Correction CC 2021

mardi 9 novembre 2021 22:11

Exo 1 :

1°) Vue comme fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, on a

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longmapsto (x, 2xy)$$

Elle est bien différentiable car toutes les dérivées partielles sont définies et continues

Précisément, la jacobienne vaut $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{Jac} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Les équations de Cauchy-Riemann en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sont

$$\begin{cases} 1 = 2x \\ 0 = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, f est holomorphe en $\boxed{z = \frac{1}{2}}$ seulement

De plus, on a $f'(\frac{1}{2}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2}) = 1 + 2i.0 \boxed{= 1}$

2°) D'après la règle de d'Alembert, on regarde $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{(n+1)^{3/2}}{n^{3/2}} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc le rayon de convergence de la série vaut $\boxed{1}$

3°) $\forall z \neq 0, |z-1| < 1$, on a

$$\frac{z-1}{z^2} = \frac{z-1}{(1+z-1)^2} = (z-1)\Big(\sum_{p \geq 0} (-1)^p (z-1)^p\Big)^2$$

$$= (z-1) \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} (z-1)^{p+q}$$

$$= (z-1) \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ p+q=n}} 1\Big) (-1)^n (z-1)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+1)(-1)^n (z-1)^{n+1}$$

$$\boxed{= \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} n (z-1)^n}$$

Le rayon de convergence vaut $\lim \left| \frac{(-1)^{n+1} n}{(-1)^{n+2}(n+1)} \right| = \boxed{1}$

4°) Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos z = 2 \iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$ par la formule d'Euler pour $z \in \mathbb{R}$ puis unicité du prolongement holom $\mathcal{C}^1$

$$\iff (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$$ car $e^{iz} \neq 0$

$$\iff e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$ (car $\Delta = 16 - 4 = (2\sqrt{3})^2$)

$$= e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})}$$ car $2 + \sqrt{3} > 0$ et $2 - \sqrt{3} > 0$

$$\iff iz - \ln(2 \pm \sqrt{3}) \in 2i\pi\mathbb{Z}$$ car $\ker \exp = 2i\pi\mathbb{Z}$

$$\iff \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } z = -i\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k}$$

Exercice 2 :

1°) si $\begin{cases} f : U \to \mathbb{C} \text{ est holomorphe } \mathcal{C}^1 \text{ sur l'ouvert } U \subset \mathbb{C} \\ u \in U \text{ et } r > 0 \text{ tq } \overline{D(u,r)} \subset U \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

alors on a $\boxed{f^{(n)}(u) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_{u,r}} \frac{f(w)}{(w-u)^{n+1}} dw}$

où $\gamma_{u,r}$ est le lacet parcourant le cercle de centre u et de rayon r positivement et une seule fois

2°) On applique 1°) à $\begin{cases} f = \cos \quad (\text{resp } f = \cos,\ f(z) = \frac{z \cos z}{(z-\pi)^5}) \\ U = \mathbb{C} \quad (\text{resp } \mathbb{C},\ \mathbb{C} - \{\pi\}) \\ u = 0,\ r = 1 \\ n = 0 \quad (\text{resp } n = 1,\ n = 0) \end{cases}$

On a bien dans les trois cas f holomorphe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\overline{D(0,1)} \subset U$

On obtient donc

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz = \frac{2i\pi}{0!} \cos 0 = \boxed{2i\pi}$$

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2} dz = \frac{2i\pi}{1!}(-\sin 0) = \boxed{0}$$

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^5} dz = \int_\gamma \frac{z \cos z}{(z-\pi)^5} \frac{dz}{z} = 2i\pi f(0) \text{ où } f : \mathbb{C} - \{\pi\} \to \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{z \cos z}{(z-\pi)^5}$$

$$= \boxed{0}$$

3°) On définit $f : U \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{e^{z^2}}{z^2 + az + a^2}$ où $U = \mathbb{C} - \{a e^{2i\pi/3}, a e^{-2i\pi/3}\}$

On a bien $\begin{cases} f \text{ holomorphe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \\ \overline{D(a,R)} \subset U \text{ car } R < |a|\sqrt{3} = |a - a e^{\pm 2i\pi/3}| \end{cases}$

donc $\int \frac{e^{z^2}}{\dots} dz = \int \frac{f(z)}{\dots} dz = 2i\pi f(a)$

On a bien $\left| \begin{array}{l} f \text{ holomorphe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \\ \overline{D(a,R)} \subset U \text{ car } R < |a|\sqrt{3} = |a - a e^{\pm 2i\pi/3}| \end{array} \right.$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{z^2}}{z^3 - a^3}\, dz = \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2i\pi f(a)$

$$= \boxed{\frac{2i\pi}{3} \frac{e^{a^2}}{a^2}}$$

<u>Exo 3 :</u>

1°) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq \sqrt{|z|}$

En particulier, $f(0) = 0$

f est holomorphe en 0 donc $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)$

d'où $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$

Ainsi, $\forall z \neq 0, \quad g(z) = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^2 \cdot z \xrightarrow[z \to 0]{} (f'(0))^2 \cdot 0 = 0$

Comme g est continue, on en déduit $\boxed{g(0) = 0}$

2°) Sur $\mathbb{C}^*$, g est holom $\mathcal{C}^1$ comme quotient de telles fonctions

$\forall z \neq 0, \quad \dfrac{g(z) - g(0)}{z - 0} = \dfrac{g(z)}{z} = \left(\dfrac{f(z)}{z}\right)^2 \xrightarrow[z \to 0]{} f'(0)^2$

donc g est holomorphe en 0 de dérivée $g'(0) = f'(0)^2$

De plus, $\forall z \neq 0, \quad g'(z) = 2 f'(z) \dfrac{f(z)}{z} - \left(\dfrac{f(z)}{z}\right)^2$

Or, f est holom $\mathcal{C}^1$ donc $\displaystyle\lim_{z \to 0} f'(z) = f'(0)$

de plus, on a vu que $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$

Alors, on a $g'(z) \longrightarrow 2 f'(0)^2 - f'(0)^2 = f'(0)^2 = g'(0)$

donc g est $\mathcal{C}^1$ en 0

Finalement, $\boxed{g \text{ est holom } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{C}}$

3°) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ donc $|f(z)|^2 \leq |z|$

d'où $\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad |g(z)| \leq 1$

Comme $g(0) = 0$, on a $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \leq 1$

Par le <u>principe du maximum</u>, comme g est entière $\mathcal{C}^1$ bornée

alors g est constante

Comme $g(0) = 0$, alors $g \equiv 0$

On en déduit $\boxed{f \equiv 0}$

<u>Exo 4 :</u>

$$f : \begin{array}{rcl} D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1 - \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) \end{array}$$

1°) Soit $z \in D(0,1)$

$f(z) = 0 \iff \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) = 1$

$\iff \dfrac{z}{z-1} \in 2i\pi\mathbb{Z}$

$\iff \left| \begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z}^* \text{ tq } z = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2i\pi k}} \\ \text{ou } z = 0 \end{array} \right.$

$\forall k \in \mathbb{Z}^*$, on note $\boxed{z_k = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2i\pi k}}}$ et $\boxed{z_0 = 0}$

L'ensemble des zéros de f est $\{z_k \mid k \in \mathbb{Z}\} =: \mathrm{Zero}(f)$

2°) $\forall k \neq l \in \mathbb{Z}^*, \quad |z_k - z_l| = \left| \dfrac{1 - \frac{1}{2i\pi l} - \left(1 - \frac{1}{2i\pi k}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2i\pi k}\right)\left(1 - \frac{1}{2i\pi l}\right)} \right|$

$$= \frac{\left| \frac{1}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi l} \right|}{\left|1 + \frac{i}{2\pi k}\right| \left|1 + \frac{i}{2\pi l}\right|}$$

Comme $0 < \frac{1}{2\pi k} < 1$ et $0 < \frac{1}{2\pi l} < 1$, on obtient

$\left|1 + \frac{i}{2\pi k}\right| < \sqrt{2}$ et $\left|1 + \frac{i}{2\pi l}\right| < \sqrt{2}$ d'où

$|z_k - z_l| > \dfrac{1}{2} \left| \dfrac{1}{2\pi k} - \dfrac{1}{2\pi l} \right| \geqslant \dfrac{1}{2} \left| \dfrac{1}{2\pi k} - \dfrac{1}{2\pi(k+1)} \right| =: r_k > 0$

De plus, $\forall l \in \mathbb{Z}^*, \quad |z_l - z_0| = |z_l| > \sqrt{2} =: r_0 > 0$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \boxed{\mathrm{Zero}(f) \cap D(z_k, r_k) = \{z_k\}}$

donc tous les zéros de f sont isolés

On a $z_k \xrightarrow[k \to \pm\infty]{} 1$ mais 1 n'est pas un zéro de f

donc tous les zéros de f sont isolés

On a $z_k \xrightarrow[k \to \pm\infty]{} 1$ mais 1 n'est pas un zéro de f puisque ce n'est même pas dans l'ensemble de définition de f

donc le principe des zéros isolés n'est pas contredit

Exo 5 :

1°) $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

Or, sin et cos se prolonge en des fonctions entières $\mathcal{C}^1$

donc tan se prolonge en une fonction holom. $\mathcal{C}^1$ sur $V := \mathbb{C} - \cos^{-1}\{0\}$

Or, $\forall z \in \mathbb{C}$,
$$\cos z = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0$$
$$\iff e^{2iz} = -1$$
$$\iff 2iz - i\pi \in 2i\pi\mathbb{Z}$$
$$\iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

Ainsi $\boxed{V = \mathbb{C} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)}$

et $\tan : \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{\sin z}{\cos z} \end{array}$ est holom. $\mathcal{C}^1$

$$\forall z \in V, \quad \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$$
$$= \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$
$$= -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$
$$\boxed{= F(e^{2iz})}$$

où $F : \begin{array}{l} \mathbb{C} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ u \longmapsto \boxed{-i \frac{u-1}{u+1}} \end{array}$

2°) Soit $v \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C} - \{-1\}$, on a

$$v = -i \frac{u-1}{u+1} \iff uv + v = -ui + i$$
$$\iff u(v+i) = i - v$$
$$\iff v \neq -i \text{ et } u = \frac{i-v}{i+v}$$

On définit $G : \begin{array}{l} \mathbb{C} - \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{-1\} \\ v \longmapsto \boxed{\frac{i-v}{i+v}} \end{array}$

C'est la bijection réciproque de $F : \mathbb{C} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{-i\}$

3°) Soit $w \in U$, $z \in \mathbb{C}$, on a

$$w = \tan z \iff w = F(e^{2iz})$$
$$\iff G(w) = e^{2iz} \quad \text{car } \begin{array}{l} e^{2iz} \neq -1 \\ w \neq -i \end{array}$$

Or, $\boxed{G(w) = \frac{i-w}{i+w} \notin \mathbb{R}_-}$

En effet,
$$\frac{i-w}{i+w} \in \mathbb{R} \iff \frac{i-w}{i+w} = \overline{\left(\frac{i-w}{i+w}\right)}$$
$$\iff \frac{i-w}{i+w} = \frac{-i-\bar{w}}{-i+\bar{w}}$$
$$\iff (i-w)(\bar{w}-i) = -(i+w)(i+\bar{w}) \quad \text{car } w \neq -i$$
$$\iff i(w+\bar{w}) = -i(w+\bar{w})$$
$$\iff w + \bar{w} = 0$$
$$\iff w \in i\mathbb{R}$$

donc
$$\frac{i-w}{i+w} \in \mathbb{R}_- \iff \left| \begin{array}{l} \exists w' \in \mathbb{R} \text{ tq } w = iw' \\ \text{et } \frac{1-w'}{1+w'} \leq 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \exists w' \in \mathbb{R} \text{ tq } w = iw' \text{ et } w' \leq -1 \text{ ou } w' \geq 1$$
$$\iff w \notin U$$

Puisque $G(w) \notin \mathbb{R}_-$, alors on peut appliquer $\mathrm{Log} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$

$$w = \tan z \iff \exp(\mathrm{Log}(G(w))) = \exp(2iz)$$
$$\iff 2iz - \mathrm{Log}\, G(w) \in 2i\pi\mathbb{Z}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } z = \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\, G(w) + k\pi$$

On définit $\arctan : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\, G(z) \end{array}$

D'après ce qui précède, $\forall z \in U$, $\tan(\arctan z) = z$

donc en particulier, $\forall z \in U \cap \mathbb{R}$, $\tan(\arctan z) = z$

De plus, on a $\arctan(0) = \frac{1}{2i} \mathrm{Log}\, 1 = 0$

Ceci montre que $\boxed{\arctan_{|U \cap \mathbb{R}} \text{ est l'arctangente réelle}}$

donc arctan est bien un [illegible]

De plus, on a $\arctan(0) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} 1 = 0$

Ceci montre que $\boxed{\arctan_{|U \cap \mathbb{R}} \text{ est l'arctangente réelle}}$

donc arctan est bien un prolongement de l'arctangente réelle

4°) Par composition, arctan est holomorphe $\mathcal{C}^1$ sur U

$\forall z \in U \cap \mathbb{R}, \ \arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2}$

Par le principe des zéros isolés, comme $\arctan'$ et $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ sont holom. $\mathcal{C}^1$ sur U, alors cette égalité reste vraie sur U

donc $\forall z \in U$, $\boxed{\arctan' z = \frac{1}{1+z^2}}$

5°) Soit f continue sur U tq

$\forall z \in U, \quad z \cos f(z) - \sin f(z) = 0$

alors $\cos f(z) \neq 0$, sinon on aurait $\sin f(z) = \pm 1 \neq 0$

donc $z = \tan f(z)$

Ainsi, $\forall z \in U, \ \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\quad f(z) = \arctan z + k\pi$

Par continuité de $f - \arctan$ sur U connexe, on en déduit

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\forall z \in U, \ f(z) = \arctan z + k\pi$

Réciproquement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\boxed{f_k := \arctan + k\pi}$ est solution de l'équation fonctionnelle