M2 CCI – Algorithmique – Devoir surveillé 3

Durée 1h, sans documents **30 janvier 2026**

NE PAS RECOPIER les énoncés des questions. Ne pas perdre de temps à un soin excessif de la présentation. Les questions sont indépendantes. Le barème est indicatif.

1. Extraction d'éléments d'une séquence selon leur rang

Étant donnée une séquence **S**, on veut en extraire les éléments dont le rang dans **S** est multiple d'un entier **R** donné (le rang du premier élément d'une séquence est 1).

Par exemple, les éléments de rang multiple de **3** dans la séquence [8, 12, **29**, 53, 25, **13**, -4], sont **29** et **13** (de rang respectif 3 et 6).

Q1 **[5 points]**

On spécifie une fonction nommée **EdeRang** :

EdeRang : fonction (R : entier > 0, S : séquence d'entier) → séquence d'entier
{Séquence des éléments de S dont le rang est multiple de R, ou séquence vide sinon.
Par exemple, dans l'exemple précédent :
*EdeRang(**3**, [8, 12, **29**, 53, 25, **13**, -4]) = [29, 13]}*

Pour réaliser cette fonction, on spécifie une fonction nommée **SansPremiers** :

SansPremiers : fonction (x : entier ≥ 0, S : séquence d'entier) → séquence d'entier
{Séquence construite à partir de S en enlevant ses x premiers éléments.
*Par exemple : SansPremiers(**2**, [**8, 12**, 29, 53, 25, 13, -4]) = [29, 53, 25, 13, -4].*
Si le nombre d'éléments de S est inférieur ou égal à x, le résultat est la séquence vide.}

— Donner des **équations de récurrence** définissant la fonction **SansPremiers**.
— Donner une **réalisation récursive** de la fonction **EdeRang** en utilisant **SansPremiers**.

2. Les séquences d'entiers de la forme S&[0]&S^{-1}

Q2 **[8 points]**

On considère l'ensemble **E** des séquences d'entiers de la forme **S1&[0]&S2** où :
— **S1** est une séquence **formée uniquement** d'entiers de l'intervalle [1…2]. **S1** peut être vide.
— **S2** est **l'inverse** de **S1** (par exemple, l'inverse de [1,2,3,4] est [4,3,2,1]. L'inverse de [] est []).

Les séquences [0], [1,1,0,1,1], [1,2,0,2,1], [1,2,2,1,0,1,2,2,1] appartiennent à **E** ; les séquences [1,1], [1,2,0,1,2], [1,2,0,2,1,2] et [3,2,0,2,3] n'appartiennent pas à **E**.

(i) Appartenance d'une séquence à E

— Donner des **équations de récurrence** définissant la fonction **ApE** spécifiée comme suit :

ApE : fonction (S : séquence d'entier) ⟶ booléen *{vrai ⇔ S appartient à E}*

Exemples : ApE([1,1]) = faux
ApE([1,1,0,1,1]) = vrai

(ii) Construction de toutes les séquences de E de longueur k

On spécifie une fonction nommée **SeqDeE** :

SeqDeE : fonction (k : entier > 0) ⟶ séquence non vide de (séquence non vide d'entier)
{ Séquence formée des séquences appartenant à E et de longueur k. ***Précondition : k est impair****.}*

Exemples : SeqDeE (1) = [[0]]
SeqDeE (3) = [[1,0,1], [2,0,2]]

Pour décrire cette fonction, on introduit une fonction **AjGD** :
AjGD : fonction (e : entier, SS : séquence non vide de (séquence non vide d'entier))
→ séquence non vide de (séquence non vide d'entier)
{ AjGD(e, SS) est déduite de SS en ajoutant e à gauche et à droite de chaque séquence de SS.}

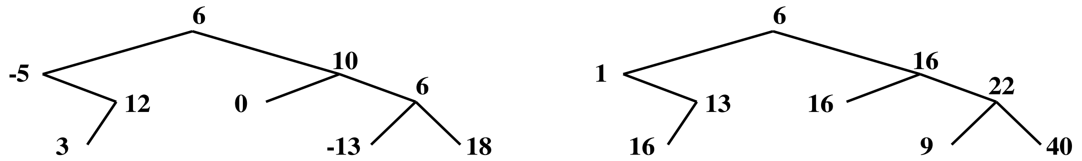
Exemples : AjGD(**2**, [[1,2], [1]]) = [[**2**,1,2,**2**], [**2**,1,**2**]]
AjGD(**1**, [[2,0,2], [1,0,1]]) = [[**1**,2,0,2,**1**], [**1**,1,0,1,**1**]]

— Donner des **équations de récurrence** définissant la fonction **AjGD.**
— Donner des **équations de récurrence** définissant la fonction **SeqDeE** en utilisant **AjGD.**

3. Arbre des poids

Q3 [7 points]
On considère ici des arbres binaires d'entiers :
ArbEnt : type arbre binaire d'entier

— Le *poids* d'un nœud est la somme des éléments du chemin de la racine à ce nœud (inclus).
— L'*arbre des poids* associé à un arbre **A** est l'arbre construit à partir de **A** en remplaçant chaque nœud par son poids, (voir figure suivante). L'arbre des poids d'un arbre vide est l'arbre vide.



arbre A **arbre des poids de l'arbre A**

(i) Nombre de feuilles de poids X
— Donner des équations de récurrence définissant la fonction **NbFP** spécifiée comme suit :
NbFP : fonction (A : ArbEnt, X : entier) → entier ≥ 0
{ Nombre de feuilles de poids X dans A.}

Exemple : si A est l'arbre de l'exemple ci-dessus, NbFP(A,40) = 1, NbFP(A,8) = 0

(ii) Construction de l'arbre des poids d'un arbre donné
On spécifie les deux fonctions suivantes :
ArbPoids : fonction (A : ArbEnt) → ArbEnt
{Arbre des poids associé à A}
Plus : fonction (x : entier, A : ArbEnt) → ArbEnt
{Plus(x,A) est obtenu à partir de A en ajoutant x à chaque élément de A. Plus (x, /\) = /\}

— Donner des équations de récurrence définissant la fonction **Plus**.
— Donner des équations de récurrence définissant la fonction **ArbPoids** en utilisant la fonction **Plus**.

M2 CCI - Algorithmique

Des exemples de solutions **janvier 2026**

1. Extraction d'éléments d'une séquence selon leur rang

Q1 [2.5 points]

(1) SansPremiers(0, []) = [] *{on peut regrouper les équations (1) et (2) ou (1) et (3) }*
(2) SansPremiers(1+n, []) = [] *{n $\geq$ 0}*
(3) SansPremiers(0, e$_\circ$S) = e$_\circ$S
(4) SansPremiers(1+n, e$_\circ$S) = SansPremiers(n, S) *{n $\geq$ 0}*

[2.5 points]

EdeRang(R,S) :
retour : soit D = SansPremiers(R-1,S)
dans si EstVide?(D) alors [] sinon premier(D) $_\circ$ EdeRang(R, fin(D))

2. Les séquences d'entiers de la forme S&[0]&S^{-1}

Q2

(i) [3 points]

(1) ApE([]) = faux
(2) ApE([e]) = (e = 0)
(3) ApE(e1$_\circ$S•e2) = (e1=e2) et puis (e1=1 ou e1=2) et puis ApE(T)

(ii) [2.5 points]

(1) AjGD(x, [S]) = [x$_\circ$S•x]
(2) AjGD(x, S$_\circ$SS) = [x$_\circ$S•x] & AjGD(x, SS) *{SS non vide}*

[2.5 points]

Toute séquence de **E** est de longueur impaire. **[0]** est la seule séquence de **E** de longueur **1**. Une séquence de **E** de longueur **2n+1** est formée d'une séquence de **E** de longueur **2n-1** complétée à gauche et à droite par un même entier > 0 de l'intervalle [1…2].

(1) SeqDeE(1) = [[0]]
(2) SeqDeE(2*n+1) = *{n > 0}*
soit Z = SeqDeE(2*n-1) dans AjGD(1, Z) & AjGD(2, Z)

2. Arbre des poids

A étant un arbre binaire non vide d'entiers de la forme **/G, r, D**, si **F** est une feuille de poids **X** dans **A**, **F** est une feuille de poids **X-r** dans **G** (ou dans **D**).

Q3 [7 points]

(i) Nombre de feuilles de poids X [3 points]

(1) NbFP(/ \\, X) = 0
(2) NbFP(/G, r, D\\, X) =
si EstVide(G) et EstVide(D) alors
si r = X alors 1 sinon 0
sinon NbFP(G, X-r) + NbFP(D, X-r)

ou

(1) NbFP(/ \\, X) = 0
(2) NbFP(// r\\\\, X) = si r = X alors 1 sinon 0
(3) NbFP(//G,r\\\\, X) = NbFP(G, X-r)

(4) NbFP(//r,D\\, X) = NbFP(D, X-r)
(5) NbFP(//G,r,D\\) = NbFP(G, X-r) + NbFP(D, X-r)

(ii) [4 points]

(1) Plus(E, /\) = /\
(2) Plus(E, /G, r, D\) = /Plus(E, G), r+E, Plus(E, D)\

(1) ArbPoids(/\) = /\
(2) ArbPoids(/G, r, D\) = /Plus(r, ArbPoids(G)), r, Plus(r, ArbPoids(D))\