{M}{|z|^2}.$$
2. En déduire l'existence et la valeur de
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{P'(z)}{P(z)}dz,$$
où γ_r est un lacet parcourant le cercle $C(0,r)$ dans le sens positif.
3. En déduire que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. On utilisera le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 3.3 – *Minimum sur un disque fermé*

1. Soit f une fonction ($\mathcal{C}^1$-) holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D}(a,r)$, et qui ne s'annule pas. Montrer que la borne $\inf\{|f(z)| \ \ z \in \overline{D}(a,r)\}$ est atteinte en un point du cercle $C(a,r)$. Que se passe-t-il si elle est atteinte en un point du disque $D(a,r)$?
2. Soit P un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. En déduire que la borne $\inf\{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\}$ est atteinte et que P possède au moins un zéro.

Exercice 3.4 – *Théorème de Hurwitz*

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions ($\mathcal{C}^1$-) holomorphes sur un ouvert connexe Ω, convergeant uniformément sur les compacts vers une fonction f. On rappelle que f est ($\mathcal{C}^1$-) holomorphe.

Soit $\bar{D}(a,r)$ un disque fermé contenu dans Ω. Montrer que si f s'annule en un point $z \in D(a,r)$ mais ne s'annule pas sur le cercle $C(a,r)$, alors à partir d'un certain rang, f_n s'annule en un point $z_n \in D(a,r)$.

Indication : Utiliser l'exercice précédent.

Exercice 3.5 – *Fonctions entières à croissance polynomiale*

Soit f une fonction ($\mathcal{C}^1$-)entière sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $m \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant M(1+|z|)^m$. Montrer que f est polynomiale de degré au plus m. Trois méthodes :

1. Développer f en série entière
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
et considérer g définie par
$$g(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n z^{n-m}.$$
2. Développer f en série entière comme ci-dessus et majorer a_n pour $n \geqslant m+1$ à l'aide des inégalités de Cauchy.
3. à l'aide des inégalités de Cauchy, montrer que $f^{(m+1)}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3.6 – *Image d'une fonction entière*

Soit f une fonction ($\mathcal{C}^1$-)entière non constante sur $\mathbb{C}$. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Indication : raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Liouville à une fonction bien choisie.

Remarque : le petit théorème de Picard affirme que $f(\mathbb{C})$ est soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{C}$ privé d'un seul point.

Exercice 3.7 – *Transformations de Koebe*

On note C le cercle unité et D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $c \in D$. Pour tout nombre complexe z tel que $\overline{c}z \neq 1$, on pose
$$\varphi_c(z) = \frac{z-c}{1-\overline{c}z}.$$

1. Montrer que $\varphi_c(D) \subset D$ (deux méthodes)
2. Montrer que φ_c est un biholomorphisme (bijection holomorphe de réciproque holomorphe) de D dans D.
3. Soit f un biholomorphisme de D dans D. On note $c = f^{(-1)}(0)$. En considérant $f \circ (\varphi_c)^{-1}$ et sa bijection réciproque, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ tel que $f = \lambda\varphi_c$.

Exercice 3.8 – *Théorème de Gauss-Lucas*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 1$ et de racines $z_1, \dots, z_n$. Pour z différent de $z_1, \dots, z_n$, exprimer $P'(z)/P(z)$ à l'aide des racines $z_1, \dots, z_n$. En déduire que si z est racine de P', alors z est barycentre de $z_1, \dots, z_n$ à coefficients positifs.

Indication : conjuguer l'égalité précédente et utiliser le fait que $w\overline{w} = |w|^2$ pour tout complexe w.

On démontre ainsi le théorème de Gauss-Lucas : les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 3.9 – *Inégalité de Bernstein*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. On suppose que $||P|| := \sup\{|P(z)| \ \ z \in \mathbf{U}\} \leqslant 1$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| \geqslant 1$ alors $|P(z)| \leqslant |z|^n$. Indication : appliquer le le principe du maximum au polynôme obtenu en inversant l'ordre des coefficients de P.
2. En déduire que pour tout complexe λ de module > 1, les racines de $P - \lambda X^n$ sont dans le

disque unité fermé.

3. Montrer qu'on peut trouver $w \in \mathbf{U}$ tel que $|P'(w)| = ||P'||$. En considérant le complexe $\lambda = P'(w)/(nw^{n-1})$, montrer que $||P'|| \leqslant n$. (On utilisera le théorème de Gauss-Lucas.)

Exercice 3.10 – *Autour du principe du maximum*

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω. Soit D un ouvert connexe tel que $\overline{D} \subset \Omega$. On note u et v les parties réelle et imaginaire de f.

1. Montrer que pour tous réels α et β,

$$\sup_{\overline{D}}(\alpha u + \beta v) = \sup_{\partial D}(\alpha u + \beta v)$$

2. Soit C un convexe fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f(\partial D) \subset C$, alors $f(\overline{D}) \subset C$. *Indication :* C est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Exercice 3.11 – *Transformée de Laplace de la loi gaussienne standard*

Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. L'application g est la densité de la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. En particulier, g est positive, d'intégrale 1.

Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, l'intégrale

$$Lg(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{\zeta x}dx$$

définit une fonction entière de la variable ζ. En calculant directement $Lg(\zeta)$ lorsque ζ est réel, en déduire l'expression de $Lg(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$.

Exercice 3.12 – *Fonction ζ de Riemann*

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on note $n^{-z} = \exp(-z \ln n)$. Pour tout nombre réel a, on note $D_a = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > a\}$.

1. Montrer que la formule

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}$$

définit une fonction holomorphe sur D_1.

2. Montrer que pour tout $z > 1$,

$$\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - \int_1^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) z t^{-z-1} dt.$$

3. En déduire que ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $D_0 \setminus \{1\}$.

4. On note $(p_n)_{n \geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note A_r l'ensemble des entiers naurels non nuls dont l'ensemble des diviseurs premiers est inclus dans $\{p_1, \ldots, p_r\}$. Montrer que pour tout $z \in D_1$,

$$\prod_{k=1}^{r} \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \sum_{n \in A_r} n^{-z}.$$

5. En déduire que
$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_k^{-z}} = \zeta(z).$$

Exercice 3.13 – *Principe du maximum pour des domaines non bornés*

1. Montrer que le principe du maximum est en défaut sur le domaine $\Omega = \{z = x + iy \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ et $f(z) = e^{-iz^2}$.
2. Soit U un ouvert non borné de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction holomorphe sur U, continue sur $\overline{U}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \partial U$, $|f(z)| \leqslant M$ et
$$\lim_{|z|\to+\infty, z\in U} |f(z)| = M$$
Montrer que pour tout $z \in \overline{U}$, $|f(z)| \leqslant M$.

Exercice 3.14 – *Utilisation du lemme de Schwarz*

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$-holomorphe dans le disque unité $D(0,1)$ de $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 1$ et $\mathrm{Re}(f) \geqslant 0$. En considérant la fonction
$$g : z \mapsto \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$$
montrer que pour tout $z \in D(0,1)$,
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

Exercice 3.15 – *Points singuliers sur le cercle de convergence*

Dans ce problème, on s'intéresse au comportement d'une série entière sur le cercle de convergence. étant donnés une série entière de somme
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
de rayon de convergence fini $R > 0$ et un point du cercle de convergence $w \in C(0,R)$, on dit que w est régulier pour f s'il existe un ouvert Ω contenant le disque $D(0,R)$ et le point w et une fonction analytique sur Ω qui prolonge f. Dans le cas contraire, w est singulier.

1. Montrer que l'ensemble des points réguliers de f est un ouvert de $C(0,R)$.
2. Dans cette question on prend $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner sans justification la valeur de R et l'expression de $f(z)$ pour z dans $D(0,R)$. À l'aide d'un prolongement analytique de f qu'on précisera, montrer que f possède un seul point singulier sur le cercle de convergence $C(0,R)$.
3. Dans cette question, on prend $a_n = 1$ si n est de la forme 2^k avec $k \in \mathbb{N}$, et $a_n = 0$ sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n l'ensemble des racines 2^n-ièmes de 1. Montrer les affirmations suivantes.
   a) Le rayon de convergence est $R = 1$.
   b) Pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = z + f(z^2)$

c) Pour tout $w \in G_n$, $f(z)$ n'a pas de limite dans $\mathbb{C}$ quand z tend vers w (on raisonnera pas récurrence).

d) Tout point de $C(0, 1)$ est singulier pour f.

4. Dans cette question, on revient au cas général et on cherche à montrer que f possède un point singulier. On raisonne par l'absurde en supposant que tout point du cercle $C(0, R)$ est régulier. à chaque w dans $C(0, R)$, on associe donc un ouvert Ω_w contenant $D(0, R) \cup \{w\}$ et une fonction analytique $f_w \in \mathcal{H}(\Omega_w)$ telle que pour tout $z \in D(0, R)$, $f_w(z) = f(z)$. En réduisant l'ouvert Ω_w, on se ramène au cas où $\Omega_w = D(0, R) \cup D(w, r(w))$ pour un certain $r(w) > 0$.

   a) Montrer qu'on peut trouver une partie finie F de $C(0, R)$ telle que
   $$\overline{D}(0, R) \subset \bigcup_{w \in F} \Omega_w.$$

   b) Montrer qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que
   $$D(0, R + \delta) \subset \bigcup_{w \in F} \Omega_w.$$

   c) Montrer que pour w_1 et w_2 dans $C(0, R)$, f_{w_1} et f_{w_2} coïncident sur $\Omega_{w_1} \cap \Omega_{w_2}$.

   d) En déduire que f s'étend en une fonction analytique sur $\bigcup_{w \in F} \Omega_w$ et obtenir une contradiction.

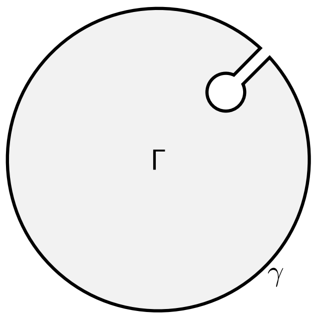
Feuille 4 Théorie de Cauchy, primitives de fonctions holomorphes

Exercice 4.1 – *Théorème de Goursat pour les rectangles*

Soit f une fonction $\mathbb{C}$-dérivable dans un ouvert $\mathbb{C}$ de U. Montrer que pour tout rectangle R contenu sans U, $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$.

Exercice 4.2 – *Un domaine non étoilé*

On note γ le bord du domaine ouvert Γ représenté sur la figure ci-dessous et appelé *trou de serrure*, orienté positivement. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant $\overline{\Gamma}$.



1. Montrer qu'il existe un domaine trou de serrure Γ' inclus dans U qui contient $\overline{\Gamma}$.
2. Montrer que f admet une primitive sur Γ'.
3. Montrer que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
4. Proposer d'autres contours correspondant à des domaines non étoilés où l'on peut faire le même raisonnement.

Exercice 4.3 – *Existence d'un logarithme et de racines de tous ordres*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω ne s'annulant pas. Pour tout lacet γ à valeurs dans Ω, on note

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}(w)dw.$$

1. Montrer que pour tout lacet γ à valeurs dans Ω, $I_\gamma(f) \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
   a) f'/f possède une primitive holomorphe sur Ω.
   b) il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $\exp(g) = f$.
   c) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f_n^n = f$.
   d) pour une infinité de $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f_n^n = f$.
   e) pour tout lacet γ à valeurs dans Ω, $I_\gamma(f) = 0$.
3. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est non borné et connexe. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, la fonction $z \mapsto z - a$ admet un logarithme holomorphe sur Ω.

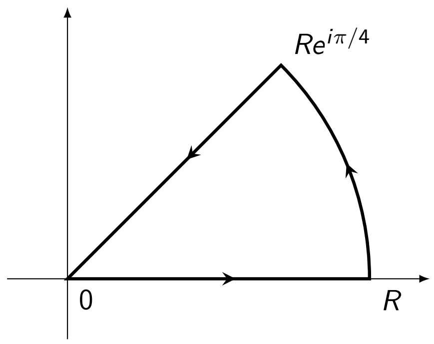
Exercice 4.4 – *Arctangente*

On note $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, $\Omega_+ = \mathbb{C} \setminus \{iy \ \ y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$, $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus \{iy \ \ y \in \mathbb{R}, |y| \leq 1\}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \ \ k \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout $z \in D$, on note $\tan z = \sin z / \cos z$. On appelle *détermination* *holomorphe de la fonction arctangente* sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que pour tout $z \in \Omega$, $\tan f(z) = z$.

1. Montrer que $\tan(D) = \Omega_0$ et que $\tan' = 1 + \tan^2$.
2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ inclus dans Ω_0. Montrer que si f est une détermination holomorphe de l'arctangente sur Ω, alors f est une primitive de $z \mapsto (1+z^2)^{-1}$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de détermination holomorphe de l'arctangente sur Ω_0.
4. Soit L la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que
$$f_+ : z \mapsto \frac{1}{2i} L\Big(\frac{1+iz}{1-iz}\Big)$$
est une détermination holomorphe de l'arctangente sur Ω_+. Donner son développement en série entière au voisinage de 0.
5. Montrer que $f_- : z \mapsto \pi/2 - f_+(1/z)$ est une détermination holomorphe de l'arctangente sur Ω_-.
6. Que vaut $f_+(z) - f_-(z)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$?

Exercice 4.5 – *Calcul des intégrales de Fresnel*

Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ en intégrant la fonction e^{-z^2} le long du chemin dessiné ci-dessous.



Exercice 4.6 – *Calcul d'une intégrale*

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. (On pourra intégrer $\frac{e^{iz}-1}{2iz}$ sur un contour approprié.)

Annexe **B**

Références bibliographiques

Il y a de nombreux ouvrages consacrés à l'analyse complexe, qui contiennent tous les bases de la théorie et le programme couvert par ce cours, et le choix est une question de goût plutôt que de contenu. En voici quelques uns, assez différents.

M. Audin, *Analyse complexe* (en ligne) : assez court et agréable à lire, plein de références bibliographiques et biographiques.

W. Rudin, *Analyse réelle et complexe* : c'est la référence canonique, tout y est y compris des compléments / rappels de théorie de la mesure et d'intégration, et le contenu va beaucoup plus loin que le programme du cours.

P. Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3* : très bien écrit, plus proche du programme couvert par ce cours (NDVB on a l'impression très nette que ce poly en est fortement inspiré), pensé dans le cadre d'un cursus français.

E. C. Titchmarsh, *The theory of functions* : dans un autre style, publié (en anglais) en 1932 donc ça donne un agréable impression de visiter une bibliothèque poussiéreuse — mais ça reste une référence sur le sujet.